第 45 卷 第 10 期
2018 年 10 月
计 算 机 科 学
COMPUTER SCIENCE
Vol. 45 No. 10
Oct. 2018

广义优势多粒度直觉模糊粗糙集的属性约简

梁美社[1,2] 米据生[1] 冯 涛[3]

(河北师范大学数学与信息科学学院 石家庄 050024)[1]

(石家庄职业技术学院科技发展与校企合作部 石家庄 050081)[2] (河北科技大学理学院 石家庄 050018)[3]

摘 要 证据理论和多粒度粗糙集模型的结合已成为知识挖掘中的热点研究之一,其建立的模型已被应用于不完备、覆盖、模糊等信息系统,但在直觉模糊决策信息系统中还未见相关讨论。首先,在直觉模糊决策信息系统中利用三角模和三角余模定义了 3 种优势关系,得到了 3 种优势类,并构造了广义优势关系多粒度直觉模糊粗糙集模型;其次,基于证据理论,讨论了广义多粒度直觉模糊粗糙集的信任结构;然后,通过定义粒度重要性和属性重要性给出了属性约简方法;最后,通过实例说明了该模型在处理直觉模糊决策信息系统时是有效的。

关键词 多粒度,粗糙集,三角模,优势关系,直觉模糊集合,证据理论

中图法分类号 TP391 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.10.011

Generalized Dominance-based Attribute Reduction for Multigranulation Intuitionistic Fuzzy Rough Set

LIANG Mei-she[1,2] MI Ju-sheng[1] FENG Tao[3]

(College of Mathematics and Information Science,Hebei Normal University,Shijiazhuang 050024,China)[1]

(Department of Science,Technology and School-Business Cooperation,Shijiazhuang University of Applied Technology,Shijiazhuang 050081,China)[2]

(College of Science,Hebei University of Science & Technology,Shijiazhuang 050018,China)[3]

Abstract The combination of the evidence theory and multigranulation rough set model has become one of the hot issues,and the established models have been applied to various information systems,such as incomplete information system,coverage information system and fuzzy information system. However,intuitionistic fuzzy information system has not been investigated yet. Firstly,three kinds of dominance relations and three kinds of dominance classes were defined by using triangular norms and triangular conorms in intuitionistic fuzzy decision information system. Secondly,generalized dominance-based multigranulation intuitionistic fuzzy rough set model was proposed,and the belief structure of this model was discussed under evidence theory. After that,attribute reduction was acquired by the importance of granularity and attribute. Finally,an example was used to illustrate the effectiveness of the model.

Keywords Multigranulation,Rough set,Triangular norm,Dominance relation,Intuitionistic fuzzy set,Evidence theory

随着人工智能的发展和大数据时代的来临,各个行业都涌现出海量的、复杂的数据,这些数据的描述框架都可以归结为信息系统。为了深入研究信息系统的不确定性,许多学者根据现实需要,提出了模糊集、直觉模糊集、粗糙集、证据理论等一系列理论。这些理论从不同角度出发,在知识发现过程中都发挥了重要的作用。将这些理论有机结合,有助于深入挖掘隐含信息,使得数据系统中的知识表示更加精确。

经典的粗糙集理论[1-2]由 Pawlak 于 1982 年提出,其主要是利用等价关系来处理单个粒空间上的目标近似逼近理论。考虑到属性之间的关系可能是相互独立的,钱宇华等[3-6]提出了多粒度粗糙集的概念。此后,多粒度粗糙集的相关研究受到了国内外学者的广泛关注[7-13]。考虑到描述对象的属性常常具有偏好关系这一问题,Greco 等[14-15]提出了优势关系粗糙集模型,随后该方法被引入到模糊信息系统中,并有效地解决了多准则决策分析、风险评估、地震数据挖掘等领域问题[16-18]。

作为模糊集[19]的一种重要推广,直觉模糊集[20-22]同时考虑了元素的隶属度、非隶属度和犹豫度 3 个方面的信息,因此在表达和处理模糊性、不确定性等问题时更具灵活性和实用性。近年来将直觉模糊集理论与粗糙集理论相结合的研究受到了广泛关注。

Dempster-Shafer 证据理论(简称证据理论)作为贝叶斯理论的一般推广,由于不需要先验概率和条件概率密度,在处理不确定、不完备,甚至是模糊信息时具有很强的优势[23]。

到稿日期:2018-04-17 返修日期:2018-05-16 本文受国家自然科学基金(61573127,61300121,61502144),河北省自然科学基金(A2014205157),河北省高校创新团队领军人才培育计划项目(LJRC022),河北师范大学研究生创新项目基金(CXZZSS2017046)资助。

梁美社(1986-),男,博士生,讲师,主要研究方向为粗糙集、粒计算,E-mail:liangmeishe@163.com;**米据生**(1966-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为粗糙集、概念格、人工智能;**冯 涛**(1980-),女,博士,副教授,硕士生导师,主要研究方向为粗糙集、概念格、人工智能。

信任结构是证据理论中最基本的结构。当前，证据理论已成为模式识别、图像分析与诊断、知识发现、信息融合和决策的强大理论[24-25]。

近年来，许多学者将证据理论引入到粗糙集模型中，其研究成果已成为信息系统中知识发现的有效手段。Tan 等[26]将证据理论与不完备信息系统相结合，利用信任函数和似然函数刻画了悲观多粒度粗糙集的数值属性，并给出了属性约简算法，然而在乐观情况下，只有满足严格的条件才能给出信任函数和似然函数。Chen 等[27]利用概率测度建立了覆盖粗糙集与证据理论之间的联系。Che 等[28]在以上研究的基础上，结合极大描述和极小描述，给出了悲观多粒度覆盖粗糙集中的数值属性。胡谦等[29]构建了基于模糊相似关系下的多粒度模糊粗糙集模型，并建立了模糊信任结构，在该信任结构下根据多粒度模糊粗糙集的上、下近似构造信任函数与似然函数。

以往研究中关于优势多粒度直觉模糊粗糙集与证据理论相结合的研究并不多见。为了进一步提高多粒度粗糙集模型的实用性，本文首先基于三角模算子定义了 3 种优势关系，并在此基础上构建了广义多粒度直觉模糊粗糙集模型，然后基于证据理论给出了广义多粒度直觉模糊粗糙集的信任结构，最后给出了属性约简方法。

1　预备知识

1.1　直觉模糊信息系统

定义 1[19-21]　设 U 是非空集合，称 $A=\{\langle\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle: x\in U\}$ 为直觉模糊集，其中 $\mu_A(x),\nu_A(x)\in[0,1]$ 分别为 U 中元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度，且对于 $\forall x\in U$，满足关系式 $0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1$。称 $1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ 为 x 属于 A 的犹豫度或不确定度。用 $IFS(U)$ 表示 U 上的全体直觉模糊子集。

$\alpha=\langle u_\alpha,v_\alpha\rangle$ 为一个直觉模糊数，全体直觉模糊数集合记为 IFN，其得分函数 $s(\alpha)=u_\alpha-v_\alpha$，精确函数为 $h(\alpha)=u_\alpha+v_\alpha$。利用得分函数和精确函数可以给出比较两个直觉模糊数大小的方法。

定义 2[30]　对于 $\forall\alpha_1,\alpha_2\in INF$，如果 $s(\alpha_1)<s(\alpha_2)$，则$\alpha_1<\alpha_2$；如果 $s(\alpha_1)=s(\alpha_2)$ 且 $h(\alpha_1)<h(\alpha_2)$，则 $\alpha_1<\alpha_2$；若$h(\alpha_1)=h(\alpha_2)$，则 $\alpha_1=\alpha_2$。

定义 3[19-21]　称$(U,AT\cup\{d\},R)$为一个直觉模糊决策信息系统（Intuitionistic Fuzzy Decision Systems，IFDS），$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为对象集，$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 为条件属性集，d 为决策属性，R 为 U 到 $AT\cup\{d\}$ 的直觉模糊二元关系，即 $R=\{\langle\mu_a(x),\nu_a(x)\rangle:(x,a)\in U\times AT\cup\{d\}\}$。其中 μ_a,ν_a：$U\times AT\cup\{d\}\to[0,1]$，且满足 $\forall(x,a)\in U\times AT\cup\{d\}$，$0\leqslant\mu_a(x)+\nu_a(x)\leqslant 1$。本文中记 $U\times AT\cup\{d\}$ 上的直觉模糊关系全体为 $IFR(U\times AT\cup\{d\})$。

1.2　三角模

定义 4[31]　若映射 $N:[0,1]\to[0,1]$，$\forall a,b\in[0,1]$满足以下条件：1）$N(0)=1,N(1)=0$（边界性）；2）$a\leqslant b$，则$N(a)\geqslant N(b)$（单调性）。则称映射 N 为模糊补映射（或模糊负算子）。

若$\forall a\in[0,1]$均有 $N(a)=1-a$ 成立，则称 N 为标准模糊补算子，记为 N_s。

定义 5[32]　若映射 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，$\forall a,b,c\in[0,1]$，满足以下条件：1）$T(a,1)=a$（边界性）；2）若 $b\leqslant c$，则 $T(a,b)\leqslant T(a,c)$（单调性）；3）$T(a,b)=T(b,a)$（交换性）；4）$T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c)$（结合性）。则称 T 为三角模（简称 t-模）。

定义 6[32]　若映射 $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，$\forall a,b,c\in[0,1]$满足以下条件：1）$S(a,0)=a$（边界性）；2）若 $b\leqslant c$，则 $S(a,b)\leqslant S(a,c)$（单调性）；3）$S(a,b)=S(b,a)$（交换性）；4）$S(a,S(b,c))=S(S(a,b),c)$（结合性）。则称 S 为三角模余模（简称 t-余模）。

若$\forall a,b\in[0,1]$，$N(T(a,b))=S_T(N(a),N(b))$或$N(S_T(a,b))=T(N(a),N(b))$，则称(T,S_T,N)为对偶三元组。常见的对偶三元组有：Lukasiewicz：$(\max(0,a+b-1),\min(1,a+b),N_S)$，min－max：$(\min(a,b),\max(a,b),N_S)$，product-sum：$(ab,a+b-1,N_S)$。

1.3　证据理论

定义 7[23]　设 Θ 为识别框架，若集函数 $m:2^\Theta\to[0,1]$满足下列条件：1）$m(\varnothing)=0$；2）$\sum\limits_{A\in\Theta}m(A)=1$。则称集函数 m：$2^\Theta\to[0,1]$为一个基本概率指派函数或 Mass 函数。

定义 8[22]　设 Θ 为识别框架，集函数 $m:2^\Theta\to[0,1]$为框架 Θ 上的基本概率指派函数或 Mass 函数。$\forall X\subseteq\Theta$，称由 $Bel(X)=\sum\limits_{Y\subseteq X}m(Y)$定义的函数为 Θ 上的信任函数；$Pl(X)=\sum\limits_{Y\cap X\neq\varnothing}m(Y)$定义的函数为 Θ 上的似然函数。X 的信任区间为 $Bl(X)=[Bel(X),Pl(X)]$。

2　多粒度直觉模糊粗糙集

2.1　直觉模糊信息系统中的广义优势关系

以往的研究通过比较得分函数和精度来对一组直觉模糊数进行排序，下面利用三角模算子来重新定义模糊数的大小。

定义 9[33]　设(U,AT,R)为一个直觉模糊信息系统，$B\subseteq A$，称 $R^{\leqslant}_{\cdot,B}=\{(x,y)\in U\times U:\cdot_a(x)\leqslant\cdot_a(y),\forall a\in B\}$为直觉模糊信息系统中属性子集 B 的 $\cdot$ 优势关系，$\cdot\in\{T,S,AV\}$。其中，$T_a(x)=T(u_a(x),N(v_a(x)))$；$S_a(x)=S(u_a(x),N(v_a(x)))$；$AV_a(x)=\frac{1}{2}(T(u_a(x),N(v_a(x)))+S_T(u_a(x),N(v_a(x))))$。

分别称 $R^{\leqslant}_{T,B},R^{\leqslant}_{S,B},R^{\leqslant}_{AV,B}$为属性子集 B 上的强优势关系、弱优势关系和平均优势关系。根据以上 3 种优势关系，可以得到相应的 3 种优势类。

定义 10[33]　设(U,AT,R)为一个直觉模糊信息系统，$B\subseteq A$，称$[x]^{\leqslant}_{\cdot,B}$为对象 x 的 $\cdot$ 优势类，其中$[x]^{\leqslant}_{\cdot,B}=\{y\in U:(x,y)\in R^{\leqslant}_{\cdot,B}\}$。

称$[x]^{\leqslant}_{T,B},[x]^{\leqslant}_{S,B},[x]^{\leqslant}_{AV,B}$为对象 x 关于属性子集 B 的强优势类、弱优势类和平均优势类。

例 1　假设一场选举中有 6 个候选人$\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$，一名投票者 B 对 6 位候选人的支持意向分别表示为：$\langle 0.8,0.1\rangle$，$\langle 0.4,0.2\rangle$，$\langle 0.5,0.3\rangle$，$\langle 0.5,0.4\rangle$，$\langle 0.6,0.4\rangle$，$\langle 0.4,0.1\rangle$，利用定义 2 以及由 min-max 对偶三元组确定的 3 种优势关系，对 6 位候选人排序如下：1）$x_4\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_5\leqslant x_6\leqslant$

x_1；2）$x_2=x_6\leqslant x_4=x_3\leqslant x_5\leqslant x_1$；3）$x_4=x_5\leqslant x_3\leqslant x_2\leqslant x_6=x_1$；4）$x_4\leqslant x_2=x_3=x_5\leqslant x_6\leqslant x_1$。

结果显示：$[x]^{\leqslant}_{B}$ 过多关注支持与反对的绝对差，$[x]_{T,B}$ 侧重于表达相对于属性子集 B 支持程度绝对高于 x 的对象集合，$[x]_{S,B}$ 侧重于表达相对于属性子集 B 支持程度可能高于 x 的对象集合，$[x]^{\leqslant}_{AV,B}$ 则侧重于表达相对于属性子集 B 支持程度平均高于 x 的对象集合。若 $\forall(x,a)\in U\times A$，都有 $u_a(x)+v_a(x)=1$，则 $[x]^{\leqslant}_{B}=[x]^{\leqslant}_{T,B}=[x]^{\leqslant}_{S,B}=[x]^{\leqslant}_{AV,B}$ 均为普通模糊信息系统中的优势类。从语义上看，$[x]^{\leqslant}_{T,B}$，$[x]^{\leqslant}_{S,B}$，$[x]^{\leqslant}_{AV,B}$ 分别表现出排序者谨慎、冒险以及中性的决策偏好。

2.2 广义多粒度优势直觉模糊粗糙集

根据文献[3-6]中提出的多粒度粗糙集的思想，下面给出广义优势关系下的多粒度直觉模糊粗糙集（MGDIFRS）的定义。

定义 11 设 (U,AT,R) 为一个直觉模糊信息系统，其中 $U=\{x_1,\cdots,x_m\}$，$A=\{A_1,\cdots,A_n\}$，$A_i\subseteq AT(i=1,2,\cdots n)$，$[x]^{\leqslant}_{\cdot,A_i}$ 是由 $R^{\leqslant}_{\cdot,A_i}$ 诱导产生的优势关系类。对于 $\forall X\subseteq U$，X 在该优势关系下的乐观多粒度下、上近似集合分别为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{\cdot,A_i}}(X)=\{x\in U:[x]^{\leqslant}_{\cdot,A_1}\subseteq X\vee[x]^{\leqslant}_{\cdot,A_2}\subseteq X\vee\cdots\vee[x]^{\leqslant}_{\cdot,A_n}\subseteq X\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{\cdot,A_i}}(X)=\sim\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{\cdot,A_i}}(\sim X)$$

其中，$\sim X$ 表示集合 X 的补集。

序对 $\left(\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{\cdot,A_i}}(X),\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{\cdot,A_i}}(X)\right)$ 称为广义优势关系下 X 的乐观多粒度直觉模糊粗糙集。

定义 12 设 (U,AT,R) 为一个直觉模糊信息系统，其中 $U=\{x_1,\cdots,x_m\}$，$A=\{A_1,\cdots,A_n\}$，$A_i\subseteq AT(i=1,2,\cdots n)$，$[x]^{\leqslant}_{\cdot,A_i}$ 是由 $R^{\leqslant}_{\cdot,A_i}$ 诱导产生的优势关系类。对于 $\forall X\subseteq U$，X 在该优势关系下的悲观多粒度下、上近似集合分别为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(X)=\{x\in U:[x]^{\leqslant}_{\cdot,A_1}\subseteq X\wedge[x]^{\leqslant}_{\cdot,A_2}\subseteq X\wedge\cdots\wedge[x]^{\leqslant}_{\cdot,A_n}\subseteq X\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(X)=\sim\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(\sim X)$$

其中，$\sim X$ 表示集合 X 的补集。

序对 $\left(\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(X),\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(X)\right)$ 称为优势关系下的悲观多粒度直觉模糊粗糙集。

上述定义的乐观多粒度下近似要求至少有一个粒度满足优势关系，而悲观多粒度下近似则要求在所有粒度空间中满足一致的优势关系。多粒度上近似均由下近似的补集定义得到。

性质 1 设 (U,AT,R) 为直觉模糊信息系统，其中 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$A_i\subseteq AT(i=1,2,\cdots n)$，若 $X\subseteq U$，则：

1）$\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{T,A_i}}(X)\subseteq X\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{T,A_i}}(X)$，$\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{T,A_i}}(X)\subseteq X\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{T,A_i}}(X)$；

2）$\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{T,A_i}}(X)=\bigcup_{i=1}^{n}\underline{R^{\leqslant O}_{T,A_i}}(X)$，$\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{T,A_i}}(X)=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{R^{\leqslant O}_{T,A_i}}(X)$；

3）$\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{T,A_i}}(X)=\bigcap_{i=1}^{n}\underline{R^{\leqslant P}_{T,A_i}}(X)$，$\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{T,A_i}}(X)=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{R^{\leqslant P}_{T,A_i}}(X)$；

4）$\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{T,A_i}}\left(\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{T,A_i}}(X)\right)=\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{T,A_i}}(X)$，$\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{T,A_i}}\left(\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{T,A_i}}(X)\right)=\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant O}_{T,A_i}}(X)$；

5）$\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{T,A_i}}\left(\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{T,A_i}}(X)\right)=\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{T,A_i}}(X)$，$\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{T,A_i}}\left(\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{T,A_i}}(X)\right)=\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{T,A_i}}(X)$。

证明：可根据定义 11 和定义 12，仿照经典多粒度粗糙集模型的证明方法来简单证明。

3 MGDIFRS 与证据理论

文献[26]指出，悲观多粒度粗糙集的上、下近似可以由一组信任函数和似然函数来刻画，而乐观多粒度粗糙集需要满足严格的条件才可以。因此，本节内容主要是在悲观多粒度的情况下进行讨论的。

本节主要考虑证据理论与广义优势多粒度直觉模糊粗糙集之间的关系。

为了方便讨论，首先假设 U 为有限论域，P 是论域 U 上的平均概率分布函数，即 $\forall X\subseteq U$，$P(X)=\frac{|X|}{|U|}$，其中 $|X|$ 表示集合 X 的基数。

定义 13 设 (U,AT,R) 为直觉模糊信息系统，其中 U 为有限论域，$\forall x\in U$，称 $D_A(x)=\bigcup\{[x]^{\cdot\leqslant}_{A_i}:i=1,2,\cdots,n\}$ 为集合 AT 的多重优势类，其中 $[x]^{\cdot\leqslant}_{A_i}$ 为对象 x 在属性集合 A_i 下关于 · 的优势类。

在悲观广义优势多粒度直觉模糊粗糙集中，$\forall X\subseteq U$，如果 $\forall i=1,2,\cdots,n$，均有 $[x]^{\cdot\leqslant}_{A_i}\subseteq X$，则 $D_A(x)\subseteq X$ 且 $x\in\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(X)$，同样地，若 $\forall i=1,2,\cdots,m$，有 $[x]^{\cdot\leqslant}_{A_i}\cap X\neq\emptyset$，则有 $D_A(x)\cap X\neq\emptyset$ 且 $x\in\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(X)$。由此可知，$D_A(x)$ 的全体构成了 U 上的一个有限覆盖。

定理 1 设 (U,AT,R) 为直觉模糊信息系统，其中 U 为有限论域，$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$A_i\subseteq AT(i\leqslant n)$，若 $B=\{B_i:B_i\subseteq A_i\}$，则 $\forall x\in U$，$D_A(x)\subseteq D_B(x)$。

证明：由定义 13 可直接证明。

定理 2 设 (U,AT,R) 为直觉模糊信息系统，其中 U 为有限论域，$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$A_i\subseteq AT(i\leqslant n)$，$\forall X\subseteq U$，定义映射 $\varphi_A:2^U\rightarrow 2^U$，$\varphi_A(X)=\{x\in U:D_A(x)=X\}$，则 $\{\varphi_A(X):X\subseteq U,\varphi_A(X)\neq\emptyset\}$ 是 U 上的一个划分。

证明：首先证明 $\forall X_1,X_2\subseteq U$，若 $X_1\neq X_2$，则有 $\varphi_A(X_1)\cap\varphi_A(X_2)=\emptyset$。这里利用反证法证明。假设 $\exists x\in U$，使 $x\in\varphi_A(X_1)\cap\varphi_A(X_2)$，则根据题设，有 $D_A(x)=X_1=X_2$，这与 $X_1\neq X_2$ 矛盾。因此，若 $X_1\cap X_2\neq\emptyset$，一定有 $\varphi_A(X_1)\cap\varphi_A(X_2)=\emptyset$。

其次证明 $\bigcup\limits_{X\subseteq U}\varphi_A(X)=U$ 成立。$\forall x\in U$，均有 $x\in\varphi_A(D_A(x))$ 和 $D_A(x)\neq\emptyset$，则 $U\supseteq\bigcup\limits_{X\subseteq U}\varphi_A(X)\supseteq\bigcup\limits_{x\in U}\varphi_A(D_A(x))\supseteq U$，从而 $\bigcup\limits_{X\subseteq U}\varphi_A(X)=U$ 成立。

定理 3　设 (U,AT,R) 为直觉模糊信息系统，其中 U 为有限论域，$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$A_i\subseteq AT(i\leqslant n)$，$\forall X\subseteq U$，定义 $m:2^U\to[0,1]$ 如下：

$$m_A(X)=P(\varphi_A(X))$$

则 U 上的信任函数和似然函数分别为：

$$Bel_A(X)=P(\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(X))$$

$$Pl_A(X)=P(\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(X))$$

证明：由定理 1 可知，$m(\emptyset)=P(\emptyset)=0$，且 $\bigcup\limits_{X\subseteq U}f._A(X)=U$，则：

$$\sum_{X\subseteq U}m_A(X)=\sum_{X\subseteq U}P(\varphi_A(X))=\frac{\sum_{X\subseteq U}|\varphi_A(X)|}{|U|}$$

$$=\frac{|\sum_{X\subseteq U}\varphi_A(X)|}{|U|}=\frac{|U|}{|U|}=1$$

因此，$m_A(X)=P(\varphi_A(X))$ 为 U 上的基本概率指派函数。

下面证明 $Bel_A(X)=P(\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(X))$。根据定义，有：

$$Bel_A(X)=\sum_{X'\subseteq X}m_A(X')=\sum_{X'\subseteq X}P(\varphi_A(X'))$$

$$=\frac{\sum_{X'\subseteq X}|\varphi_A(X')|}{|U|}=\frac{|\sum_{X'\subseteq X}\varphi_A(X')|}{|U|}$$

$$=\frac{|\sum_{X'\subseteq X}\{x\in U:D_A(x)=X'\}|}{|U|}$$

$$=\frac{|\sum_{X'\subseteq X}\{x\in U:D_A(x)\subseteq X\}|}{|U|}$$

根据定义可知：

$$Bel_A(X)=\frac{|\sum_{X'\subseteq X}\{x\in U:D_A(x)\subseteq X\}|}{|U|}=P(\underline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(X))$$

同理可证 $Pl_A(X)=P(\overline{\sum_{i=1}^{n}R^{\leqslant P}_{\cdot,A_i}}(X))$。

例 2　考虑房产买卖的问题。设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$ 为 6 所房产，$a_1,a_2,\cdots,a_7$ 分别表示公摊面积、户型、配套设施、学区情况、地理位置、物业服务、均价等评价指标，$A_1=\{a_1,a_2,a_3\}$，$A_2=\{a_4,a_5\}$，$A_3=\{a_6,a_7\}$ 分别表示 3 个评价者对房屋感兴趣的指标，d 为购买意向，其评价结果如表 1 所列。

表 1　房屋评价信息系统

Table 1　Information system of houses selling

U	A_1			A_2		A_3		d
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
x_1	⟨0.5,0.5⟩	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.8,0.2⟩	⟨0.3,0.5⟩	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.6,0.3⟩	⟨0.9,0.1⟩	⟨0.7,0.2⟩
x_2	⟨0.4,0.1⟩	⟨0.8,0.1⟩	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.4,0.5⟩	⟨0.7,0.1⟩	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.8,0.2⟩	⟨0.6,0.1⟩
x_3	⟨0.8,0.2⟩	⟨0.5,0.3⟩	⟨0.9,0.0⟩	⟨0.6,0.3⟩	⟨0.4,0.4⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.5,0.1⟩	⟨0.5,0.3⟩
x_4	⟨0.5,0.1⟩	⟨0.7,0.0⟩	⟨0.8,0.1⟩	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.7,0.1⟩
x_5	⟨0.5,0.4⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.7,0.0⟩	⟨0.5,0.3⟩	⟨0.5,0.0⟩	⟨0.6,0.0⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.8,0.1⟩
x_6	⟨0.4,0.4⟩	⟨0.7,0.0⟩	⟨0.7,0.1⟩	⟨0.7,0.2⟩	⟨0.6,0.1⟩	⟨0.7,0.1⟩	⟨0.6,0.3⟩	⟨0.8,0.2⟩

令 A_1,A_2,A_3 中的优势关系为强优势关系，其中 A_1 和 A_3 取 product 强优势关系，A_2 和 d 取 min-max 强优势关系。根据定义可知：$[x_1]^{\leqslant}_{T,d}=\{x_1,x_4,x_5,x_6\}$，$[x_2]^{\leqslant}_{T,d}=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$，$[x_3]^{\leqslant}_{T,d}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，$[x_4]^{\leqslant}_{T,d}=\{x_4,x_5,x_6\}$，$[x_5]^{\leqslant}_{T,d}=\{x_5\}$，$[x_6]^{\leqslant}_{T,d}=\{x_5,x_6\}$。

对象 x 关于 A 的多重优势类分别为：$D_A(x_1)=\{x_1,x_2,x_4\}$，$D_A(x_2)=\{x_2\}$，$D_A(x_3)=\{x_2,x_3,x_6\}$，$D_A(x_4)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$，$D_A(x_5)=\{x_4,x_5,x_6\}$，$D_A(x_6)=\{x_6\}$，根据定理 2 和定理 3，这些多重优势类的概率指派值均为 1/6，则：$Bel_A([x_1]^{\leqslant}_{T,d})=1/3$，$Bel_A([x_2]^{\leqslant}_{T,d})=5/6$，$Bel_A([x_3]^{\leqslant}_{T,d})=1$，$Bel_A([x_4]^{\leqslant}_{T,d})=1/3$，$Bel_A([x_5]^{\leqslant}_{T,d})=Bel_A([x_6]^{\leqslant}_{T,d})=0$；$Pl_A([x_1]^{\leqslant}_{T,d})=5/6$，$Pl_A([x_2]^{\leqslant}_{T,d})=1$，$Pl_A([x_3]^{\leqslant}_{T,d})=1$，$Bel_A([x_4]^{\leqslant}_{T,d})=5/6$，$Pl_A([x_5]^{\leqslant}_{T,d})=2/3$，$Pl_A([x_6]^{\leqslant}_{T,d})=1/3$。

4　MGDIFRS 的属性约简

本节将讨论广义悲观多粒度优势直觉模糊粗糙集的属性约简。在多粒度粗糙集属性约简的过程中，首先要考虑粒度的约简，其次还要考虑同一粒度中的属性约简。

定理 4　设 $(U,AT\cup\{d\},R)$ 为直觉模糊决策信息系统，$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$A_i\subseteq AT(i\leqslant n)$，$U$ 为有限论域，d 为决策属性，$\forall x\in U$，若 $B=\{B_i:B_i\subseteq A_i,i\leqslant n\}$，则 $Bel_A([x]^{\leqslant}_{\cdot,d})\leqslant Bel_B([x]^{\leqslant}_{\cdot,d})$。

证明：由定义 13 和定理 3 可直接证明。

保持信任函数不变，可以得到以下约简。

定义 14　设 $(U,AT\cup\{d\},R)$ 为直觉模糊决策信息系统，$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$A_i\subseteq AT(i\leqslant n)$，$U$ 为有限论域，d 为决策属性。$AT_0=\{A'_i:A'_i\subseteq A_i,i\leqslant n\}$，$AT_0$ 是一个悲观多粒度约简当且仅当 $\forall x\in U$，$Bel_A([x]^{\leqslant}_{\cdot,d})=Bel_{AT_0}([x]^{\leqslant}_{\cdot,d})$ 且对于任意 $AT'_0\subset AT_0$，$Bel_{AT_0}([x]^{\leqslant}_{\cdot,d})<Bel_{AT'_0}([x]^{\leqslant}_{\cdot,d})$。

定义 15　设 $(U,AT\cup\{d\},R)$ 为直觉模糊决策信息系统，$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$A_i\subseteq AT(i\leqslant n)$，$U$ 为有限论域，d 为决策属性。定义 A_j 关于 A 的重要度为：

$$sig(A_j,d)=\sum_{x\in U}(Bel_{A\setminus A_j}([x]^{\leqslant}_{\cdot,d})-Bel_A([x]^{\leqslant}_{\cdot,d}))$$

由上述定义可知，若 $sig(A_j,d)=0$，则说明第 j 个粒度对于整个评价决策系统不重要；同样地，若 $sig(A_j,d)$ 越大，则说明该粒度在整个决策系统中越重要，即在实际应用中越需要被重点考虑。

类似粒度约简，同一个粒度内也可以定义属性重要性。

定义 16　设 $(U,AT\cup\{d\},R)$ 为直觉模糊决策信息系统，$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$A_i\subseteq AT(i\leqslant n)$，$U$ 为有限论域，d 为决策属性。$a\in A_i$，定义 a 关于 A_i 的重要度为：

$$sig(a,A_i)=\frac{|\sum_{x\in U}([x]^{\leqslant}_{\cdot,A_i\setminus a}-[x]^{\leqslant}_{\cdot,A_i})|}{|U|^2}$$

依据以上定义，设计如下算法来计算广义悲观多粒度优

势直觉模糊粗糙集的属性约简，具体算法如算法1所示。

算法1 广义悲观多粒度优势直觉模糊粗糙集的属性约简

输入：$IFDS=(U,AT\cup\{d\},R)$，其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$AT=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$A_i\subseteq AT(i=1,2,\cdots,n)$，d 为决策属性。对于给定的 A_i 和 d 选取相应的优势类算子

输出：广义悲观多粒度优势直觉模糊粗糙集的属性约简 AT_0

Step1 对于每个 $x\in U$，计算 $[x]^{\leqslant}_{\cdot,d}$；

Step2 重新排列 $AT=\{A'_1,A'_2,\cdots,A'_n\}$，其中 $sig(A'_i,d)\geqslant sig(A'_{i+1},d)$；

Step3 令 $i\leftarrow 1,B=\emptyset$

Step4 如果 $\exists x\in U$ 使得 $Bel_B([x]^{\leqslant}_{\cdot,d})\neq Bel_A([x]^{\leqslant}_{\cdot,d})$，则 $B=B\cup A'_i,i\leftarrow i+1$；

Step5 计算 $|B|$ 以及 B 中的每个 $|A'_i|$；

Step6 $i=1:|B|$

重新排列 $A'_i=\{a'_{i,1},a'_{i,2},\cdots,a'_{i,|A'_i|}\}$，其中 $sig(a'_{i,j},A'_i)\geqslant sig(a'_{i,j+1},A')$；

令 $j\leftarrow 1,C_i=\emptyset$

如果 $\exists x\in U$，使得 $[x]^{\leqslant}_{\cdot,C_i}\neq[x]^{\leqslant}_{\cdot,A_i'}$，则 $C_i=C_i\cup\{a'_{i,j}\},j\leftarrow j+1$；

Step7 $AT_0=\bigcup_{i=1}^{|B|}C_i$.

Step1－Step4 是粒度的约简，Step5－Step6 是粒度内属性的约简。根据上述启发式算法进行模拟计算。

例3 分别计算例2中 A_1,A_2,A_3 的重要度，有：$sig(A_1,d)=1/3,sig(A_2,d)=1/6,sig(A_3,d)=0$，$A_3$ 为不必要粒度。

下面计算同一粒度内的约简，对于 A_1 而言，$sig(a_1,A_1)=0,sig(a_2,A_1)=7/36,sig(a_3,A_1)=1/36$，因此 $\{a_2,a_3\}$ 为粒度 A_1 的约简。对于 A_2 而言，$sig(a_4,A_2)=2/9,sig(a_5,A_2)=2/9$。对于 A_3 而言，$sig(a_6,A_3)=11/36,sig(a_7,A_3)=11/36$。综上所述，$AT_0=\{a_2,a_3\}\cup A_2$ 为该直觉模糊决策信息系统的悲观多粒度约简。

在上述约简中也可先进行粒度内部的约简，然后再进行粒度之间的约简。与以往的多粒度优势直觉模糊粗糙集模型相比，本模型的最大优点在于：首先，属性约简的过程中既考虑了粒度之间的约简，又考虑了粒度内的属性约简；其次，根据不同的需求可采用不同的优势关系，增强模型的实用性；最后，将证据理论应用于广义多粒度优势直觉模糊粗糙集模型中，进一步丰富了多粒度粗糙集模型。

结束语 本文首先将三角模算子引入到直觉模糊决策信息系统中，给出了3种优势关系，分析了这3种优势关系所表达的不同语义，在此基础上构造了广义多粒度优势直觉模糊粗糙集；其次结合证据理论，讨论了悲观多粒度优势直觉模糊集的上、下近似与信任函数和似然函数之间的关系；最后通过定义粒度重要性和粒度内属性重要性得到直觉模糊决策信息系统的属性约简。

后续我们将考虑把该方法应用于多属性群决策直觉模糊信息系统中，以获得待决策对象的排序，最终得到最优决策。

参考文献

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences，1982，11(5)：341-356.

[2] PAWLAK Z. Rough sets：some extensions[J]. Information Sciences，2007，177(1)：3-27.

[3] QIAN Y H，LIANG J Y. Rough set method based on multi-ganulations[C]∥Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Cognitive Informatics. Piscataway，2006：297-304.

[4] QIAN Y H，LIANG J Y，YAO Y Y，et al. MGRS：a multi-granulati on rough set[J]. Information Sciences，2010，180(6)：949-970.

[5] QIAN Y H，LIANG J Y，WEI W. Pessimistic rough decision[J]. Journal of Zhe Jiang Ocean University(Natural Science)，2010，29(5)：440-449.

[6] QIAN Y H，LIANG J Y，DANG C Y. Incomplete multi-granulation rough set[J]. IEEE transactions on Systems，Man and Cybernetics，Part A：systems and humans，2010，40(2)：420-431.

[7] XU W H，WANG Q R，ZHANG X T. Multi-granulation rough sets based on tolerance relations[J]. Soft Computing，2013，17(7)：1241-1252.

[8] XU W H，GUO Y T. Generalized multigranulation double-quantitative decision-theoretic rough set[J]. Knowledge-Based Systems，2016，105(1)：190-205.

[9] ZHANG M，XU W Y，YANG X B，et al. Incomplete variable multigranulation rough sets decision[J]. Applied Mathematics and Information Sciences，2014，8(3)：1159-1166.

[10] XU W H，SUN W X，ZHANG X Y，et al. Multiple granulation rough set approach to ordered information systems[J]. International Journal of General Systems，2012，41(5)：475-501.

[11] YANG X B，SONG X N，DOU H L，et al. Multi-granulation rough set：from crisp to fuzzy case[J]. Analysis of Fuzzy Mathematics and Informatics，2011，1(1)：55-70.

[12] LIN G P，QIAN Y H，LI J Y. NMGRS：neighbor-hood-based multi-granulation rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasonining，2012，53(7)：1080-1093.

[13] QIAN Y H，ZHANG H，SANG Y L，et al. Multi-granulation decision-theoretic rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2014，55(1)：225-237.

[14] GRECO S，MATARAZZO B，SLOWINSKI R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European Journal of Operational Research，2001，129(1)：1-47.

[15] GRECO S，MATARAZZO B，SLOWINSKI R. Fuzzy rough sets and multiple-premise gradual decision rules[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2006，41(2)：179-211.

[16] JIAN L R，TANG X W，LIU S F，et al. Process Evaluation of Construction Project Based on Dominance Rough Set Approach[J]. Journal of Systems & Management，2009，18(5)：577-582.

[17] HUANG B，HU Z J，ZHOU X Z. Dominance relation-based fuzzy-rough model and its application to audit risk evaluation[J]. Control and Decision，2009，24(6)：899-902.(in Chinese)
黄兵，胡作进，周献中. 优势模糊粗糙模型及其在审计风险评估中的应用[J]. 控制与决策，2009，24(6)：899-902.

[18] AN L，CHEN Z，TONG L. Generation and application of decision rules within Dominance-based Rough Set Approach to multicriteria sorting[J]. International Journal of Innovative Computing Information & Control Ijicic，2011，7(3)：1145-1155.

(下转第77页)

[19] FANG S H,LIN T. Principal Component Localization in Indoor WLAN Environments[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing,2011,11(1):100-110.
[20] ZHENG V W,XIANG E W,YANG Q,et al. Transferring localization models over time[C]// National Conference on Artificial Intelligence. AAAI Press,2008:1421-1426.
[21] SUN Z,CHEN Y,QI J,et al. Adaptive Localization through Transfer Learning in Indoor Wi-Fi Environment[C]// International Conference on Machine Learning and Applications. IEEE,2008:331-336.
[22] HAEBERLEN A,FLANNERY E,LADD A M,et al. Practical robust localization over large-scale 802. 11wireless networks[C]// ACM MOBICOM 2004,the 10th Annual International Conferences on Mobile Computing andNetworking. Philadelphia:ACM Press,2004:70-84.
[23] KJAERGAARD M B,MUNK C V. Hyperbolic location fingerprinting:A calibration-free solution for handling differences in signalstrength[C]// Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Pervasive Computing. Hong Kong:IEEE Press,2008:110-116.
[24] GU Y,JIANG X L,LIU J F,et al. Device adaptive wireless signal feature extraction and localization method[J]. Journal of Software,2014,25(Suppl. (2)):12-20. (in Chinese)
谷洋,蒋鑫龙,刘军发,等. 设备自适应的无线信号特征提取与定位方法[J]. 软件学报,2014,55(Suppl. (2)):12-20.
[25] TSUI A W,CHUANG Y H,CHU H H. Unsupervised Learning for Solving RSS Hardware Variance Problem in WiFi Localization[J]. Mobile Networks and Applications,2009,14(5):677-691.
[26] HUANG G B,ZHU Q Y,SIEW C K. Extreme learning machine:a new learning scheme of feedforward neural networks [C] // IEEE International Joint Conference on Neural Networks,2004. IEEE,2005:985-990.
[27] HUANG G B,ZHU Q Y,SIEW C K. Extreme learning machine: Theory and applications [J]. Neurocomputing,2006,70(1-3):489-501.
[28] HUANG G B,CHEN L,SIEW C K. Universal approximation using incremental constructive feedforward networks with random hidden nodes[J]. IEEE Transactions on Neural Networks,2006,17(4):879.
[29] HUANG G B,ZHOU H,DING X,et al. Extreme learning machine for regression and multiclass classification [J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Part B Cybernetics A Publication of the IEEE Systems Man & Cybernetics Society,2012,42(2):513-529.
[30] CHUNG R K. Spectral graph theory[M]. American Mathematical Society,1997.
[31] BELKIN M,MATVEEVA I,NIYOGI P. Regularization and Semi-supervised Learning on Large Graphs[M]// Learning Theory. Springer Berlin Heidelberg,2004:624-638.
[32] BELKIN M,NIYOGI P,SINDHWANI V. Manifold Regularization:A Geometric Framework for Learning from Labeled and Unlabeled Examples[M]. JMLR. org,2006.
[33] LIANG N Y,HUANG G B,SARATCHANDRAN P,et al. A fast and accurate online sequential learning algorithm for feedforward networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks,2006,17(6):1411-1423.

(上接第 58 页)

[19] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control,1965(8):338-353.
[20] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[M]. Heidelberg,German:Springer-Verlag Telos,1999:1-324.
[21] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets System,1986,20(1):87-96.
[22] ATANASSOV K T. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets System,1994,61(2):137-142.
[23] SHAFER G. A Mathematical theory of evidence [M]. Princeton:Princeton University Press,1976.
[24] WU W Z,LEUNG Y,MI J S. On generalized fuzzy belief functions in infinite spaces[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2009,17:385-397.
[25] YAO Y Y,WONG S K M,LINGRAS P. A decision theoretic rough set model[C]// Proceedings of the 5th International Symposium on Methodologies for Intelligent System. New York:North-Holland,1990:17-24.
[26] TAN A H,et al. Evidence-theory-based numerical characterization of multigranulation rough sets in incomplete information systems[J]. Fuzzy Sets and Systems,2015,294(C):18-35.
[27] CHEN D G,LI W L,ZHANG X,et al. Evidence-theory-based numerical algorithms of attribute reduction with neighborhood-covering rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2014,55(3):908-923.
[28] CHE X Y,MI J S,CHEN D G. Information fusion and numerical characterization of a multi-source information system [J]. Knowledge-Based Systems,2018(145):121-133.
[29] HU Q,MI J S,LI L J. The fuzzy belief structure and attribute reduction based on multi-granulation fuzzy rough operator[J]. Journal of Shandong University,2017,52(7):30-36. (in Chinese)
胡谦,米据生,李磊军. 多粒度模糊粗糙近似算子的信任结构与属性约简[J]. 山东大学学报(理学版),2017,52(7):30-36.
[30] XU Z S. Intuitionistic preference relations and their application in group decision making [J]. Information Sciences, 2007,177(11):2363-2379.
[31] KLIR G J,YUAN B. Fuzzy sets and Fuzzy logic:Theory and Applications[M]. Prentice Hallof India,2008.
[32] ZHANG X,CHEN D,TSANGC E C C. Generalized dominane rough set models for the dominance intuitionistic fuzzy information systems[J]. Information Sciences,2017,378:1-25.
[33] LIANG M S,MI J S,ZHAO T N. Generalized dominance-based multi-granularity intuitionistic fuzzy rough set and acquisition of decision rules[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems,2017,12(6):883-888. (in Chinese)
梁美社,米据生,赵天娜. 广义优势多粒度直觉模糊粗糙集及规则获取[J]. 智能系统学报,2017,12(6):883-888.