

不确定环境下基于 VaR 和 CVaR 的投资组合优化模型

潘东静 宁玉富

(德州学院计算机系 德州 253023)

摘 要 对不确定环境下的投资组合问题进行研究,使用不确定测度来定义不确定环境下的 VaR 和 CVaR,并用 VaR 和 CVaR 度量风险,建立基于 VaR 和 CVaR 风险控制的投资组合优化模型,并设计了集成遗传算法、99-方法的混合智能算法来求解此模型,最后通过实例验证了模型和算法的有效性。

关键词 投资组合,不确定测度,混合智能算法,VaR,CVaR

中图分类号 F830.9

文献标识码 A

Optimal Model of Portfolio Selection Based on VaR and CVaR under Uncertain Environment

PAN Dong-jing NING Yu-fu

(Department of Computer Science and Technology, Dezhou University, Dezhou 253023, China)

Abstract This paper discussed the portfolio selection problem under uncertain environment, using uncertain measure to define VaR and CVaR. VaR and CVaR were used to measure risk. An optimal model of portfolio selection based on VaR and CVaR was established, and the hybrid intelligence algorithm integrating genetic algorithm and 99-method was designed to solve the model. Finally, an numerical example was given to illustrate the feasibility and effectiveness of the model and the algorithm.

Keywords Portfolio selection, Uncertain measure, Hybrid intelligence algorithm, VaR, CVaR

投资决策是经济活动中最基本的决策之一,投资决策的目标一般是对风险和收益的综合考虑,1952 年,Markowitz^[1]提出了关于投资组合的均值-方差方法,开辟了金融投资量化研究的开端,构成了现代投资组合理论的核心基础。Markowitz 的均值-方差理论是将资产的收益率看成是随机变量,用收益率的期望均值度量投资收益,用收益率的方差度量投资收益的风险,使投资者能在一定风险水平上取得最大的预期收益,或在一定收益水平上使风险达到最小。但是,用方差度量风险有一定的局限性,很多学者提出了度量风险的其他方法,如半方差、VaR 和 CVaR 方法。VaR 风险是指在一定的置信水平下,在一定的期限内,某一投资组合潜在的最大损失^[3]。CVaR 是损失超过 VaR 的条件均值,代表了超额损失的平均水平。

以往对投资组合的研究,大部分是在随机环境或模糊环境下,但很多情况下用随机变量和模糊变量都不能很好地刻画投资收益率的变化。2007 年, Liu 创立了不确定理论,现在,不确定理论已经成为数学的一个分支。本文使用不确定理论对投资组合问题进行研究,使用不确定测度定义不确定环境下的 VaR 和 CVaR,建立 VaR 和 CVaR 风险控制下,使期望收益率最大化的投资组合优化模型,并使用集成遗传算法、99-方法的混合智能算法进行求解。

本文第 1 节介绍不确定理论的相关概念;第 2 节给出不

确定环境下 VaR 和 CVaR 的概念和特性;第 3 节建立不确定环境下基于 VaR 和 CVaR 的投资组合优化模型;第 4 节给出混合智能算法的求解过程;第 5 节用具体的实例阐明模型及算法的应用;最后是总结。

1 预备知识

现实生活中,有很多现象既不是随机的,也不是模糊的,用随机变量和模糊变量都不能很好地描述这些问题。Lin^[2]于 2007 年创立不确定理论,开辟了对不确定问题研究的一种新方法,不确定理论中一个最基本的概念是不确定测度,它用来度量不确定事件的可信程度。下面给出不确定理论中的几个基本定义。

定义 1 设 Γ 是一个非空集合, τ 是 Γ 的 σ -代数, τ 中的每个元素 Λ 称为一个事件, 不确定测度 $M\{\Lambda\}$ 是从 τ 到 $[0, 1]$ 的一个函数, $M\{\Lambda\}$ 具有如下的性质^[2]。

- (1) 规范性: 对于全集 Γ , 有 $M\{\Gamma\} = 1$;
- (2) 单调性: 若 $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, 则 $M\{\Lambda_1\} \leq M\{\Lambda_2\}$;
- (3) 自对偶性: 对任何事件 Λ 有 $M\{\Lambda\} + M\{\Lambda^c\} = 1$;
- (4) 可列次可加性: 对于每一个可数序列 $\{\Lambda_i\}$, 有 $M\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} M\{\Lambda_i\}$;
- (5) 乘积测度: 设 Γ_k 是非空集合, M_k 是它的不确定测度,

到稿日期: 2011-08-16 返修日期: 2011-10-25 本文受山东省社会科学规划研究项目(10CJGZ37), 山东省科技攻关计划项目(2009GG20001029)资助。

潘东静(1970—), 女, 硕士, 教授, 主要研究方向为不确定决策、混合智能算法、投资组合, E-mail: pdj1970@163.com; 宁玉富(1967—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为不确定决策、投资组合。

$k=1,2,\dots,n$ 。乘积不确定测度 M 是 σ -代数乘积 $\tau_1 \times \tau_2 \times \dots \times \tau_n$ 的不确定测度, 满足 $M\{\prod_{k=1}^n \Lambda_k\} = \min_{1 \leq k \leq n} M_k\{\Lambda_k\}$ 。对每一个 $\Lambda \in \tau$, 有

$$M\{\Lambda\} = \begin{cases} \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda} \min_{1 \leq k \leq n} M_k\{\Lambda_k\}, & \text{if } \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda} \min_{1 \leq k \leq n} M_k\{\Lambda_k\} > 0.5 \\ 1 - \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda^c} \min_{1 \leq k \leq n} M_k\{\Lambda_k\}, & \text{if } \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda^c} \min_{1 \leq k \leq n} M_k\{\Lambda_k\} > 0.5 \\ 0.5, & \text{otherwise} \end{cases}$$

定义 2 设 Γ 是一个非空集合, τ 是 Γ 的 σ -代数, M 是不确定测度, 三元组 (Γ, τ, M) 称为不确定空间。

定义 3 一个不确定变量 ξ 是从不确定空间 (Γ, τ, M) 到实数 Borel 集 B 的可测函数, 满足

$$\{\xi \in B\} = \{r \in \Gamma | \xi(r) \in B\}$$

定义 4 一个不确定变量 ξ 的不确定分布 Φ 定义为: $\Phi(x) = M\{\xi \leq x\}$, x 为任意实数。

定义 5 一个不确定变量 ξ 称为线性不确定变量, 如果它具有一个线性不确定分布

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq a \\ (x-a)/(b-a), & \text{if } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{if } x \geq b \end{cases}$$

标记为 $L(a, b)$, 其中 a, b 都是实数, 且 $a < b$ 。它的逆分布函数为

$$\Phi^{-1}(\alpha) = (1-\alpha)a + \alpha b$$

定义 6 一个不确定变量 ξ 称为之字形不确定变量, 如果它具有之字形不确定分布

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq a \\ (x-a)/2(b-a), & \text{if } a \leq x \leq b \\ (x+c-2b)/2(c-b), & \text{if } b \leq x \leq c \\ 1, & \text{if } x \geq c \end{cases}$$

标记为 $Z(a, b, c)$, 其中 a, b, c 都是实数, 且 $a < b < c$ 。它的逆分布函数为

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1-2\alpha)a + 2\alpha b, & \text{if } \alpha < 0.5 \\ (2-2\alpha)b + (2\alpha-1)c, & \text{if } \alpha \geq 0.5 \end{cases}$$

定义 7 设 ξ 是不确定变量, $\alpha \in (0, 1]$, ξ 的 α 乐观值定义为

$$\xi_{\sup}(\alpha) = \sup\{r | M\{\xi \geq r\} \geq \alpha\}$$

ξ 的 α 悲观值定义为

$$\xi_{\inf}(\alpha) = \inf\{r | M\{\xi \leq r\} \geq \alpha\}$$

由定义 4 和定义 7 可以推导出定理 1。

定理 1 设 ξ 是不确定变量, 具有不确定分布 Φ , 它的 α 乐观值和 α 悲观值分别是

$$\xi_{\sup}(\alpha) = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

$$\xi_{\inf}(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)$$

2 不确定环境下的 VaR 和 CVaR

VaR 即“Value at Risk”, 表示“在险价值”, VaR 是给定置信水平和目标时段下预期的最大损失, 在 $100 \cdot \alpha\%$ 置信水平下的 VaR 定义为

$$\text{VaR}_\alpha = \inf\{r | M\{x \leq r\} \geq 1-\alpha\} \quad (1)$$

例如: 若 $\alpha = 95\%$, $\text{VaR}_\alpha = -0.01$, 则表示投资收益率等于或低于 -0.01 的不确定测度为 0.05 。

VaR 实际上表现为一种收益率, 这种收益大部分情况下是负收益, 因此也称为损失。

CVaR 是指损失超过 VaR 的条件均值, 也称为平均超额损失, 代表超额损失的平均水平。

$$\text{CVaR}_\alpha = E[x | x \leq \text{VaR}_\alpha] \quad (2)$$

CVaR 用来度量金融资产在损失超过 VaR 值时的平均损失, 也就是在一定时间内, 置信度在 $100 \cdot \alpha\%$ 情况下, 投资者对损失超过 VaR_α 的期望值, 而不是 VaR_α , 因此 CVaR_α 考虑了超过 VaR_α 的所有损失情况, 更接近于投资者的心理感受^[4,5]。

3 基于 VaR 和 CVaR 约束的投资组合优化模型

考虑对 n 种项目进行投资, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为决策向量, x_i 表示对第 i 种项目投资的比例, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 为对 n 种项目投资的收益率组成的向量, ξ_i 为不确定变量, 要求 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, VaR 的值实际上也是一种收益率, 建立 $100 \cdot \alpha\%$ 置信水平下, VaR 和 CVaR 的值都不低于预置收益率的约束时, 最大化投资组合收益率的期望值的最优化模型。

$$\begin{cases} \max E[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] \\ \text{s. t.} \\ \text{VaR}_\alpha \geq R_0 \\ \text{CVaR}_\alpha \geq R_1 \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \quad (\text{M1})$$

对于一些特殊的不确定变量, 可以求出模型 (M1) 的清晰等价类, 例如假设每种投资项目的收益率都是线性不确定变量, 表示为 $\xi_i \sim L(a_i, b_i)$, 则

$$\sum_{i=1}^n \xi_i x_i = (\sum_{i=1}^n a_i x_i, \sum_{i=1}^n b_i x_i)$$

$$E[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i] = (\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i) / 2$$

由定义 5 和定理 1 可知, 假设 ξ 为线性不确定变量 $L(a, b)$, 它的 α 悲观值为

$$\xi_{\inf}(\alpha) = (1-\alpha)a + \alpha b$$

故由定义 7、定理 1 及式 (1)、式 (2), 可以推导出当每种投资项目的收益率都是线性不确定变量 $\xi_i \sim L(a_i, b_i)$ 时, 有

$$\text{VaR}_\alpha = \alpha \sum_{i=1}^n a_i x_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n b_i x_i$$

$$\text{CVaR} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (\alpha \sum_{i=1}^n a_i x_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n b_i x_i) d\alpha$$

因此可以写出模型 (M1) 确定的规划形式, 从而用传统的线性规划形式进行求解。

$$\begin{cases} \max (\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i) / 2 \\ \text{s. t.} \\ \alpha \sum_{i=1}^n a_i x_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n b_i x_i \geq R_0 \\ \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (\alpha \sum_{i=1}^n a_i x_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n b_i x_i) d\alpha \geq R_1 \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \quad (\text{M2})$$

4 混合智能算法求解过程

对于收益率是各种不同类型的分布,不容易求出清晰等价类,使用集成不确定变量的 99-方法、遗传算法的混合智能算法对模型(M1)进行求解,过程如下。

4.1 99-方法

Liu^[2]给出了不确定变量的 99-表表示方法,一个不确定变量 ξ 具有不确定分布 Φ ,可以用 99-表表示为表 1 的形式。

表 1

0.01	0.02	0.03	...	0.99
y_1	y_2	y_3	...	y_{99}

其中,第一行中的 0.01,0.02,0.03,...,0.99 表示不确定分布 Φ 的值,第二行中的 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{99}$ 是对应的逆函数 $\Phi^{-1}(0.01), \Phi^{-1}(0.02), \Phi^{-1}(0.03), \dots, \Phi^{-1}(0.99)$ 的值。对于严格的增函数 $f(y)$,不确定变量 $f(\xi)$ 具有 99-表,如表 2 所列。

表 2

0.01	0.02	0.03	...	0.99
$f(y_1)$	$f(y_2)$	$f(y_3)$	...	$f(y_{99})$

4.2 遗传算法

初始化过程:一个可行解 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可以通过一个染色体 $M=(m_1, m_2, \dots, m_n)$ 表示出来, $m_1, m_2, \dots, m_n$ 为基因,是 $[0,1]$ 区间随机产生的数, X 和 M 之间的关系为

$$x_i = m_i / (m_1 + m_2 + \dots + m_n), i = 1, 2, \dots, n$$

从而可以保证 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ 总能够成立。

交叉变异过程:对染色体进行交叉变异操作,通过 99-方法计算可行染色体的目标值,得到每个染色体的适应度,通过旋转赌轮,选择染色体,重复此过程直到满足终止条件,最后将最好的染色体作为最优解。

4.3 混合智能算法

(1)确定遗传算法中的种群规模 pop_size ,交叉概率 p_c ,变异概率 P_m 。

(2)随机产生 pop_size 个可行的染色体,并用 99-方法检验染色体的可行性。

(3)通过交叉和变异更新染色体,并用 99-方法检验子代染色体的可行性。

(4)通过 99-方法计算所有染色体对应的目标函数值。

(5)按照目标函数值计算每一个染色体的适应度。

(6)通过旋转赌轮选择染色体。

(7)重复步骤(3)至(6)直到完成给定的循环次数。

(8)给出最好的染色体作为最优解。

5 算例分析

假设有 5 种投资项目,其投资的收益率为 $\xi_i, i=1, 2, \dots, 5, \xi_i$ 为不确定变量,其中, ξ_1, ξ_2 为线性不确定分布, ξ_3 服从

$L(-1.09, 3.86), \xi_4$ 服从 $L(-1.67, 4.52)$ 分布, ξ_5, ξ_6, ξ_7 是之字形不确定变量, ξ_8 服从 $Z(-1.56, 1.32, 3.23), \xi_9$ 服从 $Z(-1.98, 2.33, 4.79), \xi_{10}$ 服从 $Z(-1.95, 2.34, 3.69)$ 分布, $R_0 = -0.97, R_1 = -1.35, \alpha = 90\%, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为决策向量, x_i 表示对第 i 种项目投资的比例,使用 99-表方法表示 ξ_i ,每一个 ξ_i 的 99-表如表 3 所列。

表 3 ξ_i 的 99-表

0.01	0.02	0.03	...	0.99
b_1^i	b_2^i	b_3^i	...	b_{99}^i

投资组合收益率的 99-表如表 4 所列。

表 4 投资组合收益率的 99-表

0.01	0.02	0.03	...	0.99
$\sum_{i=1}^5 b_1^i x_i$	$\sum_{i=1}^5 b_2^i x_i$	$\sum_{i=1}^5 b_3^i x_i$	...	$\sum_{i=1}^5 b_{99}^i x_i$

按照混合智能算法对模型(M1)进行求解,算法中的参数设置为:遗传算法迭代 500 代,种群规模 $pop_size = 30$,交叉概率 $p_c = 0.3$,变异概率 $P_m = 0.2$ 。

通过运行智能算法,得到最佳分配方案为 $x^* = (0.2701, 0.1264, 0.0200, 0.5826, 0.0009)$, $VaR_\alpha = -0.9695, CVaR_\alpha = -1.2925$ 。

混合智能算法的遗传过程如图 1 所示。

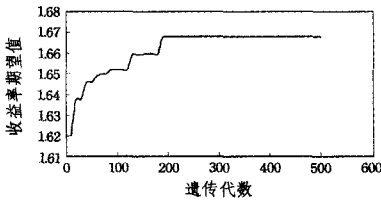


图 1 混合智能算法的遗传过程

结束语 本文建立了不确定环境下基于 VaR 和 CVaR 的投资组合优化模型,其对于收益率都服从同一种特殊的不确定分布的情况,可以将模型转换为清晰等价类。对于一般的情况,使用集成遗传算法、99-方法的混合智能算法进行求解,最后通过实例进行验证,本文方法为不确定环境下的投资组合问题提供了一种新的研究方法。

参考文献

[1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7:71-93

[2] Liu B. Uncertainty Theory(2nd ed)[M]. Springer-Verlag, Berlin, 2007

[3] 安起光,王厚杰,张文清. 基于机会约束的均值-VaR 投资组合模型研究[J]. 山东大学学报:理学版, 2005, 40(6): 49-53

[4] 李婷,张卫国. 具有 VaR 约束和无风险投资的证券组合选择方法[J]. 工程数学学报, 2005, 22(3): 435-440

[5] 高岳林,苗世清. 基于 VaR 和 CVaR 风险控制下 M-V 投资组合优化模型[J]. 统计与决策, 2010, 5: 34-36