

# 面向对象的多粒度形式概念分析

曾望林<sup>1</sup> 折延宏<sup>2</sup>

(西安石油大学计算机学院 西安 710065)<sup>1</sup> (西安石油大学理学院 西安 710065)<sup>2</sup>

**摘要** 为进一步将粒计算思想引入到形式概念分析之中,在多粒度形式背景中研究了面向对象的形式概念,将已有的面向对象概念由单粒度拓展至多粒度情形。首先,在多粒度形式背景中,给出了不同粒度下概念的定义;其次,研究了在不同粗细粒度下,面向对象概念之间的内在联系;最后,证明了在不同粗细粒度下外延集相等的充分必要条件。所得结论为在多粒度形式背景中建立融合形式概念分析与粗糙集理论的数据分析模型提供了可能的框架。

**关键词** 属性粒化,粒度树,面向对象概念格

**中图分类号** TP182 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.10.010

## Object-oriented Multigranulation Formal Concept Analysis

ZENG Wang-lin<sup>1</sup> SHE Yan-hong<sup>2</sup>

(College of Computer Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China)<sup>1</sup>

(College of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China)<sup>2</sup>

**Abstract** To further introduce granular computing into the study of formal concept analysis, this paper studied formal concepts in multigranulation formal context and extended the existing study from single-granulation to multigranulation. Firstly, the definition of formal concepts was given at different granulation levels. Secondly, the relationship between concepts was examined at different granulation levels. Thirdly, the necessary and sufficient condition that the extension set is equal was proved at different granulation levels. The obtained results provide a possible framework for data analysis by combing both formal concept analysis and rough set theory at multiple granulation levels.

**Keywords** Granulation of attributes, Granularity tree, Object-oriented concept lattice

## 1 引言

形式概念分析<sup>[1]</sup>是知识表示与处理的一种有效数学工具,自被提出以来人们围绕概念格的数学基础、蕴含规则的挖掘、概念格的构造、概念格的模型扩展与应用等方面展开了深入研究,取得了一系列研究成果<sup>[2-5]</sup>。但形式概念分析在数据处理的高效性方面存在不足,原因在于其核心工具概念格的构造代价涉及指数时间复杂度。已有的概念格改进算法虽然能优化概念的获得过程,但并不能改变庞大的概念个数<sup>[6-8]</sup>。

近年来,人们基于粒计算的思想对形式概念分析面临的问题进行了深入剖析<sup>[9-14]</sup>。形式概念分析的粒计算方法重在对概念结果进行优化,改变了传统的计算所有概念及层次结构的研究思路。目前,形式概念分析的粒计算方法的实现主要包含形式背景的对象粒化、属性粒化、关系粒化等内容。然而,已有的研究对基于粗糙集的形式概念粒化方法并未涉及,而该方法的引入有助于实现多粒度计算框架内形式概念分析与粗糙集理论的深度融合,为构建更为成熟的数据分析方法

提供了可能。鉴于此,本文在多粒度形式背景中,研究了不同粒度下面面向对象概念之间的内在联系,并给出了不同粒度下外延集相等的充分必要条件。

本文第 2 节简要介绍了单粒度框架内的面向对象概念格的基本理论;第 3 节通过引入粒度树等概念,建立了面向对象多粒度形式概念分析的基本框架,研究了不同粒度下面面向对象概念格之间的关系,并给出了不同粒度下外延集相等的充分必要条件;最后总结全文。

## 2 基本知识

**定义 1<sup>[1]</sup>** 称三元组  $(G, M, I)$  为形式背景,其中  $G$  为非空有限集合(称为对象集), $M$  为非空有限集合(称为属性集), $I$  为对象与属性之间的二元关系。

**定义 2<sup>[15]</sup>** 设  $(G, M, I)$  为形式背景,定义  $\square: 2^G \rightarrow 2^M$  及  $\diamond: 2^M \rightarrow 2^G$  如下:  $\forall X \subseteq G, Y \subseteq M, X^\square = \{m \in M \mid \forall g \in G (gIm \Rightarrow g \in X)\} = \{m \in M \mid Im \subseteq X\}, Y^\diamond = \{g \in G \mid \exists m \in M (gIm \wedge m \in Y)\} = \{g \in G \mid gI \cap Y \neq \emptyset\}$ 。

到稿日期:2018-04-17 返修日期:2018-05-12 本文受国家自然科学基金(61472471),陕西省创新人才推进计划—青年科技新星项目(2017KJXX-60)资助。

曾望林(1992—),硕士,主要研究方向为智能计算与可视化;折延宏(1983—),男,博士,教授,主要研究方向为不确定性推理,E-mail:yanhongshe@yeah.net(通信作者)。

若  $Y=X^\square, X=Y^\diamond$ , 则称  $(X, Y)$  为一面向对象概念。其中称  $X$  为外延,  $Y$  为内涵, 全体外延、内涵之集分别记作  $EXT(B(G, M, I)), INT(B(G, M, I))$ 。

用  $B(G, M, I)$  表示形式背景  $(G, M, I)$  中所有面向对象概念之集。在  $B(G, M, I)$  上定义如下二元关系:  $\forall (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in B(G, M, I), (X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2$  或  $Y_1 \subseteq Y_2$ 。不难证明  $\leq$  为  $B(G, M, I)$  上的一偏序关系。

**命题 1**<sup>[15]</sup> 在偏序关系  $\leq$  下,  $B(G, M, I)$  构成一个完备格, 其中上、下确界运算分别为:  $(X_1, Y_1) \wedge (X_2, Y_2) = ((X_1 \cap X_2)^\square, Y_1 \cap Y_2), (X_1, Y_1) \vee (X_2, Y_2) = (X_1 \cup X_2, (Y_1 \cup Y_2)^\diamond)$ 。

**命题 2** 设  $(G, M, I)$  为形式背景,  $X \subseteq G, Y \subseteq M$ :

- 1)  $X \subseteq X^\square, Y \subseteq Y^\diamond$ ;
- 2)  $(X^\square, X^\square), (Y^\diamond, Y^\diamond) \in B(G, M, I)$ 。

### 3 多粒度形式背景中的面向对象概念格

与传统形式背景不同, 在多粒度形式背景中, 不同粒度下的属性集是不同的。例如, 表 1 中左侧部分  $L$ (大的)、 $R$ (红色)、 $G$ (绿色) 描述了对象集  $a, b, \dots, g$ , 而右侧部分  $L$ (大的)、 $R$ (红色)、 $IG$ (浅绿色)、 $dG$ (深绿色) 描述了该对象集。这里  $IG, dG$  采用了比  $G$  更细的粒度对对象进行描述, 或者说  $IG, dG$  是  $G$  的细化。一般地, 用  $(G, M_k, I_k)_{k \in K}$  表示与最原始的形式背景  $(G, M, I)$  所对应的多粒度形式背景。

表 1 多粒度形式背景

Table 1 Multigranulation formal context

	$L$	$R$	$G$	$L$	$R$	$IG$	$dG$
$a$	$\times$		$\times$	$a$	$\times$		
$b$	$\times$		$\times$	$b$	$\times$		
$c$	$\times$		$\times$	$c$	$\times$		$\times$
$d$			$\times$	$d$		$\times$	
$e$			$\times$	$e$			$\times$
$f$	$\times$	$\times$		$f$	$\times$	$\times$	
$g$		$\times$		$g$	$\times$		

例 1 表 1 中的属性  $G$  的粒度树如图 1 所示。

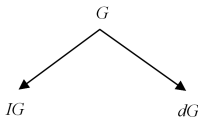


图 1 属性  $G$  的粒度树

Fig. 1 Granularity tree of attribute  $G$

**定义 3** 设  $(G, M_k, I_k)_{k \in K}$  为多粒度形式背景,  $m \in M$ , 属性  $m$  的粒度树  $T_m$  是满足如下条件的含有根节点的树:

- 1) 粒度树中每一节点都用一属性名称来标记, 根节点记作  $m$ ;
- 2) 对于属性  $z$ , 赋予其对象集合  $z^\downarrow, z^\uparrow$  表示具有属性  $z$  的对象之集;
- 3) 若节点  $z_1, \dots, z_n$  是节点  $z$  的后继, 则  $\{z_1^\downarrow, \dots, z_n^\downarrow\}$  是  $z^\downarrow$  的划分。

**定义 4** 设  $m$  是一属性,  $m$  的粒度树  $T_m$  中的剪枝是满足如下条件的节点之集  $C$ : 对于每一个叶节点  $u$ , 在  $u$  到根节点  $m$  的路径上存在唯一的节点属于  $C$ 。

例 2 不妨设属性  $m$  的粒度树如图 2 所示。

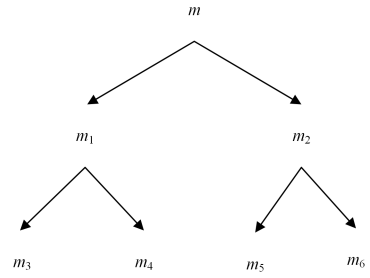


图 2 属性  $m$  的粒度树

Fig. 2 Granularity tree of attribute  $m$

根据定义 4,  $m$  的粒度树的剪枝共有如下几种情形:

$$C_{1m} = \{m\}, C_{2m} = \{m_1, m_2\}, C_{3m} = \{m_3, m_4, m_5, m_6\},$$

$$C_{4m} = \{m_1, m_5, m_6\}, C_{5m} = \{m_2, m_3, m_4\}$$

一般地, 对于同一粒度树的剪枝  $C_{1m} = \{y_1, \dots, y_s\}$  和  $C_{2m} = \{z_1, \dots, z_t\}$  而言, 可定义  $\leq$  如下:

$$C_{1m} \leq C_{2m} \Leftrightarrow \{y_1^\downarrow, \dots, y_s^\downarrow\} \subseteq \{z_1^\downarrow, \dots, z_t^\downarrow\} \quad (1)$$

式(1)是  $\{z_1^\downarrow, \dots, z_t^\downarrow\}$  的一个划分。

在例 2 中, 有  $C_{3m} \leq C_{2m} \leq C_{1m}, C_{4m} \leq C_{2m}, C_{5m} \leq C_{2m}, C_{3m} \leq C_{5m} \leq C_{1m}$ 。

设  $(G, M, I)$  为形式背景, 对于每个属性  $m \in M$ , 存在粒度树  $T_m, C_m$  为  $T_m$  中的剪枝, 记  $C = \{C_m | m \in M\}$ 。这样, 剪枝之集  $C$  可诱导如下形式背景  $(G, M_c, I_c)$ , 其中  $M_c = \bigcup_{m \in M} C_m$ 。对于  $M_c$  中的每一个属性  $y, \langle g, y \rangle \in I_c$  当且仅当  $g \in y^\downarrow$ 。同样地, 可定义  $C_1 \leq C_2 \Leftrightarrow \forall m \in M, C_{1m} \leq C_{2m}$ , 这里  $C_{1m} \leq C_{2m}$  由式(1)定义。

在形式背景  $(G, M_c, I_c)$  中, 可根据定义 2 构造与剪枝之集  $C$  所对应的面向对象概念格。由于  $C$  描述的是不同粒度下的属性之集, 因此可以在不同粒度下构建不同的面向对象概念格。

以下定理研究了不同粒度下, 面向对象概念格之间的内在联系。

**定理 1** 若  $C_1 \leq C_2$ , 则  $EXT(B(G, M_{C_2}, I_{C_2})) \subseteq EXT(B(G, M_{C_1}, I_{C_1}))$ 。

证明: 任取  $X \in EXT(B(G, M_{C_2}, I_{C_2}))$ , 存在  $Y \subseteq M_{C_2}$ , 使得  $(X, Y) \in B(G, M_{C_2}, I_{C_2})$ , 即  $X^\square = Y, Y^\diamond = X$ 。设  $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ , 用  $Y_i = \{y_{i1}, \dots, y_{im_i}\} (i=1, \dots, p)$  表示  $M_{C_1}$  中细化  $y_i$  的属性之集, 这里  $y_i \in M_{C_2}$ 。

定义  $Y' = \{y \in M_{C_1} | y \notin \bigcup_{i=1}^p Y_i, y^\downarrow \subseteq X\}, Z = \bigcup_{i=1}^p Y_i \cup Y'$ 。下面将证明  $(X, Z) \in B(G, M_{C_1}, I_{C_1})$ , 即等价于证明  $X^\square = Z, Z^\diamond = X$ 。

首先, 证明  $X^\square = Z$ 。任取  $z \in Z$ , 则  $\exists Y_i (i=1, \dots, p)$  使  $z \in Y_i$  或  $z \in Y'$ 。若  $z \in Y_i$ , 则对于满足  $xI_{C_2}z$  的对象  $x$  而言, 自然有  $xI_{C_1}y_i$ , 由  $X^\square = Y$  在  $(G, M_{C_2}, I_{C_2})$  中成立可知  $x \in X$ 。若  $z \in Y'$ , 则由  $Y'$  的定义可知  $z^\downarrow \subseteq X$ , 从而  $z \in X^\square$ 。这就证明了  $Z \subseteq X^\square$ 。相反, 任取  $z \in X^\square$ , 此时由  $Z, Y'$  的定义可知  $z \in Z$ , 从而  $X^\square \subseteq Z, X^\square = Z$  得证。

然后, 证明  $Z^\diamond = X$ 。任取  $x \in X$ , 由  $Y^\diamond = X$  可知存在  $y_i \in Y$  使得  $xI_{C_2}y_i$ 。因为  $y_i^\downarrow = y_{i1}^\downarrow \cup \dots \cup y_{im_i}^\downarrow$ , 所以存在  $y_{ij}$  使得  $xI_{C_1}y_{ij}$ , 从而  $x \in Z^\diamond$ 。相反, 假设存在  $x \in Z^\diamond$  满足  $x \notin X$ , 则由  $x \in Z^\diamond$  可知  $\exists z \in Z$  使得  $xI_{C_1}z$ , 根据已经证得的结果

$X^\square = Z$  可知  $x \in X$ , 与假设前提  $x \notin X$  矛盾。因此,  $Z^\diamond = X$ 。

表 2 列出了与表 1 对应的面向对象概念。

表 2 与表 1 对应的面向对象概念格

Table 2 Collection of object-oriented concepts corresponding to Table 1

	外延	内涵	外延	内涵
1	$\{a,b,c,d,e,f,g\}$	$\{L,R,G\}$	$\{a,b,c,d,e,f,g\}$	$\{L,R,IG,dG\}$
2	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{G\}$	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{IG,dG\}$
3	$\{a,b,c,f\}$	$\{L\}$	$\{a,b,c,f\}$	$\{L\}$
4	$\{f,g\}$	$\{R\}$	$\{f,g\}$	$\{R\}$
5	$\{a,b,c,d,e,f\}$	$\{L,G\}$	$\{a,b,c,d,e,f\}$	$\{L,IG,dG\}$
6	$\{a,b,c,f,g\}$	$\{L,R\}$	$\{a,b,c,f,g\}$	$\{L,R\}$
7			$\{a,b,d\}$	$\{IG\}$
8			$\{c,e\}$	$\{dG\}$
9			$\{a,b,c,d,f\}$	$\{L,IG\}$
10			$\{a,b,c,e,f\}$	$\{L,dG\}$
11			$\{a,b,d,f,g\}$	$\{R,IG\}$
12			$\{c,e,f,g\}$	$\{R,dG\}$

如表 2 所列,若  $C_1 \leq C_2$ ,  $EXT(B(G, M_{C_2}, I_{C_2}))$  是  $EXT(B(G, M_{C_1}, I_{C_1}))$  的真子集。然而在  $C_1 \leq C_2$  的一些特殊情形下,  $EXT(B(G, M_{C_2}, I_{C_2})) = EXT(B(G, M_{C_1}, I_{C_1}))$  也是成立的,如表 3 所列。

表 3 另外一种多粒度形式背景

Table 3 Another type of multigranulation formal context

	L	R	G	H	L	R	IG	dG	H
a	×		×		a	×	×		
b	×		×		b	×	×		
c	×	×			c	×	×		
d		×	×		d	×		×	
e		×	×		e	×		×	
f				×	f				×
g				×	g				×

表 4 列出了与表 3 对应的面向对象概念格。

表 4 与表 3 对应的面向对象概念格

Table 4 Collection of object-oriented concepts corresponding to Table 3

	外延	内涵	外延	内涵
1	$\{a,b,c,d,e,f,g\}$	$\{L,R,G,H\}$	$\{a,b,c,d,e,f,g\}$	$\{L,R,IG,dG,H\}$
2	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{L,R,G\}$	亮 $\{a,b,c,d,e\}$	$\{L,R,IG,dG\}$
3	$\{a,b,c\}$	$\{L\}$	亮 $\{a,b,c\}$	$\{L,IG\}$
4	$\{d,e\}$	$\{R\}$	亮 $\{d,e\}$	$\{R,dG\}$
5	$\{d,e,f,g\}$	$\{R,H\}$	亮 $\{d,e,f,g\}$	$\{R,dG,H\}$
6	$\{f,g\}$	$\{H\}$	亮 $\{f,g\}$	$\{H\}$
7	$\{a,b,c,f,g\}$	$\{L,H\}$	$\{a,b,c,f,g\}$	$\{L,IG,H\}$

下面给出在不同粒度下外延相等的充分必要条件。为此,引入如下记号:用  $M_{C_2}^0$  表示属性细化的集等于自身的  $M_{C_2}$  中的属性的集,用  $M_{C_2}^1$  表示属性细化的集发生改变的  $M_{C_2}$  中的属性的集。例如,在表 3 中,  $M_{C_2}^0 = \{L,R,H\}$ ,  $M_{C_2}^1 = \{G\}$ 。

**定理 2** 若  $C_1 \leq C_2$ , 则  $EXT(B(G, M_{C_1}, I_{C_1})) = EXT(B(G, M_{C_2}, I_{C_2}))$  当且仅当  $M_{C_2}^0 \neq \emptyset$ , 且对于任一  $y \in M_{C_2}^0$ , 存在  $Z \subseteq M_{C_2}$ , 使得  $y_i^\downarrow = \bigcup_{z \in Z} z^\downarrow$  ( $i=1, \dots, p$ )。这里  $\{y_1, \dots, y_p\}$  是  $y$  在  $M_{C_1}$  的属性细化的集。

证明:“ $\Rightarrow$ ”假设  $M_{C_2}^0 = \emptyset$ , 考虑集族  $Z = \{z^\downarrow \mid \exists y \in C_2, z$  是  $y$  在  $M_{C_1}$  中的细化属性}, 用  $Z^{\min}$  表示  $Z$  中的极小元, 设  $Z^{\min} = \{z_i^\downarrow \mid i=1, \dots, m\}$ 。对于任意  $z_i^\downarrow \in Z^{\min}$ , 容易证明  $z_i^\downarrow \in EXT(B(G, M_{C_1}, I_{C_1}))$ , 然而, 对于任意  $y \in M_{C_2}, y^\downarrow \not\subseteq z_i^\downarrow$ , 因此,  $z_i^\downarrow$  不可能属于  $EXT(B(G, M_{C_2}, I_{C_2}))$ 。这与前提条件

$EXT(B(G, M_{C_1}, I_{C_1})) = EXT(B(G, M_{C_2}, I_{C_2}))$  是相悖的。

任取  $y \in M_{C_2}^0, \{y_1, \dots, y_p\}$  是  $y$  在  $M_{C_1}$  中的细化属性的集, 不难验证  $y_i^\downarrow \in EXT(B(G, M_{C_1}, I_{C_1}))$ , 结合  $EXT(B(G, M_{C_1}, I_{C_1})) = EXT(B(G, M_{C_2}, I_{C_2}))$  可知  $y_i^\downarrow \in EXT(B(G, M_{C_2}, I_{C_2}))$ , 则根据定义 2 可知  $Z \subseteq M_{C_2}$ , 使得  $y_i^\downarrow = \bigcup_{z \in Z} z^\downarrow$  ( $i=1, \dots, p$ )。

“ $\Leftarrow$ ”由定理 1 可知,  $EXT(B(G, M_{C_2}, I_{C_2})) \subseteq EXT(B(G, M_{C_1}, I_{C_1}))$ 。相反, 任取  $X \in EXT(B(G, M_{C_1}, I_{C_1}))$ , 根据面向对象概念的定义(即定义 2)可知存在  $Z \subseteq M_{C_1}$ , 使得  $X = \bigcup_{z \in Z} z^\downarrow$ 。此外, 由已知条件可知, 对于任意  $z \in Z$ , 存在  $Y \subseteq M_{C_2}$  使得  $y^\downarrow = \bigcup_{y \in Y} y^\downarrow$ , 因此, 对于  $X$  而言, 存在  $M_{C_2}$  中的子集  $H$  使得  $X = \bigcup_{s \in H} s^\downarrow$ , 故  $X \in EXT(B(G, M_{C_2}, I_{C_2}))$ , 得证。

**结束语** 本文在多粒度形式背景下, 基于属性粒化的思想, 引入了面向对象概念格。研究了在不同粒度下, 面向对象概念格之间的关系, 给出了在不同粒度下面面向对象概念格外延集相等的充分必要条件。

本文只是在多粒度背景下将形式概念分析与粗糙集理论相结合的一个初步探索。基于本文结果可进一步探究多粒度面向对象概念格的算法实现以及面向属性的多粒度概念格等。

参 考 文 献

[1] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis: mathematical foundations[M]. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] KUZNETSOV S O. Mathematical aspects of concept analysis [J]. Journal of Mathematical Sciences, 1996, 80(2): 1654-1698.

[3] GANTER B. Attribute exploration with background knowledge [J]. Theoretical Computer Science, 1999, 217(2): 215-233.

[4] GODIN R, MISSAOUI R, ALAOUI H. Incremental concept formation algorithms based on Galois (concept) lattices[J]. Computational Intelligence, 1995, 11(2): 246-267.

[5] CARPINETO C, ROMANO G. A lattice conceptual clustering system and its application to browsing retrieval[J]. Machine Learning, 1996, 24(2): 95-122.

[6] ZOU L, ZHANG Z, LONG J. A fast incremental algorithm for constructing concept lattices[J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(9): 4474-4481.

[7] ZHI H L, ZHI D J, LIU Z T. The principle of concept lattice combination and its algorithm[J]. Journal of Electronics, 2010, 38(2): 455-459. (in Chinese)

智慧来, 智东杰, 刘宗田. 概念格合并原理与算法[J]. 电子学报, 2010, 38(2): 455-459.

[8] LIU Z T, QIANG Y, ZHOU W, et al. A fuzzy concept lattice model and its gradual construction algorithm [J]. Journal of Computer Science, 2007, 30(2): 184-188. (in Chinese)

刘宗田, 强宇, 周文, 等. 一种模糊概念格模型及其渐进式构造算法[J]. 计算机学报, 2007, 30(2): 184-188.

[9] BELOHLAVEK R, DE BAETS B, KONECNY J. Granularity of attributes in formal concept analysis[J]. Information Sciences, 2014, 260(1): 149-170.

[10] KANG X, LI D, WANG S, et al. Formal concept analysis based on fuzzy granularity base for different granulations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 203(21): 33-48.

- 2016,39(1):1-15.
- [2] LIANG J Y, QIAN Y H, LI D Y, et al. Research development on granular computing theory and method for big data[J]. *Big Data Research*, 2016, 38(2):13-22. (in Chinese)  
梁吉业, 钱宇华, 李德玉, 等. 面向大数据的粒计算理论与方法研究进展[J]. *大数据*, 2016, 38(2):13-22.
- [3] XU J, WANG G Y, YU H. Review of Big Data Processing Based on Granular computing [J]. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8):1497-1507. (in Chinese)  
徐计, 王国胤, 于洪. 基于粒计算的大数据处理[J]. *计算机学报*, 2015, 38(8):1497-1507.
- [4] ZHANG Q H, ZHOU Y L, TENG H T. Cognition model based on granular computing[J]. *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications(Natural Science Edition)*, 2009, 21(4):494-501. (in Chinese)  
张清华, 周玉兰, 滕海涛. 基于粒计算的认知模型[J]. *重庆邮电大学学报(自然科学版)*, 2009, 21(4):494-501.
- [5] LIANG J Y, QIAN Y H, LI D Y, et al. Granular Data Calculation Theory and Method for Big Data Mining[J]. *China Science (Information Science)*, 2015, 45(11):1355-1369. (in Chinese)  
梁吉业, 钱宇华, 李德玉, 等. 大数据挖掘的粒计算理论与方法[J]. *中国科学(信息科学)*, 2015, 45(11):1355-1369.
- [6] ZHOU D C. A method for ascertaining the weight of attributes based on granular computing[J]. *Journal of Intelligent Systems*, 2015, 10(2):273-279. (in Chinese)  
周丹晨. 采用粒计算的属性权重确定方法[J]. *智能系统学报*, 2015, 10(2):273-279.
- [7] LIU Q, QIU T R, LIU L. The Research of Granular computing Based on Nonstandard Analysis[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8):1618-1624. (in Chinese)  
刘清, 邱桃荣, 刘澜. 基于非标准分析的粒计算研究[J]. *计算机学报*, 2015, 38(8):1618-1624.
- [8] FU Y L, HONG Y. Air Quality Forecasting Based on IPSO-ELM [J]. *Environmental Science and Technology*, 2017, 40(S1):324-328. (in Chinese)  
付亚丽, 洪亚. 基于 IPSO-ELM 算法的空气质量预测[J]. *环境科学与技术*, 2017, 40(S1):324-328.
- [9] 张铃, 张钊. 问题求解理论与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2007.
- [10] MIAO D Q, XU F F, YAO Y Y, et al. Set-theoretic formulation of granular computing[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2012, 35(2):351-363. (in Chinese)  
苗夺谦, 徐菲菲, 姚一豫, 等. 粒计算的集合论描述[J]. *计算机学报*, 2012, 35(2):351-363.
- [11] SANCHEZ M A, CASTILLO O, CASTRO J R. An Overview of Granular Computing Using Fuzzy Logic Systems[M]// *Nature-Inspired Design of Hybrid Intelligent Systems*. Springer International Publishing, 2017, 667:19-38.
- [12] XIE K M, LU X H, CHEN Z H. Basic Problem and Research of Granular computing [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2007, 43(16):41-44. (in Chinese)  
谢克明, 遂新红, 陈泽华. 粒计算的基本问题和研究[J]. *计算机工程与应用*, 2007, 43(16):41-44.
- [13] WANG C Z, HE Q, SHAO M W, et al. A unified information measure for general binary relations[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2017, 135:18-28.
- [14] 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社, 2001.
- [15] HSU C H. Intelligent big data processing[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2014, 36(3):16-18.
- [16] TANG C H, SHU L. An Improved Attribute Reduction Algorithm based on Granular Computing[J]. *International Journal of Computers Communications and Control*, 2015, 10(6):96.
- [17] 杨纶标, 高英仪. 模糊数学原理及应用[M]. 广州:华南理工大学出版社, 2008:66-77.
- [18] TANG X Q, ZHU P, CHENG J X. Cluster analysis based on fuzzy quotient space[J]. *Journal of Software*, 2008, 19(4):861-868.
- [19] VALDÉS J J. Extreme learning machines with heterogeneous data types[J]. *Neurocomputing*, 2018, 277:38-52.
- [20] HUANG G B, ZHU Q Y, SIEW C K. Extreme learning machine: Theory and applications[J]. *Neurocomputing*, 2005, 70(1):489-501.
- [21] HUANG G B, ZHU Q Y, SIEW C K. Extreme learning machine: theory and applications [J]. *Neurocomputing*, 2006, 70(1):489-501.
- [22] ZHANG H X. Research on Extreme Learning Machine Theory and Algorithms[D]. Shenyang:Shenyang Aerospace University, 2017. (in Chinese)  
张海霞. 极限学习机理论与算法研究[D]. 沈阳:沈阳航空航天大学, 2017.
- [23] GAN L. Research and Application of Extreme Learning Machine [D]. Xi'an:Xi'an University of Electronic Science and Technology, 2014. (in Chinese)  
甘露. 极限学习机的研究与应用[D]. 西安:西安电子科技大学, 2014.

(上接第 53 页)

- [11] LI J H, WU W Z. Granular computing approach for formal concept analysis and its research outlooks [J]. *Journal of Shandong University(Natural Science)*, 2017, 52(7):1-12. (in Chinese)  
李金海, 吴伟志. 形式概念分析的粒计算方法及其研究展望[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2017, 52(7):1-12.
- [12] XU W, LI W. Granular computing approach to two-way learning based on formal concept analysis in fuzzy datasets [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(2):366-379.
- [13] LI J, MEI C, XU W, et al. Concept learning via granular computing: a cognitive viewpoint [J]. *Information Sciences*, 2015, 298(1):447-467.
- [14] LOIA V, ORCIUOLIF, PEDRYCZ W. Towards a granular computing approach based on Formal Concept Analysis for discovering periodicities in data[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 146:1-11.
- [15] YAO Y Y. Concept lattices in rough set theory[C]// *Fuzzy Information IEEE Annual Meeting*. IEEE, 2004, 2:796-801.