第 39 卷 第 4 期
2012 年 4 月

计 算 机 科 学
Computer Science

Vol. 39 No. 4
Apr 2012

P-集合,逆 P-集合与信息智能融合-过滤辨识

史开泉

(山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)

摘 要 P-集合(Packet sets)是把动态特性引入到有限普通集合 X 内,改进有限普通集合 X 得到的。P-集合是由内 P-集合 X^F(internal packet set X^F)与外 P-集合 X^F(outer packet set X^F)构成的集合对;或者,(X^F,X^F)是 P-集合。P-集合具有动态性,在一定条件下,P-集合被还原成有限普通集合 X。P-集合是一类动态信息系统的数学表示。逆 P-集合(inverse packet sets)是由 P-集合得到的,具有动态特性,具有与 P-集合相反的数学结构。逆 P-集合是由内逆 P-集合 $\overline{X}^F$(internal inverse packet set $\overline{X}^F$)与外逆 P-集合 $\overline{X}^F$(outer inverse packet set $\overline{X}^F$)构成的集合对;或者,$(\overline{X}^F,\overline{X}^F)$是逆 P-集合。在一定条件下,逆 P-集合被还原成有限普通集合 X。逆 P-集合是另一类动态信息系统的数学表示。P-推理(packet reasoning)是由 P-集合生成的动态推理,逆 P-推理(inverse packet reasoning)是由逆 P-集合生成的动态推理。把 P-集合、逆 P-集合、P-推理、逆 P-推理与信息融合交叉、渗透,给出信息智能融合-过滤辨识理论与应用研究。同时给出 P-集合与逆 P-集合的结构、P-集合与逆 P-集合的分离、P-集合与逆 P-集合的等价类特征、P-信息融合与逆 P-信息融合、P-信息融合与逆 P-信息融合的推理发现、P-信息融合与逆 P-信息融合度量、P-信息融合与逆 P-信息融合的过滤-辨识,以及信息智能融合-过滤辨识的应用。P-集合与逆 P-集合是研究信息融合理论与应用的一个新理论、新方法。

关键词 P-集合,逆 P-集合,P-推理,逆 P-推理,信息融合,过滤-辨识,应用

中图法分类号 O144 **文献标识码** A

P-sets, Inverse P-sets and the Intelligent Fusion-filter Identification of Information

SHI Kai-quan

(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract P-sets(Packet sets) are obtained by embedding the dynamic characteristics into the finite general set X and improving it, which have the dynamic characteristic. P-sets are a set-pair composed of internal P-set X^F (internal packet set X^F) and outer P-set X^F (outer packet set X^F), or (X^F, X^F) is P-sets. Under a certain condition, P-sets can be restored to finite general set X. P-sets are the mathematical expression of one class dynamic system. Inverse P-sets(inverse packet sets) are obtained by P-sets, which have also dynamic characteristic. Inverse P-sets have the opposite mathematics structure to P-sets, which are a set pair composed of inernal inverse P-set $\overline{X}^F$ (internal inverse packet set $\overline{X}^F$) and outer inverse P-set $\overline{X}^F$ (outer inverse packet set $\overline{X}^F$), or $(\overline{X}^F, \overline{X}^F)$ is inverse P-sets. Under a certain condition, inverse P-sets can be restored to finite general set X. Inverse P-sets are the mathematical expression of the other class dynamic system. P-reasoning(packet reasoning) is the dynamic reasoning generated by P-sets, and inverse P-reasoning (inverse packet reasoning) is the dynamic reasoning generated by inverse P-sets. By intersecting and infiltrating P-sets, inverse P-sets, P-reasoning, inverse P-reasoning with information fusion, the intelligent fusion-filter identification theory of information and its application study were given. The paper gave the structures, the separations and the equivalence class characteristics of P-sets and inverse P-sets, P-information fusion and inverse P-information fusion, the reasoning discovery, fusion measure, filter-identification of P-information fusion and inverse P-information fusion, the application of the intelligent fusion-filter identification of information. P-sets and inverse P-sets are new theories and methods of studying information fusion theory and application.

Keywords P-sets, Inverse P-sets, P-reasoning, Inverse P-reasoning, Information fusion, Filter-identification, Application

1 引言

看两个能被一般人接受的通俗事实:

事实 1 筐子里装有 5 个苹果 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5;苹果 x_1-x_5 用有限普通集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$表示。$\exists x_k \in X$,$x_k$ 具有属性 α_1=红色,属性 α_2=甜味,$k=1,2,\cdots,5$;属性 α_1,α_2 用属性集合 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2\}$表示。若在 α 内补充一个属性 α_3=山东烟台,属性集合 α 变成 $\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha_3\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$,则在

到稿日期:2011-05-18 返修日期:2011-08-10 本文受河南省科技攻关项目(102102210425),山东省自然科学基金项目(ZR2010AL019)资助。

史开泉(1945-),男,教授,博士生导师,主要研究领域为粗集理论与应用、信息系统与信息识别理论与应用,E-mail:shikq@sdu.edu.cn。

属性补充的条件下，集合 X 变成 $X^{F}=X-\{x_1,x_2,x_5\}=\{x_3,x_4\}$。若在 α 内删除一个属性 α_2＝甜味，属性集合 α 变成 $\alpha^{F}=\alpha-\{\alpha_2\}=\{\alpha_1\}$，则在属性删除的条件下，集合 X 变成 $X^{F}=X\cup\{x_6,x_7,x_8\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$。事实 1 的特征是有限普通集合 X 内的元素个数随着 X 的属性集合 α 内被补充的属性而减少；有限普通集合 X 内的元素个数随着 X 的属性集合 α 内被删除的属性而增多。

事实 2　集团公司 A 生产 n 种不同的产品 $x_1,x_2,\cdots,x_n$；产品 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 用有限普通集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示。α_k 是产品 $x_k\in X$ 的属性(订货合同)。$\lambda<n$ 个产品构成有限普通集合(λ 个产品集合) $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_\lambda\}$，$X$ 具有属性集合(订货合同集合) $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\lambda\}$。若在 α 内补充 p 个属性(p 个客户追加 p 个订货合同)，属性集合 α 变成 $\alpha^{F}=\alpha\cup\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\lambda,\alpha_{\lambda+1},\alpha_{\lambda+2},\cdots,\alpha_{\lambda+p}\}$，则在属性补充的条件下，集合 X 变成 $\overline{X}^{F}=X\cup\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_\lambda,x_{\lambda+1},x_{\lambda+2},\cdots,x_{\lambda+p}\}$。若在 α 内删除 q 个属性(已交付订货合同的 q 个客户，因资金链断裂无力支付货款，被迫中止合同)，$q<\lambda$，则属性集合 α 变成 $\alpha^{F}=\alpha-\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q\}=\{\alpha_{q+1},\alpha_{q+2},\cdots,\alpha_\lambda\}$；则在属性删除的条件下，集合 X 变成 $\overline{X}^{F}=X-\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}=\{x_{q+1},x_{q+2},\cdots,x_\lambda\}$。事实 2 的特征是有限普通集合 X 内的元素个数随着 X 的属性集合 α 内被补充属性而增多；有限普通集合 X 内的元素个数随着 X 的属性集合 α 内被删除属性而减少。这两个事实已是人们司空见惯的常识。

容易看到，在属性集合 α 内补充属性的条件下，事实 1 中的有限普通集合 X 变小，事实 2 中的有限普通集合 X 变大。在属性集合 α 内删除属性的条件下，事实 1 中的有限普通集合 X 变大，事实 2 中的有限普通集合 X 变小。事实 1 的特征与事实 2 的特征正好相反，这是两个有趣的事实。事实 1 与事实 2 中，在属性集合 α 内补充属性等价于把 α 之外的属性“迁移”到 α 内；在属性集合 α 内删除属性等价于把 α 内的属性“迁移”到 α 外。事实 1 的特征与一类信息系统具有的动态特征相同，事实 2 的特征与另一类信息系统具有的动态特征相同。

对于事实 1，如果抽掉它的实际意义，给予数学的一般抽象，人们能够得到什么？对于事实 2，如果抽掉它的实际意义，给予数学的一般抽象，人们又能够得到什么？人们想知道，用什么样的数学结构与方法能够研究事实 1 所代表的一类信息系统？用什么样的数学结构与方法能够研究事实 2 所代表的另一类信息系统？本文给出这些问题的讨论。

把事实 1 给予数学的一般抽象，文献[1,2]给出 P-集合(Packet sets)的结构与特征，文献[3,4]把函数概念引入到 P-集合内，改进 P-集合，给出函数 P-集合(Function Packet sets)的结构与特征，文献[1-4,6-45]给出 P-集合、函数 P-集合在一类信息系统中的多个应用。把事实 2 给予数学的一般抽象，文献[5]给出逆 P-集合(或者 P-1-集合)的结构与特征，以及逆 P-集合在另一类信息系统中的应用。

本文把 P-集合的结构、逆 P-集合的结构、P-集合生成的 P-推理、逆 P-集合生成的逆 P-推理交叉到信息融合中，给出信息智能融合-过滤辨识的讨论，建立信息融合理论与应用的新的研究方法。信息融合是信息系统理论与应用中的重要研究分支之一，应用前景看好。本文给出的主要结果：P-集合、逆 P-集合的结构；P-集合与逆 P-集合的分离；P-集合与逆 P-集合等价类特征；P-信息融合的 P-推理发现、逆 P-信息融合的逆 P-推理发现；P-信息融合度量与逆 P-信息融合度量；P-信息融合过滤-辨识与逆 P-信息融合过滤-辨识；P-信息融合与逆 P-信息融合的应用。

2　P-集合，逆 P-集合结构

2.1　P-集合的结构

约定　U 是有限元素论域，V 是有限属性论域；$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$，$\overline{F}=\{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_n\}$是元素迁移族[1-51]；$X$ 是 U 上的有限普通集合，$X\subset U$；α 是 X 的属性集合，$\alpha\subset V$；$f\in F$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 是元素迁移[1-51]；$f\in F$ 的特征是对于元素 $u\in U$，$u\overline{\in}X$，$f\in F$把 u 变成 $f(u)=x'\in X$；对于属性 $\beta\in V$，$\beta\overline{\in}\alpha$，$f\in F$ 把 β 变成 $f(\beta)=\alpha'\in\alpha$。$\overline{f}\in\overline{F}$ 的特征是对于元素 $x\in X$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 x 变成 $\overline{f}(x)=u\overline{\in}X$；对于属性 $\alpha_\lambda\in\alpha$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_λ 变成 $f(\alpha_\lambda)=\beta_\lambda\overline{\in}\alpha$。

2008 年，文献[1,2]给出：

给定集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合，称 X^{F} 是 X 生成的内 P-集合(internal packet set)，简称 X^{F} 是内 P-集合，而且

$$X^{F}=X-X^{-} \tag{1}$$

X^{-} 称作 X 的 $\overline{F}$-元素删除集合，而且

$$X^{-}=\{x|x\in X,\overline{f}(x)=u\overline{\in}X,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{2}$$

如果 X^{F} 的属性集合 α^{F} 满足

$$\alpha^{F}=\alpha\cup\{\alpha'|f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\} \tag{3}$$

这里，$\beta\in V$，$\beta\overline{\in}\alpha$；$f\in F$ 把 β 变成 $f(\beta)=\alpha'\in\alpha$；$X^{F}\neq\phi$。式(1)中 $X^{F}=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$，$p\leqslant q$；$p,q\in\mathrm{N}^{+}$。

给定集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合，称 X^{F} 是 X 生成的外 P-集合(outer packet set)，简称 X^{F} 是外 P-集合，而且

$$X^{F}=X\cup X^{+} \tag{4}$$

X^{+} 称作 X 的 F-元素补充集合，而且

$$X^{+}=\{u|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x'\in X,f\in F\} \tag{5}$$

如果 X^{F} 的属性集合 α^{F} 满足

$$\alpha^{\overline{F}}=\alpha-\{\beta_\lambda|\overline{f}(\alpha_\lambda)=\beta_\lambda\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{6}$$

这里，$\alpha_\lambda\in\alpha$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_λ 变成 $\overline{f}(\alpha_\lambda)=\beta_\lambda\overline{\in}\alpha$；$\alpha^{F}\neq\phi$。式(4)中 $X^{F}=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$，$q\leqslant r$；$q,r\in\mathrm{N}^{+}$。

由内 P-集合 X^{F}(internal packet set X^{F})与外 P-集合 X^{F}(outer packet set X^{F})构成的集合对，称作 X 生成的 P-集合(packet sets)，简称 P-集合；而且

$$(X^{F},X^{F}) \tag{7}$$

有限普通集合 X 称作 P-集合(X^{F},X^{F})的基集合(基础集合，ground set)。

由式(3)得到：

$$\alpha_1^{F}\subseteq\alpha_2^{F}\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{n-1}^{F}\subseteq\alpha_n^{F} \tag{8}$$

由式(8)得到的内 P-集合满足：

$$X_n^{F}\subseteq X_{n-1}^{F}\subseteq\cdots\subseteq X_2^{F}\subseteq X_1^{F} \tag{9}$$

由式(6)得到：

$$\alpha_n^{F}\subseteq\alpha_{n-1}^{F}\subseteq\cdots\subseteq\alpha_2^{F}\subseteq\alpha_1^{F} \tag{10}$$

由式(10)得到的外 P-集合满足：

$$X_1^{F}\subseteq X_2^{F}\subseteq\cdots\subseteq X_{n-1}^{F}\subseteq X_n^{F} \tag{11}$$

由式(9)、式(11)得到：

$$\{(X_i^{\bar F},X_j^F)\mid i\in I,j\in J\} \tag{12}$$

式(12)是 P-集合的集合对族的形式，是 P-集合的一般表达式；I,J 是指标集合。

利用式(1)—式(12)得到：

定理 1(P-集合与有限普通集合第一关系定理)　若 $F=\bar F=\phi$，则 P-集合与有限普通集合满足：

$$(X^{\bar F},X^F)_{F=\bar F=\phi}=X \tag{13}$$

定理 2(P-集合与有限普通集合第二关系定理)　若 $F=\bar F=\phi$，则 P-集合与有限普通集合满足：

$$\{(X_i^{\bar F},X_j^F)\mid i\in I,j\in J\}_{F=\bar F=\phi}=X \tag{14}$$

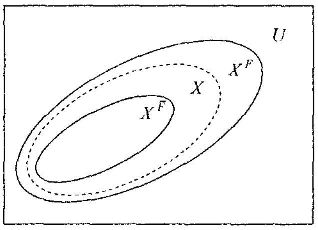
定理 1,2 的证明见文献[6]。

命题 1　P-集合被还原成有限普通集合，必有 $F=\bar F=\phi$。

命题 2　P-集合具有动态特性。

P-集合的更多特征与应用见文献[6-45]。

图 1 给出 P-集合的直观表示。



X 是 U 上的有限普通集合，X 具有属性集合 α，X 用虚线表示。$X^{\bar F}$ 是内 P-集合，$X^{\bar F}$ 具有属性集合 $\alpha^{\bar F}$，$X^{\bar F}$ 用实线表示。X^F 是外 P-集合，X^F 具有属性集合 α^F，X^F 用实线表示；$(X^{\bar F},X^F)$ 是 X 的 P-集合。

图 1

2.2　逆 P-集合的结构

2012 年，文献[5]给出：

给定集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合，称 $\overline{X}^F$ 是 X 生成的内逆 P-集合(internal inverse packet set)，简称 $\overline{X}^F$ 是内逆 P-集合，而且

$$\overline{X}^F=X\cup X^+ \tag{15}$$

X^+ 称作 X 的 F-元素补充集合，而且

$$X^+=\{u\mid u\in U,u\bar{\in}X,f(u)=x'\in X,f\in F\} \tag{16}$$

如果 $\overline{X}^F$ 具有属性集合 α^F 满足：

$$\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\} \tag{17}$$

这里，$\beta\in V$，$\beta\bar{\in}\alpha$，$f\in F$ 把 β 变成 $f(\beta)=\alpha'\in\alpha$；式(15)中 $\overline{X}^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$，$q\leqslant r$，$q,r\in\mathbf{N}^+$。

给定集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合，称 $\overline{X}^{\bar F}$ 是 X 生成的外逆 P-集合(outer inverse packet set)，简称 $\overline{X}^{\bar F}$ 是外逆 P-集合，而且

$$\overline{X}^{\bar F}=X-X^- \tag{18}$$

X^- 称作 X 的 $\bar F$-元素删除集合，而且

$$X^-=\{x\mid x\in X,\bar f(x)=u\bar{\in}X,\bar f\in\bar F\} \tag{19}$$

如果 $\overline{X}^{\bar F}$ 的属性集合 $\alpha^{\bar F}$ 满足：

$$\alpha^{\bar F}=\alpha-\{\alpha_\lambda\mid\bar f(\alpha_\lambda)=\beta_\lambda\bar{\in}\alpha,\bar f\in\bar F\} \tag{20}$$

这里，$\alpha_\lambda\in\alpha$，$\bar f\in\bar F$ 把 α_λ 变成 $\bar f(\alpha_\lambda)=\beta_\lambda\bar{\in}\alpha$；式(18)中，$\overline{X}^{\bar F}=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$，$p\leqslant q$，$p,q\in\mathbf{N}^+$。$\overline{X}^{\bar F}\neq\phi$，$\alpha^{\bar F}\neq\phi$。

由内逆 P-集合 $\overline{X}^F$(internal inverse packet set $\overline{X}^F$)与外逆 P-集合 $\overline{X}^{\bar F}$(outer inverse packet set $\overline{X}^{\bar F}$)构成的集合对，称作 X 生成的逆 P-集合(inverse packet sets)，简称逆 P-集合，而且

$$(\overline{X}^F,\overline{X}^{\bar F}) \tag{21}$$

有限普通集合 X 称作逆 P-集合 $(\overline{X}^F,\overline{X}^{\bar F})$ 的基集合(基础集合，ground set)。

由式(17)得到：

$$\alpha_1^F\subseteq\alpha_2^F\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{n-1}^F\subseteq\alpha_n^F \tag{22}$$

由式(22)得到内逆 P-集合满足：

$$\overline{X}_1^F\subseteq\overline{X}_2^F\subseteq\cdots\subseteq\overline{X}_{n-1}^F\subseteq\overline{X}_n^F \tag{23}$$

由式(20)得到：

$$\alpha_n^{\bar F}\subseteq\alpha_{n-1}^{\bar F}\subseteq\cdots\subseteq\alpha_2^{\bar F}\subseteq\alpha_1^{\bar F} \tag{24}$$

由式(24)得到外逆 P-集合满足：

$$\overline{X}_n^{\bar F}\subseteq\overline{X}_{n-1}^{\bar F}\subseteq\cdots\subseteq\overline{X}_2^{\bar F}\subseteq\overline{X}_1^{\bar F} \tag{25}$$

由式(23)、式(25)得到：

$$\{(\overline{X}_i^F,\overline{X}_j^{\bar F})\mid i\in I,j\in J\} \tag{26}$$

式(26)是逆 P-集合的集合对族的形式，是逆 P-集合的一般形式；I,J 是指标集合(index set)。

利用式(15)—式(26)得到：

定理 3(逆 P-集合与有限普通集合第一关系定理)　若 $F=\bar F=\phi$，则逆 P-集合与有限普通集合满足：

$$(\overline{X}^F,\overline{X}^{\bar F})_{F=\bar F=\phi}=X \tag{27}$$

证明：两个集合相等，它们对应的属性集合相等；反之，两个集合的属性集合相等，属性集合对应的集合相等。1°. 若 $F=\phi$，则式(17)变成 $\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}=\alpha\cup\phi=\alpha$；这里，$\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}=\phi$；式(15)变成 $\overline{X}^F=X\cup X^+=X\cup\phi=X$；这里，$X^+=\{u\mid u\in U,u\bar{\in}X,f(u)=x'\in X,f\in F\}=\phi$。2°. 若 $\bar F=\phi$，则式(20)变成 $\alpha^{\bar F}=\alpha-\{\alpha_\lambda\mid\bar f(\alpha_\lambda)=\beta_\lambda\bar{\in}\alpha,\bar f\in\bar F\}=\alpha-\phi=\alpha$；这里，$\{\alpha_\lambda\mid\bar f(\alpha_\lambda)=\beta_\lambda\bar{\in}\alpha,\bar f\in\bar F\}=\phi$；式(18)变成 $\overline{X}^{\bar F}=X-X^-=X-\phi=X$；这里，$X^-=\{x\mid x\in X,\bar f(x)=u\bar{\in}X,\bar f\in\bar F\}=\phi$。由 1°与 2°得到式(27)。

定理 4(逆 P-集合与有限普通集合第二关系定理)　若 $F=\bar F=\phi$，则逆 P-集合与有限普通集合满足：

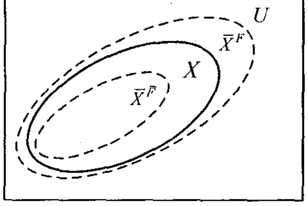
$$\{(\overline{X}_i^F,\overline{X}_j^{\bar F})\mid i\in I,j\in J\}_{F=\bar F=\phi}=X \tag{28}$$

证明与定理 3 类似，此略。

命题 3　逆 P-集合被还原成有限普通集合，必有 $F=\bar F=\phi$。

命题 4　逆 P-集合具有动态特性。

图 2 给出逆 P-集合的直观表示。



X 是 U 上的有限普通集合，X 具有属性集合 α，X 用实线表示。$\overline{X}^F$ 是内逆 P-集合，$\overline{X}^F$ 具有属性集合 α^F，$\overline{X}^F$ 用虚线表示。$\overline{X}^{\bar F}$ 是外逆 P-集合，$\overline{X}^{\bar F}$ 具有属性集合 $\alpha^{\bar F}$，$\overline{X}^{\bar F}$ 用虚线表示。$(\overline{X}^F,\overline{X}^{\bar F})$ 是 X 的逆 P-集合。

图 2

应当指出，式(17)的意义是：设 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha\}=\{\alpha_1'\}$，得到 $\alpha_1^F=\alpha\cup\{\alpha_1'\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1'\}$；设 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}=\{\alpha_2',\alpha_3'\}$，得到 $\alpha_2^F=\alpha_1^F\cup\{\alpha_2',\alpha_3'\}=(\alpha\cup\{\alpha_1'\})\cup\{\alpha_2',\alpha_3'\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'\}$，如此等等；式(17)与 $T=T+1$ 意义相同。因为元素(属性)迁移 $f\in F$ 的作用，由 α 得到 α_1^F,α_2^F，而且 $\alpha\subseteq\alpha_1^F\subseteq\alpha_2^F$。式(15)的意义是：$\overline{X}_1^F=X\cup X_1^+$，$\overline{X}_2^F=\overline{X}_1^F\cup X_2^+=(X\cup X_1^+)\cup X_2^+$，$X\subseteq\overline{X}_1^F\subseteq\overline{X}_2^F$；关系 $X\subseteq\overline{X}_1^F\subseteq\overline{X}_2^F$ 是因为元素(属性)迁移 $f\in F$ 的作用。因为

元素迁移 $f\in F$，使具有静态特征的有限普通集合 X 具有了动态特征，X 变成 $\overline{X}_1^F$ 与 $\overline{X}_2^F$。式(15)、式(17)中的"$\cup$"已不是通常意义下的"并运算"，通常意义的"并运算"没有连续性的动态特征。

由式(1)－式(12)给出的 P-集合结构与式(15)－式(26)给出的逆 P-集合结构比较得到：P-集合的结构与逆 P-集合的结构相反；P-集合的动态特征与逆 P-集合的动态特征相反。这两种相反的结构、相反的动态特征是两类信息系统动态特征的数学模型抽象，是两类信息系统动态特征的数学本质。

利用第 2 节中的式(1)－式(12)、式(15)－式(26)，第 3 节中给出 P-集合、逆 P-集合的动态分离特性。

3 P-集合，逆 P-集合的动态分离定理

3.1 P-集合动态分离定理

称 X_{k+1}^F 是内 P-集合 X_k^F 的内 P-分离，如果存在 $\Delta\alpha_k^F\neq\phi$，X_{k+1}^F 的属性集合 α_{k+1}^F 与 X_k^F 的属性集合 α_k^F 满足：

$$\alpha_{k+1}^F=\alpha_k^F\cup\Delta\alpha_k^F \tag{29}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

称 X_{k+1}^F 是外 P-集合 X_k^F 的外 P-分离，如果存在 $\nabla\alpha_k^F\neq\phi$，X_{k+1}^F 的属性集合 α_{k+1}^F 与 X_k^F 的属性集合 α_k^F 满足：

$$\alpha_{k+1}^F=\alpha_k^F-\nabla\alpha_k^F \tag{30}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

称

$$(X_{k+1}^F,X_{k+1}^F) \tag{31}$$

是 P-集合(X_k^F,X_k^F)的 P-分离；如果 X_{k+1}^F，X_{k+1}^F 分别是 X_k^F 的内 P-分离，X_k^F 的外 P-分离。

由式(29)－式(31)得到：

定理 5(内 P-分离定理) 内 P-集合 X_{k+1}^F，X_k^F 满足：

$$X_{k+1}^F=\cap_{k=1}^n X_k^F \tag{32}$$

定理 6(外 P-分离定理) 外 P-集合 X_{k+1}^F，X_k^F 满足：

$$X_{k+1}^F=\cup_{k=1}^n X_k^F \tag{33}$$

定理 5 指出：内 P-集合 X_{k+1}^F 在 X_k^F 之内被分离；如果 X_k^F 被定义成一个已知信息，则 X_{k+1}^F 是潜藏在 X_k^F 之内的，不被人们事先知道的未知信息。

定理 6 指出：外 P-集合 X_{k+1}^F 在 X_k^F 之外被分离；如果 X_k^F 被定义成一个已知信息，则 X_{k+1}^F 是潜藏在 X_k^F 之外的，不被人们事先知道的未知信息。

定理 7(P-分离定理) P-集合(X_{k+1}^F,X_{k+1}^F)与(X_k^F,X_k^F)满足：

$$(X_{k+1}^F,X_{k+1}^F)=(\cap_{k=1}^n X_k^F,\cup_{k=1}^n X_k^F) \tag{34}$$

式(34)表示：$X_{k+1}^F=\cap_{k=1}^n X_k^F$，$X_{k+1}^F=\cup_{k=1}^n X_k^F$。

由定理 5－定理 7 得到：

推论 1 内 P-集合族$\{X_i^F\mid i\in I\}$与它的子族$\{X_i^F\mid i\in I\}_{t\in T}$满足：

$$\{X_i^F\mid i\in I\}=\cap_{t\in T}\{X_i^F\mid i\in I\}_t \tag{35}$$

推论 2 外 P-集合族$\{X_j^F\mid j\in J\}$与它的子族$\{X_j^F\mid j\in J\}_{t\in T}$满足：

$$\{X_j^F\mid j\in J\}=\cup_{t\in T}\{X_j^F\mid j\in J\}_t \tag{36}$$

3.2 逆 P-集合动态分离定理

称 $\overline{X}_{k+1}^F$ 是内逆 P-集合 $\overline{X}_k^F$ 的内逆 P-分离，如果存在 $\Delta\alpha_k^F\neq\phi$，$\overline{X}_{k+1}^F$ 的属性集合 α_{k+1}^F 与 $\overline{X}_k^F$ 的属性集合 α_k^F 满足：

$$\alpha_{k+1}^F=\alpha_k^F\cup\Delta\alpha_k^F \tag{37}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

称 $\overline{X}_{k+1}^F$ 是外逆 P-集合 $\overline{X}_k^F$ 的外逆 P-分离，如果存在 $\nabla\alpha_k^F\neq\phi$，$\overline{X}_{k+1}^F$ 的属性集合 α_{k+1}^F 与 $\overline{X}_k^F$ 的属性集合 α_k^F 满足：

$$\alpha_{k+1}^F=\alpha_k^F-\nabla\alpha_k^F \tag{38}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

称

$$(\overline{X}_{k+1}^F,\overline{X}_{k+1}^F) \tag{39}$$

是逆 P-集合$(\overline{X}_k^F,\overline{X}_k^F)$的逆 P-分离；如果 $\overline{X}_{k+1}^F$，$\overline{X}_{k+1}^F$ 分别是 $\overline{X}_k^F$ 的内逆 P-分离，$\overline{X}_k^F$ 的外逆 P-分离。

由式(37)－式(39)得到：

定理 8(内逆 P-分离定理) 内逆 P-集合 $\overline{X}_{k+1}^F$，$\overline{X}_k^F$ 满足：

$$\overline{X}_{k+1}^F=\cup_{k=1}^n\overline{X}_k^F \tag{40}$$

证明：由第 2 节中的式(15)－式(17)与式(37)得到：若 α_λ^F 是 $\overline{X}_\lambda^F$ 的属性集合，$\lambda=1,2,\cdots,n$，而且 $\alpha_1^F\subseteq\alpha_2^F\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{n-1}^F\subseteq\alpha_n^F$；或者，$\alpha_1^F\subseteq(\alpha_1^F\cup\Delta\alpha_1^F)\subseteq(\alpha_1^F\cup\Delta\alpha_1^F)\cup\Delta\alpha_2^F\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{n-1}^F\subseteq\alpha_n^F$，则有 $\overline{X}_1^F\subseteq\overline{X}_2^F\subseteq\cdots\subseteq\overline{X}_{n-1}^F\subseteq\overline{X}_n^F$，或者，$\overline{X}_{n+1}^F=\overline{X}_1^F\cup\overline{X}_2^F\cup\cdots\cup\overline{X}_n^F$，得到式(40)。

定理 9(外逆 P-分离定理) 外逆 P-集合 $\overline{X}_{k+1}^F$，$\overline{X}_k^F$ 满足：

$$\overline{X}_{k+1}^F=\cap_{k=1}^n\overline{X}_k^F \tag{41}$$

利用类似式(40)的证明，容易得到式(41)，证明略。

定理 8 指出：内逆 P-集合 $\overline{X}_{k+1}^F$ 在 $\overline{X}_k^F$ 之外被分离；如果 $\overline{X}_k^F$ 被定义成一个已知信息，则 $\overline{X}_{k+1}^F$ 是潜藏在 $\overline{X}_k^F$ 之外的，不被人们事先知道的未知信息。

定理 9 指出：外逆 P-集合 $\overline{X}_{k+1}^F$ 在 $\overline{X}_k^F$ 之内被分离；如果 $\overline{X}_k^F$ 被定义成一个已知信息，则 $\overline{X}_{k+1}^F$ 是潜藏在 $\overline{X}_k^F$ 之内的，不被人们事先知道的未知信息。

定理 10(逆 P-分离定理) 逆 P-集合$(\overline{X}_{k+1}^F,\overline{X}_{k+1}^F)$与$(\overline{X}_k^F,\overline{X}_k^F)$满足：

$$(\overline{X}_{k+1}^F,\overline{X}_{k+1}^F)=(\cup_{k=1}^n\overline{X}_k^F,\cap_{k=1}^n\overline{X}_k^F) \tag{42}$$

式(42)表示：$\overline{X}_{k+1}^F=\cup_{k=1}^n\overline{X}_k^F$，$\overline{X}_{k+1}^F=\cap_{k=1}^n\overline{X}_k^F$。

由定理 8－10 得到：

推论 3 内逆 P-集合族$\{\overline{X}_i^F\mid i\in I\}$与它的子族$\{\overline{X}_i^F\mid i\in I\}_{t\in T}$满足：

$$\{\overline{X}_i^F\mid i\in I\}=\cup_{t\in T}\{\overline{X}_i^F\mid i\in I\}_t \tag{43}$$

推论 4 外逆 P-集合族$\{\overline{X}_j^F\mid j\in J\}$与它的子族$\{\overline{X}_j^F\mid j\in J\}_{t\in T}$满足：

$$\{\overline{X}_j^F\mid j\in J\}=\cap_{t\in T}\{\overline{X}_j^F\mid j\in J\}_t \tag{44}$$

解读定理 5 和定理 6，得到这样的启迪：I)如果把 X_{k+1}^F 定义成一个信息，则信息 X_{k+1}^F 是信息 X_k^F 与信息 ∇X_k^F 的"融合"；或者，$X_{k+1}^F=X_k^F-\nabla X_k^F$；$X_{k+1}^F$ 表明 X_k^F 内存在冗余信息元 x_i 构成的信息 ∇X_k^F，X_k^F 是信息元 x_i 过剩的信息。II)如果把 X_{k+1}^F 定义成一个信息，则信息 X_{k+1}^F 是信息 X_k^F 与信息 ΔX_k^F 的"融合"；或者，$X_{k+1}^F=X_k^F\cup\Delta X_k^F$；$X_{k+1}^F$ 表明 X_k^F 是信息元 x_i 缺失的信息。I)是一类信息系统中的一种信息融合，II)是一类信息系统中的另一种信息融合，它们共同存在于 P-集合表示的一类动态信息系统中。

解读定理 8 和定理 9，得到这样的启迪：III)如果把 $\overline{X}_{k+1}^F$ 定义成一个信息，则信息 $\overline{X}_{k+1}^F$ 是信息 $\overline{X}_k^F$ 与 $\Delta\overline{X}_k^F$ 的"融合"；或者，$\overline{X}_{k+1}^F=\overline{X}_k^F\cup\Delta\overline{X}_k^F$；$\overline{X}_{k+1}^F$ 表明 $\overline{X}_k^F$ 是信息元 x_j 缺失的信息。VI)如果把 $\overline{X}_{k+1}^F$ 定义成一个信息，则信息 $\overline{X}_{k+1}^F$ 是信息 $\overline{X}_k^F$ 与信息 $\nabla\overline{X}_k^F$ 的"融合"；或者，$\overline{X}_{k+1}^F=\overline{X}_k^F-\nabla\overline{X}_k^F$；$\overline{X}_{k+1}^F$ 表明 $\overline{X}_k^F$ 内存在冗余信息元 x_j 构成的信息 $\nabla\overline{X}_k^F$，$\overline{X}_k^F$ 是信息元

x_j 过剩的信息。III)是另一类信息系统中的一种信息融合，VI)是另一类信息系统中的另一种信息融合，它们共同存在于逆 P-集合表示的另一类动态信息系统中。“信息融合”(information fusion)是信息科学与信息系统中应用研究的前沿之一。P-集合、逆 P-集合应用于信息融合的讨论，在第 5－9 节中给出。

在经典数学(数学分析，离散数学，高等数学)中有这样的概念：给定有限普通集合 $X\subset U$，R 是定义在 X 上的二元关系，若 1°.(自反性) $\forall x_i\in X, x_iRx_i$；2°(对称性) $\forall x_i, x_j\in X, x_iRx_j\Rightarrow x_jRx_i$；3°.(传递性) $\forall x_i, x_j, x_k\in X, x_iRx_j, x_jRx_k\Rightarrow x_iRx_k$，则 X 是一个等价类 $[x]$；或者 $X=[x]$；R 是 X 上的等价关系。等价类、等价关系对于理工类的学者们是一个普通、熟悉的数学概念。利用这个熟悉的概念，认识 P-集合的基集合 X(基础集合)得到：给定基集合 X，α 是 X 的属性集合；若把 α 定义成 X 上的一个关系，则有：1°. $\forall x_i\in X, x_i\alpha x_i$；2°. $\forall x_i, x_j\in X, x_i\alpha x_j\Rightarrow x_j\alpha x_i$；3°. $\forall x_i, x_j, x_k\in X, x_i\alpha x_j, x_j\alpha x_k\Rightarrow x_i\alpha x_k$。显然，P-集合的基集合 X 是一个关于 α 的等价类；或者，$X=[x]$。类似地得到：逆 P-集合的基集合 X 是一个关于 α 的等价类，或者，$X=[x]$。利用这两个认识，对 P-集合、逆 P-集合的特征给出继续讨论，见 4 节。

4 P-集合的 P-等价类特征，逆 P-集合的逆 P-等价类特征

4.1 P-集合与它生成的 P-等价类

称内 P-集合 X^F 是内 P-等价类，X^F 记作 $[x]^F$。

称外 P-集合 X^F 是外 P-等价类，X^F 记作 $[x]^F$。

由内 P-等价类 $[x]^F$ 与外 P-等价类 $[x]^F$ 构成的等价类对，称作 P-集合生成的 P-等价类，简称 P-等价类，而且

$$([x]^F, [x]^F) \tag{45}$$

称

$$\{([x]_i^F, [x]_j^F) \mid i\in I, j\in J\} \tag{46}$$

是 P-集合生成的 P-等价类族，简称 P-等价类族，I, J 是指标集合。

对于内 P-等价类得到：1°. $\forall x_i\in[x]^F, x_i\alpha^F x_i$；2°. $\forall x_i, x_j\in[x]^F, x_i\alpha^F x_j\Rightarrow x_j\alpha^F x_i$；3°. $\forall x_i, x_j, x_k\in[x]^F, x_i\alpha^F x_j, x_j\alpha^F x_k\Rightarrow x_i\alpha^F x_k$。对于外 P-等价类得到：1°. $\forall x_i\in[x]^F, x_i\alpha^F x_i$；2°. $\forall x_i, x_j\in[x]^F, x_i\alpha^F x_j\Rightarrow x_j\alpha^F x_i$；3°. $\forall x_i, x_j, x_k\in[x]^F, x_i\alpha^F x_j, x_j\alpha^F x_k\Rightarrow x_i\alpha^F x_k$。这里，$\alpha^F$ 是 $[x]^F$ 的属性集合，α^F 是 $[x]^F$ 的属性集合。

定理 11(P-等价类第一还原定理)　P-等价类与普通等价类满足：

$$([x]^F, [x]^F)_{F=F=\phi}=[x] \tag{47}$$

事实上，令式(1)中的 $X^F=[x]^F$，式(4)中的 $X^F=[x]^F$，$[x]$ 是普通等价类，由式(1)－式(12)与定理 1 得到式(47)，证明略。

定理 12(P-等价类第二还原定理)　P-等价类与普通等价类满足：

$$\{([x]_i^F, [x]_j^F) \mid i\in I, j\in J\}_{F=F=\phi}=[x] \tag{48}$$

推论 5　内 P-等价类与普通等价类满足：

$$[x]_{F=F=\phi}^F=[x] \tag{49}$$

推论 6　内 P-等价类族与普通等价类满足：

$$\{[x]_i^F \mid i\in I\}_{F=F=\phi}=[x] \tag{50}$$

推论 7　外 P-等价类与普通等价类满足：

$$[x]_{F=F=\phi}^F=[x] \tag{51}$$

推论 8　外 P-等价类族与普通等价类满足：

$$\{[x]_j^F \mid j\in J\}_{F=F=\phi}=[x] \tag{52}$$

4.2 逆 P-集合与它生成的逆 P-等价类

称内逆 P-集合 $\overline{X}^F$ 是内逆 P-等价类，$\overline{X}^F$ 记作 $[\overline{x}]^F$。

称外逆 P-集合 $\overline{X}^F$ 是外逆 P-等价类，$\overline{X}^F$ 记作 $[\overline{x}]^F$。

由内逆 P-等价类 $[\overline{x}]^F$ 与外逆 P-等价类 $[\overline{x}]^F$ 构成的等价类对，称作逆 P-集合生成的逆 P-等价类，简称逆 P-等价类，而且

$$([\overline{x}]^F, [\overline{x}]^F) \tag{53}$$

称

$$\{([\overline{x}]_i^F, [\overline{x}]_j^F) \mid i\in I, j\in J\} \tag{54}$$

是逆 P-集合生成的逆 P-等价类族，简称逆 P-等价类族，I, J 是指标集合。

对于内逆 P-等价类得到：1°. $\forall x_i\in[\overline{x}]^F, x_i\alpha^F x_i$；2°. $\forall x_i, x_j\in[\overline{x}]^F, x_i\alpha^F x_j\Rightarrow x_j\alpha^F x_i$；3°. $\forall x_i, x_j, x_k\in[\overline{x}]^F, x_i\alpha^F x_j, x_j\alpha^F x_k\Rightarrow x_i\alpha^F x_k$。对于外逆 P-等价类得到：1°. $\forall x_i\in[\overline{x}]^F, x_i\alpha^F x_i$；2°. $\forall x_i, x_j\in[\overline{x}]^F, x_i\alpha^F x_j\Rightarrow x_j\alpha^F x_i$；3°. $\forall x_i, x_j, x_k\in[\overline{x}]^F, x_i\alpha^F x_j, x_j\alpha^F x_k\Rightarrow x_i\alpha^F x_k$。这里，$\alpha^F$ 是 $[\overline{x}]^F$ 的属性集合，α^F 是 $[\overline{x}]^F$ 的属性集合。

定理 13(逆 P-等价类第一还原定理)　逆 P-等价类与普通等价类满足：

$$([\overline{x}]^F, [\overline{x}]^F)_{F=F=\phi}=[x] \tag{55}$$

事实上，令式(15)中的 $\overline{X}^F=[\overline{x}]^F$，式(18)中的 $\overline{X}^F=[\overline{x}]^F$，$[x]$ 是普通等价类(数学分析，离散数学中的等价类)，由式(15)－式(26)与定理 3，得到式(55)，证明略。

定理 14(逆 P-等价类第二还原定理)　逆 P-等价类与普通等价类满足：

$$\{([\overline{x}]_i^F, [\overline{x}]_j^F) \mid i\in I, j\in J\}_{F=F=\phi}=[x] \tag{56}$$

推论 9　内逆 P-等价类与普通等价类满足：

$$[\overline{x}]_{F=\phi}^F=[x] \tag{57}$$

推论 10　内逆 P-等价类族与普通等价类满足：

$$\{[\overline{x}]_i^F \mid i\in I\}_{F=\phi}=[x] \tag{58}$$

推论 11　外逆 P-等价类与普通等价类满足：

$$[\overline{x}]_{F=\phi}^F=[x] \tag{59}$$

推论 12　外逆 P-等价类族与普通等价类满足：

$$\{[\overline{x}]_j^F \mid j\in J\}_{F=\phi}=[x] \tag{60}$$

从本节中给出的讨论，容易得到：1°. P-等价类 $([x]^F, [x]^F)$ 具有动态特性；内 P-等价类 $[x]^F$ 随着属性集合 α^F 内被补充属性，$[x]^F$ 变小；外 P-等价类 $[x]^F$ 随着属性集合 α^F 内被删除属性，$[x]^F$ 变大。$[x]^F$ 变小表示 $[x]^F$ 内的一些元素被融合到 $[x]^F$ 之外，$[x]^F$ 生成一个新的内 P-等价类 $[x]^F$。$[x]^F$ 变大表示 $[x]^F$ 外的一些元素被融合到 $[x]^F$ 之内，$[x]^F$ 生成一个新的外 P-等价类 $[x]^F$。2°. 逆 P-等价类 $([\overline{x}]^F, [\overline{x}]^F)$ 具有动态特性；内逆 P-等价类 $[\overline{x}]^F$ 随着属性集合 α^F 内被补充属性，$[\overline{x}]^F$ 变大；外逆 P-等价类 $[\overline{x}]^F$ 随着属性集合 α^F 内被删除属性，$[\overline{x}]^F$ 变小。$[\overline{x}]^F$ 变大表示 $[\overline{x}]^F$ 外的一些元素被融合到 $[\overline{x}]^F$ 之内，$[\overline{x}]^F$ 生成一个新的内逆 P-等价类 $[\overline{x}]^F$。$[\overline{x}]^F$ 变小表示 $[\overline{x}]^F$ 内的一些元素被融合到 $[\overline{x}]^F$ 之外，$[\overline{x}]^F$ 生成的一个新的外逆 P-等价类 $[\overline{X}]^F$。

一个通俗的、人人都知道的物理实验：一束白色的阳光，

通过三棱镜被变成红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫七色阳光，即人们常说的，我们生活在七色阳光下。从反面认识这个实验得到：红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫七色阳光被融合成白色阳光；从正面认识这个实验得到：白色阳光被融合成红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫七色阳光。如果把{白色阳光}定义成一个信息，把{红，橙，黄，绿，蓝，靛，紫}定义成另一个信息，则解读“信息融合”，得到两个意义，两个意义用集合概念认识得到：I)给定集合 X，$\exists x_k\in U, x_k\overline{\in}X$，把 x_k 补充到 X 内；或者 $X\cup\{x_k\}$，x_k 被融合到 X 内；或者，“内融合”。在 x_k 被补充到 X 内之前，X 内的元素是缺失的。II)给定集合 X，$x_k\in X$，把 x_k 从 X 内删除；或者 $X-\{x_k\}$，x_k 被融合到 X 外；或者，“外融合”。在 x_k 被删除到 X 外之前，X 内的元素是冗余的。I)与 II)是“融合”的完整意义。在“信息融合”研究中，依据信息系统的特征，取 I)与 II)之一；或者，I)与 II)共同取之。

5 P-信息融合，逆 P-信息融合的属性关系

约定 第 4 节中的符号$[x]^F$，$[x]^F$；$[\overline{x}]^F$，$[\overline{x}]^F$在第 5－9 节中分别用$(x)^F$，$(x)^F$；$(\overline{x})^F$，$(\overline{x})^F$表示；或者$(x)^F=[x]^F$，$(x)^F=[x]^F$；$(\overline{x})^F=[\overline{x}]^F$，$(\overline{x})^F=[\overline{x}]^F$。第 4 节中的符号$[x]$用$(x)$表示；或者$(x)=[x]$。为不引起混乱与误解，$(x)^F$，$(x)^F$；$(\overline{x})^F$，$(\overline{x})^F$，$(x)$称作信息。

5.1 P-信息融合与它的属性关系

称$(x)^F_{k+1}$是内 P-信息$(x)^F_k$ 的内 P-融合生成，简称$(x)^F_{k+1}$是内 P-信息融合，如果存在$\nabla(x)^F_k\neq\phi$，满足：

$$(x)^F_{k+1}=(x)^F_k-\nabla(x)^F_k \tag{61}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

称$(x)^F_{k+1}$是外 P-信息$(x)^F_k$ 的外 P-融合生成，简称$(x)^F_{k+1}$是外 P-信息融合，如果存在 $\Delta(x)^F_k\neq\phi$，满足：

$$(x)^F_{k+1}=(x)^F_k\cup\Delta(x)^F_k \tag{62}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

称

$$((x)^F_{k+1},(x)^F_{k+1}) \tag{63}$$

是 P-信息$((x)^F_{k+1},(x)^F_{k+1})$的 P-融合生成，简称$((x)^F_{k+1},(x)^F_{k+1})$是 P-信息融合；如果$(x)^F_{k+1}$是内 P-信息融合，$(x)^F_{k+1}$是外 P-信息融合。

称$\{((x)^F_i,(x)^F_j)\mid i\in I,j\in J\}$是$\{((x)^F_i,(x)^F_j)\mid i\in I,j\in J\}_{t\in T}$生成的 P-融合信息族，简称$\{((x)^F_i,(x)^F_j)\mid i\in I,j\in J\}$是 P-信息融合族，如果$\{((x)^F_i,(x)^F_j)\mid i\in I,j\in J\}_{t\in T}$是$\{((x)^F_i,(x)^F_j)\mid i\in I,j\in J\}$的子族。

称$\{(x)^F_i\mid i\in I\}$是$\{(x)^F_i\mid i\in I\}_{t\in T}$生成的内 P-融合信息族，简称$\{(x)^F_i\mid i\in I\}$是内 P-信息融合族，如果$\{(x)^F_i\mid i\in I\}_{t\in T}$是$\{(x)^F_i\mid i\in I\}$的子族。

称$\{(x)^F_j\mid j\in J\}$是$\{(x)^F_j\mid j\in J\}_{t\in T}$生成的外 P-融合信息族，简称$\{(x)^F_j\mid j\in J\}$是外 P-信息融合族，如果$\{(x)^F_j\mid j\in J\}_{t\in T}$是$\{(x)^F_j\mid j\in J\}$的子族。

定理 15(内 P-信息融合属性关系定理) $(x)^F_{k+1}$是$(x)^F_k$的内 P-信息融合的充分必要条件是，存在 $\Delta\alpha^F_k\neq\phi$，$(x)^F_{k+1}$的属性集合 α^F_{k+1}与$(x)^F_k$ 的属性集合 α^F_k 满足

$$\alpha^F_{k+1}=\alpha^F_k\cup\Delta\alpha^F_k \tag{64}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

证明：1°. 若$(x)^F_{k+1}$是$(x)^F_k$ 的内 P-信息融合，由式(61)得到$(x)^F_{k+1}\subseteq(x)^F_k$；由第 1 节中的式(1)－式(3)、式(8)、式(9)得到$(x)^F_{k+1}$的属性集合 α^F_{k+1}与$(x)^F_k$ 的属性集合 α^F_k 满足 $\alpha^F_k\subseteq\alpha^F_{k+1}$，则有 $\Delta\alpha^F_k\neq\phi$，得到式(64)。2°. α^F_{k+1}，α^F_k 分别是$(x)^F_{k+1}$，$(x)^F_k$ 的属性集合，存在 $\Delta\alpha^F_k\neq\phi$ 满足式(64)；由第 1 节中的式(1)－式(3)、式(8)、式(9)得到$(x)^F_{k+1}$与$(x)^F_k$ 满足$(x)^F_{k+1}\subseteq(x)^F_k$，由式(61)得到$(x)^F_{k+1}$是内 P-信息融合。

推论 13 $(x)^F_{k+1}$是$(x)^F_k$ 的内 P-信息融合，一定存在$\nabla(x)^F_k\neq\phi$，$\nabla(x)^F_k$ 的属性集合$\nabla\alpha^F_k$ 与$(x)^F_k$ 的属性集合 α^F_k 满足 $\alpha^F_k-\nabla\alpha^F_k=\phi$。

定理 16(外 P-信息融合属性关系定理) $(x)^F_{k+1}$是$(x)^F_k$的外 P-信息融合的充分必要条件是，存在$\nabla\alpha^F_k\neq\phi$，$(x)^F_{k+1}$的属性集合 α^F_{k+1}与$(x)^F_k$ 的属性集合 α^F_k 满足：

$$\alpha^F_{k+1}=\alpha^F_k-\nabla\alpha^F_k \tag{65}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

证明与定理 15 类似，此略。

推论 14 $(x)^F_{k+1}$是$(x)^F_k$ 的外 P-信息融合，一定存在 $\Delta(x)^F_k\neq\phi$，$\Delta(x)^F_k$ 的属性集合 $\Delta\alpha^F_k$ 与$(x)^F_{k+1}$的属性集合 α^F_{k+1}满足 $\alpha^F_{k+1}-\Delta\alpha^F_k=\phi$。

定理 17(P-信息融合属性关系定理) $((x)^F_{k+1},(x)^F_{k+1})$是$((x)^F_k,(x)^F_k)$的 P-信息融合的充分必要条件是，存在 $\Delta\alpha^F_k\neq\phi$，$\nabla\alpha^F_k\neq\phi$，$((x)^F_{k+1},(x)^F_{k+1})$的属性集合$(\alpha^F_{k+1},\alpha^F_{k+1})$与$((x)^F_k,(x)^F_k)$的属性集合$(\alpha^F_k,\alpha^F_k)$满足：

$$(\alpha^F_{k+1},\alpha^F_{k+1})=((\alpha^F_k\cup\Delta\alpha^F_k),(\alpha^F_k-\nabla\alpha^F_k)) \tag{66}$$

式(66)表示 $\alpha^F_{k+1}=\alpha^F_k\cup\Delta\alpha^F_k$，$\alpha^F_{k+1}=\alpha^F_k-\nabla\alpha^F_k$；$\alpha^F_{k+1}$，$\alpha^F_{k+1}$分别是$(x)^F_{k+1}$，$(x)^F_{k+1}$的属性集合。

推论 15 $((x)^F_{k+1},(x)^F_{k+1})$是$((x)^F_k,(x)^F_k)$的 P-信息融合，一定存在$\nabla(x)^F_k\neq\phi$，$\Delta(x)^F_k\neq\phi$，$\nabla(x)^F_k$ 的属性集合$\nabla\alpha^F_k$与$(x)^F_k$ 的属性集合 α^F_k 满足 $\alpha^F_k-\nabla\alpha^F_k=\phi$，$\Delta(x)^F_k$ 的属性集合 $\Delta\alpha^F_k$ 与$(x)^F_{k+1}$的属性集合 α^F_{k+1}满足 $\alpha^F_{k+1}-\Delta\alpha^F_k=\phi$。

推论 16 $\{(x)^F_i\mid i\in I\}$是$\{(x)^F_i\mid i\in I\}_{t\in T}$的内 P-信息融合族，$\{(x)^F_i\mid i\in I\}_{t\in T}$的属性集合族$\{\alpha^F_i\mid i\in I\}_{t\in T}$内一定被补充属性。

推论 17 $\{(x)^F_j)\mid j\in J\}$是$\{(x)^F_j)\mid j\in J\}_{t\in T}$的外 P-信息融合族，$\{(x)^F_j)\mid j\in J\}_{t\in T}$的属性集合族$\{\alpha^F_j)\mid j\in J\}_{t\in T}$内一定被删除属性。

推论 18 $\{((x)^F_i,(x)^F_j)\mid i\in I,j\in J\}$是$\{((x)^F_i,(x)^F_j)\mid i\in I,j\in J\}_{t\in T}$的 P-信息融合族，$\{(x)^F_i\mid i\in I\}$的属性集合族$\{\alpha^F_i\mid i\in I\}_{t\in T}$内一定被补充属性，$\{(x)^F_j\mid j\in J\}_{t\in T}$的属性集合族$\{\alpha^F_j\mid j\in J\}_{t\in T}$内一定被删除属性。

5.2 逆 P-信息融合与它的属性关系

称$(\overline{x})^F_{k+1}$是内逆 P-信息$(\overline{x})^F_k$ 的内逆 P-融合生成，简称$(\overline{x})^F_{k+1}$是内逆 P-信息融合，如果存在 $\Delta(\overline{x})^F_k\neq\phi$，满足：

$$(\overline{x})^F_{k+1}=(\overline{x})^F_k\cup\Delta(\overline{x})^F_k \tag{67}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

称$(\overline{x})^F_{k+1}$是外逆 P-信息$(\overline{x})^F_k$ 的外逆 P-融合生成，简称$(\overline{x})^F_{k+1}$是外逆 P-信息融合，如果存在 $\Delta(\overline{x})^F_k\neq\phi$，满足：

$$(\overline{x})^F_{k+1}=(\overline{x})^F_k-\nabla(\overline{x})^F_k \tag{68}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

称

$$((\overline{x})^F_{k+1},(\overline{x})^F_{k+1}) \tag{69}$$

是逆 P-信息$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_k^F)$的逆 P-融合生成，简称$((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_{k+1}^F)$是逆 P-信息融合；如果$(\overline{x})_{k+1}^F$是内逆 P-信息融合，$(\overline{x})_{k+1}^F$是外逆 P-信息融合。

称$\{((\overline{x})_i^F,(\overline{x})_j^F)\mid i\in I,j\in J\}$是$\{((\overline{x})_i^F,(\overline{x})_j^F)\mid i\in I,j\in J\}_{t\in T}$生成的逆 P-融合信息族，简称$\{((\overline{x})_i^F,(\overline{x})_j^F)\mid i\in I,j\in J\}$是逆 P-信息融合族，如果$\{((\overline{x})_i^F,(\overline{x})_j^F)\mid i\in I,j\in J\}_{t\in T}$是$\{((\overline{x})_i^F,(\overline{x})_j^F)\mid i\in I,j\in J\}$的子族。

称$\{(\overline{x})_i^F\mid i\in I\}$是$\{(\overline{x})_i^F\mid i\in I\}_{t\in T}$生成的内逆 P-融合信息族，简称$\{(\overline{x})_i^F\mid i\in I\}$是内逆 P-信息融合族，如果$\{(\overline{x})_i^F\mid i\in I\}_{t\in T}$是$\{(\overline{x})_i^F\mid i\in I\}$的子族。

称$\{(\overline{x})_j^F\mid j\in J\}$是$\{(\overline{x})_j^F\mid j\in J\}_{t\in T}$生成的外逆 P-融合信息族，简称$\{(\overline{x})_j^F\mid j\in J\}$是外逆 P-信息融合族，如果$\{(\overline{x})_j^F\mid j\in J\}_{t\in T}$是$\{(\overline{x})_j^F\mid j\in J\}$的子族。

定理 18(内逆 P-信息融合属性关系定理)　$(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的内逆 P-信息融合的充分必要条件是，存在$\Delta\alpha_k^F\neq\phi$，$(\overline{x})_{k+1}^F$的属性集合α_{k+1}^F与$(\overline{x})_k^F$的属性集合α_k^F满足：

$$\alpha_{k+1}^F=\alpha_k^F\cup\Delta\alpha_k^F \tag{70}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

证明与定理 15 类似，此略。

推论 19　$(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的内逆 P-信息融合，一定存在$\Delta(\overline{x})_k^F\neq\phi$，$\Delta(\overline{x})_k^F$的属性集合$\Delta\alpha_k^F$与$(\overline{x})_{k+1}^F$的属性集合$\alpha_{k+1}^F$满足$\alpha_{k+1}^F-\Delta\alpha_k^F=\phi$。

定理 19(外逆 P-信息融合属性关系定理)　$(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的外逆 P-信息融合的充分必要条件是，存在$\nabla\alpha_k^F\neq\phi$，$(\overline{x})_{k+1}^F$的属性集合α_{k+1}^F与$(\overline{x})_k^F$的属性集合α_k^F满足：

$$\alpha_{k+1}^F=\alpha_k^F-\nabla\alpha_k^F \tag{71}$$

式中，$k=1,2,\cdots,n$。

推论 20　$(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的外逆 P-信息融合，一定存在$\nabla(\overline{x})_k^F\neq\phi$，$\nabla(\overline{x})_k^F$的属性集合$\nabla\alpha_k^F$与$(\overline{x})_k^F$的属性集合$\alpha_k^F$满足$\alpha_k^F-\nabla\alpha_k^F=\phi$。

定理 20(逆 P-信息融合属性关系定理)　$((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_{k+1}^F)$是$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_k^F)$的逆 P-信息融合的充分必要条件是，存在$\Delta\alpha_k^F\neq\phi,\nabla\alpha_k^F\neq\phi$，$((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_{k+1}^F)$的属性集合$(\alpha_{k+1}^F,\alpha_{k+1}^F)$与$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_k^F)$的属性集合$(\alpha_k^F,\alpha_k^F)$满足：

$$(\alpha_{k+1}^F,\alpha_{k+1}^F)=((\alpha_k^F\cup\Delta\alpha_k^F),(\alpha_k^F-\nabla\alpha_k^F)) \tag{72}$$

式(72)表示，$\alpha_{k+1}^F=\alpha_k^F\cup\Delta\alpha_k^F$，$\alpha_{k+1}^F=\alpha_k^F-\nabla\alpha_k^F$；$\alpha_{k+1}^F$，$\alpha_{k+1}^F$分别是$(\overline{x})_{k+1}^F$，$(\overline{x})_{k+1}^F$的属性集合。

推论 21　$((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_{k+1}^F)$是$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_k^F)$的逆 P-信息融合，一定存在$\Delta(\overline{x})_k^F\neq\phi,\nabla(\overline{x})_k^F\neq\phi$；$\Delta(\overline{x})_k^F$的属性集合$\Delta\alpha_k^F$与$(\overline{x})_{k+1}^F$的属性集合$\alpha_{k+1}^F$满足$\alpha_{k+1}^F-\Delta\alpha_k^F=\phi$，$\nabla(\overline{x})_k^F$的属性集合$\nabla\alpha_k^F$与$(\overline{x})_k^F$的属性集合$\alpha_k^F$满足$\alpha_k^F-\nabla\alpha_k^F=\phi$。

推论 22　$\{(\overline{x})_i^F\mid i\in I\}$是$\{(\overline{x})_i^F\mid i\in I\}_{t\in T}$的内逆 P-信息融合族，$\{(\overline{x})_i^F\mid i\in I\}_{t\in T}$的属性集合族$\{\alpha_i^F\mid i\in I\}_{t\in T}$内一定被补充属性。

推论 23　$\{(\overline{x})_j^F\mid j\in J\}$是$\{(\overline{x})_j^F\mid j\in J\}_{t\in T}$的外逆 P-信息融合族，$\{(\overline{x})_j^F\mid j\in J\}_{t\in T}$的属性集合族$\{\alpha_j^F\mid j\in J\}_{t\in T}$内一定被删除属性。

推论 24　$\{((\overline{x})_i^F,(\overline{x})_j^F)\mid i\in I,j\in J\}$是$\{((\overline{x})_i^F,(\overline{x})_j^F)\mid i\in I,j\in J\}_{t\in T}$的逆 P-信息融合族，$\{(\overline{x})_i^F\mid i\in I\}$的属性集合族$\{\alpha_i^F\mid i\in I\}_{t\in T}$内一定被补充属性，$\{(\overline{x})_j^F\mid j\in J\}_{t\in T}$的属性集合族$\{\alpha_j^F\mid j\in J\}_{t\in T}$内一定被删除属性。

解读第 5 节中的讨论得到：

1°. 若$(x)_{k+1}^F$是$(x)_k^F$的内 P-信息融合，$(x)_{k+1}^F$与$(x)_k^F$满足$(x)_{k+1}^F\subseteq(x)_k^F$，则$(x)_{k+1}^F$的属性集合$\alpha_{k+1}^F$与$(x)_k^F$的属性集合$\alpha_k^F$满足$\alpha_k^F\subseteq\alpha_{k+1}^F$；或者，若$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$，则$(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$。若$(x)_{k+1}^F$是$(x)_k^F$的外 P-信息融合，$(x)_{k+1}^F$与$(x)_k^F$满足$(x)_k^F\subseteq(x)_{k+1}^F$，则$(x)_{k+1}^F$的属性集合$\alpha_{k+1}^F$与$(x)_k^F$的属性集合$\alpha_k^F$满足$\alpha_{k+1}^F\subseteq\alpha_k^F$；或者，若$\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F$，则$(x)_k^F\Rightarrow(x)_{k+1}^F$。在条件$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$下，利用$(x)_k^F$找到$(x)_{k+1}^F$；在条件$\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F$下，利用$(x)_k^F$找到$(x)_{k+1}^F$；换一个说法，利用$(x)_k^F$发现$(x)_{k+1}^F$；利用$(x)_k^F$发现$(x)_{k+1}^F$。显然，发现$(x)_{k+1}^F$，$(x)_{k+1}^F$是一个推理过程。

2°. 若$(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的内逆 P-信息融合，$(\overline{x})_{k+1}^F$与$(\overline{x})_k^F$满足$(\overline{x})_k^F\subseteq(\overline{x})_{k+1}^F$，则$(\overline{x})_{k+1}^F$的属性集合$\alpha_{k+1}^F$与$(\overline{x})_k^F$的属性集合$\alpha_k^F$满足$\alpha_k^F\subseteq\alpha_{k+1}^F$；或者，若$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$，则$(\overline{x})_k^F\Rightarrow(\overline{x})_{k+1}^F$。若$(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的外逆 P-信息融合，$(\overline{x})_{k+1}^F$与$(\overline{x})_k^F$满足$(\overline{x})_{k+1}^F\subseteq(\overline{x})_k^F$，则$(\overline{x})_{k+1}^F$的属性集合$\alpha_{k+1}^F$与$(\overline{x})_k^F$的属性集合$\alpha_k^F$满足$\alpha_{k+1}^F\subseteq\alpha_k^F$；或者，若$\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F$，则$(\overline{x})_{k+1}^F\Rightarrow(\overline{x})_k^F$。在条件$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$下，利用$(\overline{x})_k^F$找到$(\overline{x})_{k+1}^F$；在条件$\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F$下，利用$(\overline{x})_k^F$找到$(\overline{x})_{k+1}^F$；换一个说法，利用$(\overline{x})_k^F$发现$(\overline{x})_{k+1}^F$；利用$(\overline{x})_k^F$发现$(\overline{x})_{k+1}^F$。显然，发现$(\overline{x})_{k+1}^F$，$(\overline{x})_{k+1}^F$是一个推理过程。

6　P-信息融合，逆 P-信息融合的推理发现

6.1　P-推理与推理结构

2011 年，文献[7]给出：

称$(x)_{k+1}^F$是$(x)_k^F$的内 P-推理生成信息，简称$(x)_{k+1}^F$是内 P-推理信息，如果$(x)_{k+1}^F$的属性集合α_{k+1}^F与$(x)_k^F$的属性集合α_k^F，$(x)_{k+1}^F$与$(x)_k^F$满足：

$$\text{if } \alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F,\text{then } (x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F \tag{73}$$

if $\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$, then $(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$称作内 P-集合生成的内 P-推理，简称内 P-推理。$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$称作内 P-推理条件，$(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$称作内 P-推理结论。

这里，$k\in(1,2,\cdots,n)$；$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$与$\alpha_k^F\subseteq\alpha_{k+1}^F$等价；$(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$与$(x)_{k+1}^F\subseteq(x)_k^F$等价。

称$(x)_{k+1}^F$是$(x)_k^F$的外 P-推理生成信息，简称$(x)_{k+1}^F$是外 P-推理信息，如果$(x)_{k+1}^F$的属性集合α_{k+1}^F与$(x)_k^F$的属性集合α_k^F，$(x)_{k+1}^F$与$(x)_k^F$满足：

$$\text{if } \alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F,\text{then } (x)_k^F\Rightarrow(x)_{k+1}^F \tag{74}$$

if $\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F$, then $(x)_k^F\Rightarrow(x)_{k+1}^F$称作外 P-集合生成的外 P-推理，简称外 P-推理。$\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F$称作外 P-推理条件，$(x)_k^F\Rightarrow(x)_{k+1}^F$称作外 P-推理结论。

称$((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$是内 P-推理与外 P-推理生成信息，简称$((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$是 P-推理信息，如果$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)$与$(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F)$，$((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$与$((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)$满足：

$$\text{if}(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F),\text{then}((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^F) \tag{75}$$

if$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F)$, then$((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$称作 P-推理。$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F)$称作 P-推理条件，$((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$称作 P-推理结论。

式(75)中，$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F)$表示$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$，$\alpha_{k+1}^F\Rightarrow$

α_k^F；$((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$表示$(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$，$(x)_k^F\Rightarrow(x)_{k+1}^F$。

称

$$\{(\text{if }\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F,\text{then }(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F)_i\mid i\in I\} \tag{76}$$

是内 P-推理生成的内 P-推理族，简称内 P-推理族。

$$\{(\text{if }\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F,\text{then}(x)_k^F\Rightarrow(x)_{k+1}^F)_j\mid j\in J\} \tag{77}$$

是外 P-推理生成的外 P-推理族，简称外 P-推理族。

称

$$\{(\text{if}(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F),\text{then}((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^F))_j\mid j\in J\} \tag{78}$$

是 P-推理生成的 P-推理族，简称 P-推理族。

由式(73)一式(78)得到：

命题 5 在$F=\overline{F}=\phi$的条件下，内 P-推理与内 P-推理族被还原成普通推理：if A，then B。

命题 6 在$F=\overline{F}=\phi$的条件下，外 P-推理与外 P-推理族被还原成普通推理：if A，then B。

命题 7 在$F=\overline{F}=\phi$的条件下，P-推理与 P-推理族被还原成普通推理：if A，then B。

这里，命题 5一命题 7 中的普通推理 if A，then B 中，A，B 是两个集合(概念)；或者，A，B 是两个命题。

把内 P-推理结论$(x)_{k+1}^F\Rightarrow(x)_k^F$用$(\overline{x})_k^F\Rightarrow(\overline{x})_{k+1}^F$代替；把外 P-推理结论$(x)_k^F\Rightarrow(x)_{k+1}^F$用$(\overline{x})_k^F\Rightarrow(\overline{x})_{k+1}^F$代替；把 P-推理结论$((x)_{k+1}^F,(x)_k^F)\Rightarrow((x)_k^F,(x)_{k+1}^F)$用$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_{k+1}^F)\Rightarrow((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_k^F)$代替。利用第 2 节中的逆 P-集合结构，改进 P-推理。

6.2 逆 P-推理与推理结构

称$(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的内逆 P-推理生成信息，简称$(\overline{x})_{k+1}^F$是内逆 P-推理信息，如果$(\overline{x})_{k+1}^F$的属性集合α_{k+1}^F与$(\overline{x})_k^F$的属性集合α_k^F，$(\overline{x})_{k+1}^F$与$(\overline{x})_k^F$满足

$$\text{if }\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F,\text{then }(\overline{x})_k^F\Rightarrow(\overline{x})_{k+1}^F \tag{79}$$

if $\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$，then $(\overline{x})_k^F\Rightarrow(\overline{x})_{k+1}^F$称作内逆 P-集合生成的内逆 P-推理，简称内逆 P-推理。$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$称作内逆 P-推理条件，$(\overline{x})_k^F\Rightarrow(\overline{x})_{k+1}^F$称作内逆 P-推理结论。

这里，$k=1,2,\cdots,n$。

称$(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的外逆 P-推理生成信息，简称$(\overline{x})_{k+1}^F$是外逆 P-推理信息，如果$(\overline{x})_{k+1}^F$的属性集合α_{k+1}^F与$(\overline{x})_k^F$的属性集合α_k^F，$(\overline{x})_{k+1}^F$与$(\overline{x})_k^F$满足：

$$\text{if }\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F,\text{then }(\overline{x})_{k+1}^F\Rightarrow(\overline{x})_k^F \tag{80}$$

if $\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F$，then $(\overline{x})_{k+1}^F\Rightarrow(\overline{x})_k^F$称作外逆 P-集合生成的外逆 P-推理，简称外逆 P-推理。$\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F$称作外逆 P-推理条件，$(\overline{x})_{k+1}^F\Rightarrow(\overline{x})_k^F$称作外逆 P-推理结论。

称$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_{k+1}^F)$是内逆 P-推理与外逆 P-推理生成信息，简称$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_{k+1}^F)$是逆 P-推理信息，如果$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)$与$(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F)$，$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_{k+1}^F)$与$((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_k^F)$满足：

$$\text{if}(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F),\text{then}((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_{k+1}^F)\Rightarrow((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_k^F) \tag{81}$$

if $(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F)$，then$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_{k+1}^F)\Rightarrow((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_k^F)$称作逆 P-推理。$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F)$称作逆 P-推理条件，$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_{k+1}^F)\Rightarrow((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_k^F)$称作逆 P-推理结论。

式(81)中，$(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F)$表示$\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F$，$\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F$；$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_{k+1}^F)\Rightarrow((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_k^F)$表示$(\overline{x})_k^F\Rightarrow(\overline{x})_{k+1}^F$，$(\overline{x})_{k+1}^F\Rightarrow(\overline{x})_k^F$。

称

$$\{(\text{if }\alpha_k^F\Rightarrow\alpha_{k+1}^F,\text{then}(\overline{x})_k^F\Rightarrow(\overline{x})_{k+1}^F)_i\mid i\in I\} \tag{82}$$

是内逆 P-推理生成的内逆 P-推理族，简称内逆 P-推理族。

$$\{(\text{if }\alpha_{k+1}^F\Rightarrow\alpha_k^F,\text{then}(\overline{x})_{k+1}^F\Rightarrow(\overline{x})_k^F)_j\mid j\in J\} \tag{83}$$

是外逆 P-推理生成的外逆 P-推理族，简称外逆 P-推理族。

称

$$\{(\text{if }(\alpha_k^F,\alpha_{k+1}^F)\Rightarrow(\alpha_{k+1}^F,\alpha_k^F),\text{then}((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_{k+1}^F)\Rightarrow((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_k^F))_j\mid j\in J\} \tag{84}$$

是逆 P-推理生成的逆 P-推理族，简称逆 P-推理族。

由式(79)一式(84)得到：

命题 8 在$F=\phi$的条件下，内逆 P-推理与内逆 P-推理族被还原成普通推理：if A，then B。

命题 9 在$\overline{F}=\phi$的条件下，外逆 P-推理与外逆 P-推理族被还原成普通推理：if A，then B。

命题 10 在$F=\overline{F}=\phi$的条件下，逆 P-推理与逆 P-推理族被还原成普通推理：if A，then B。

6.3 P-信息融合与逆 P-信息融合推理发现定理

定理 21(内 P-信息融合推理发现定理) 若$(x)_{k+1}^F$是被内 P-推理发现的$(x)_k^F$的内 P-信息融合，则$(x)_{k+1}^F$的属性集合α_{k+1}^F与$(x)_k^F$的属性集合α_k^F满足：

$$\text{card}(\alpha_{k+1}^F)-\text{card}(\alpha_k^F)>0 \tag{85}$$

式中，card=cardinal number。

证明：事实上，若$(x)_{k+1}^F$是被内 P-推理式(73)发现的$(x)_k^F$的内 P-信息融合，由式(17)得到$(x)_{k+1}^F$的属性集合α_{k+1}^F与$(x)_k^F$的属性集合α_k^F满足$\alpha_k^F\subseteq\alpha_{k+1}^F$；或者 card$(\alpha_k^F)<$card$(\alpha_{k+1}^F)$，得到式(85)。

定理 22(外 P-信息融合推理发现定理) 若$(x)_{k+1}^F$是被外 P-推理发现的$(x)_k^F$的外 P-信息融合，则$(x)_{k+1}^F$的属性集合α_{k+1}^F与$(x)_k^F$的属性集合α_k^F满足：

$$\text{card}(\alpha_{k+1}^F)-\text{card}(\alpha_k^F)<0 \tag{86}$$

证明与定理 21 类似，此略。

定理 21 与定理 22 指出：内 P-信息融合$(x)_{k+1}^F$是在$(x)_k^F$的属性集合α_k^F内被补充属性，在$(x)_k^F$之内被发现的；或者，$(x)_{k+1}^F\subseteq(x)_k^F$。外 P-信息融合$(x)_{k+1}^F$是在$(x)_k^F$的属性集合$\alpha_k^F$内被删除属性，在$(x)_k^F$之外被发现的；或者$(x)_k^F\subseteq(x)_{k+1}^F$。

定理 23(内逆 P-信息融合推理发现定理) 若$(\overline{x})_{k+1}^F$是被内逆 P-推理发现的$(\overline{x})_k^F$的内逆 P-信息融合，则$(\overline{x})_{k+1}^F$的属性集合α_{k+1}^F与$(\overline{x})_k^F$的属性集合α_k^F满足：

$$\text{card}(\alpha_{k+1}^F)-\text{card}(\alpha_k^F)>0 \tag{87}$$

定理 24(外逆 P-信息融合推理发现定理) 若$(\overline{x})_{k+1}^F$是被外逆 P-推理发现的$(\overline{x})_k^F$的外逆 P-信息融合，则$(\overline{x})_{k+1}^F$的属性集合α_{k+1}^F与$(\overline{x})_k^F$的属性集合α_k^F满足：

$$\text{card}(\alpha_{k+1}^F)-\text{card}(\alpha_k^F)<0 \tag{88}$$

定理 23 与定理 24 的证明分别与定理 21 与定理 22 类似，此略。

定理 23 与定理 24 指出：内逆 P-信息融合$(\overline{x})_{k+1}^F$是在$(\overline{x})_k^F$的属性集合α_k^F内被补充属性，在$(\overline{x})_k^F$之外被发现的；或者，$(\overline{x})_k^F\subseteq(\overline{x})_{k+1}^F$。外逆 P-信息融合$(\overline{x})_{k+1}^F$是在$(\overline{x})_k^F$的属性集合$\alpha_k^F$内被删除属性，在$(\overline{x})_k^F$之内被发现的；或者$(\overline{x})_{k+1}^F\subseteq(\overline{x})_k^F$。

命题 11 P-推理同时在$(x)_k^F$之内发现内 P-信息融合$(x)_{k+1}^F$,在$(x)_k^F$之外发现外 P-信息融合$(x)_{k+1}^F$。

命题 12 逆 P-推理同时在$(\overline{x})_k^F$之外发现内逆 P-信息融合$(\overline{x})_{k+1}^F$,在$(\overline{x})_k^F$之内发现外逆 P-信息融合$(\overline{x})_{k+1}^F$。

从第 6 节中给出的讨论,容易得到:利用 P-推理能够发现不被人们事先知道的未知 P-信息融合,这些发现是未知内 P-信息融合、未知外 P-信息融合与未知 P-信息融合。利用逆 P-推理能够发现不被人们事先知道的未知逆 P-信息融合,这些发现是未知内逆 P-信息融合、未知外逆 P-信息融合与未知逆 P-信息融合。人们自然要问 1°. 已被发现的内 P-信息融合$(x)_{k+1}^F$与已知的内 P-信息融合$(x)_k^F$之间存在什么样的度量关系?(或者,已被发现的外 P-信息融合$(x)_{k+1}^F$与已知的外 P-信息融合$(x)_k^F$之间存在什么样的度量关系?或者,已被发现的 P-信息融合$((x)_{k+1}^F,(x)_{k+1}^F)$与已知的 P-信息融合$((x)_k^F,(x)_k^F)$之间存在什么样的度量关系?)。2°. 已被发现的内逆 P-信息融合$(\overline{x})_{k+1}^F$与已知的内逆 P-信息融合$(\overline{x})_k^F$之间存在什么样的度量关系?(或者,已被发现的外逆 P-信息融合$(\overline{x})_{k+1}^F$与已知的外逆 P-信息融合$(\overline{x})_k^F$之间存在什么样的度量关系?或者,已被发现的逆 P-信息融合$((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_{k+1}^F)$与已知的逆 P-信息融合$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_k^F)$之间存在什么样的度量关系?)。

7 P-信息融合,逆 P-信息融合度量

称ρ_{k+1}^F是$(x)_{k+1}^F$关于$(x)_k^F$的内 P-信息融合度量,简称ρ_{k+1}^F是$(x)_{k+1}^F$的内 P-度量,而且

$$\rho_{k+1}^F=\mathrm{card}((x)_{k+1}^F)/\mathrm{card}((x)_k^F) \quad (89)$$

称ρ_{k+1}^F是$(x)_{k+1}^F$关于$(x)_k^F$的外 P-信息融合度量,简称ρ_{k+1}^F是$(x)_{k+1}^F$的外 P-度量,而且

$$\rho_{k+1}^F=\mathrm{card}((x)_{k+1}^F)/\mathrm{card}((x)_k^F) \quad (90)$$

式(89)、式(90)中,$\rho_{k+1}^F,\rho_{k+1}^F\in \mathrm{R}^+,k=1,2,\cdots,n$。

ρ_{k+1}^F与ρ_{k+1}^F构成的数对,称作$((x)_{k+1}^F,(x)_{k+1}^F)$的 P-度量,而且

$$(\rho_{k+1}^F,\rho_{k+1}^F) \quad (91)$$

如果ρ_{k+1}^F是$(x)_{k+1}^F$的内 P-度量,ρ_{k+1}^F是$(x)_{k+1}^F$的外 P-度量。

称η_{k+1}^F是$(\overline{x})_{k+1}^F$关于$(\overline{x})_k^F$的内逆 P-信息融合度量,简称η_{k+1}^F是$(\overline{x})_{k+1}^F$的内逆 P-度量,而且

$$\eta_{k+1}^F=\mathrm{card}((\overline{x})_{k+1}^F)/\mathrm{card}((\overline{x})_k^F) \quad (92)$$

称η_{k+1}^F是$(\overline{x})_{k+1}^F$关于$(\overline{x})_k^F$的外逆 P-信息融合度量,简称η_{k+1}^F是$(\overline{x})_{k+1}^F$的外逆 P-度量,而且

$$\eta_{k+1}^F=\mathrm{card}((\overline{x})_{k+1}^F)/\mathrm{card}((\overline{x})_k^F) \quad (93)$$

式(92)、式(93)中,$\eta_{k+1}^F,\eta_{k+1}^F\in \mathrm{R}^+,k=1,2,\cdots,n$。

η_{k+1}^F与η_{k+1}^F构成的数对,称作$((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_{k+1}^F)$的逆 P-度量,而且

$$(\eta_{k+1}^F,\eta_{k+1}^F) \quad (94)$$

如果η_{k+1}^F是$(\overline{x})_{k+1}^F$的内逆 P-度量,η_{k+1}^F是$(\overline{x})_{k+1}^F$的外逆 P-度量。

由式(89)—式(91)得到:

定理 25(内 P-信息融合度量离散区间内点定理) $(x)_{k+1}^F$是$(x)_k^F$的内 P-信息融合的充分必要条件是$(x)_{k+1}^F$的内 P-度量ρ_{k+1}^F是单位离散区间(0,1]的一个内点,或者

$$\rho_{k+1}^F\in(0,1] \quad (95)$$

式中,(0,1]是由数值 0 与$1=\rho=\mathrm{card}((x))/\mathrm{card}((x))$构成的单位离散区间,$\rho=\mathrm{card}((x))/\mathrm{card}((x))$是信息$(x)$的自身度量。

证明:取数值 0 与$1=\rho=\mathrm{card}((x))/\mathrm{card}((x))$作单位离散区间(0,1]。1°. 若$(x)_{k+1}^F$是$(x)_k^F$的内 P-信息融合,由式(61)得到$(x)_{k+1}^F\subseteq(x)_k^F$;或者,$\mathrm{card}((x)_{k+1}^F)\leqslant\mathrm{card}((x)_k^F)$。由式(89)得到$0<\rho_{k+1}^F=\mathrm{card}((x)_{k+1}^F)/\mathrm{card}((x)_k^F)\leqslant1$;或者$\rho_{k+1}^F\in(0,1]$。2°. 若$\rho_{k+1}^F=\mathrm{card}((x)_{k+1}^F)/\mathrm{card}((x)_k^F)$是$(x)_{k+1}^F$的内 P-度量,$\rho_{k+1}^F\in(0,1]$,则有$\mathrm{card}((x)_{k+1}^F)\leqslant\mathrm{card}((x)_k^F)$;或者$(x)_{k+1}^F\subseteq(x)_k^F$,由式(61)得到$(x)_{k+1}^F$是$(x)_k^F$的内 P-信息融合。

定理 26(外 P-信息融合度量离散区间外点定理) $(x)_{k+1}^F$是$(x)_k^F$的外 P-信息融合的充分必要条件是,$(x)_{k+1}^F$的外 P-度量ρ_{k+1}^F是单位离散区间(0,1]的一个外点,或者

$$\rho_{k+1}^F\overline{\in}(0,1] \quad (96)$$

证明与定理 25 类似,证明略。

定理 27(P-信息融合度量非空离散区间定理) $((x)_{k+1}^F,(x)_{k+1}^F)$是$((x)_k^F,(x)_k^F)$的 P-信息融合的充分必要条件是,$\rho_{k+1}^F$与$\rho_{k+1}^F$构成的离散区间$[\rho_{k+1}^F,\rho_{k+1}^F]$与(0,1]满足:

$$[\rho_{k+1}^F,\rho_{k+1}^F]\cap(0,1]\neq\phi \quad (97)$$

由式(92)—式(94)得到:

定理 28(内逆 P-信息融合度量离散区间外点定理) $(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的内逆 P-信息融合的充分必要条件是,$(\overline{x})_{k+1}^F$的内逆 P-度量η_{k+1}^F是单位离散区间(0,1]的一个外点,或者

$$\eta_{k+1}^F\overline{\in}(0,1] \quad (98)$$

证明:取数值 0 与$1=\mathrm{card}((x))/\mathrm{card}((x))$作单位离散区间(0,1]。1°. 若$(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的内逆 P-信息融合,由式(67)得到$(\overline{x})_k^F\subseteq(\overline{x})_{k+1}^F$;或者,$\mathrm{card}((\overline{x})_k^F)\leqslant\mathrm{card}((\overline{x})_{k+1}^F)$。由式(92)得到$1\leqslant\eta_{k+1}^F=\mathrm{card}((\overline{x})_{k+1}^F)/\mathrm{card}((\overline{x})_k^F)$;或者$\eta_{k+1}^F\overline{\in}(0,1]$。2°. 若$\eta_{k+1}^F=\mathrm{card}((\overline{x})_{k+1}^F)/\mathrm{card}((\overline{x})_k^F)$是$(\overline{x})_{k+1}^F$的内逆 P-度量,$\eta_{k+1}^F\overline{\in}(0,1]$,则有$\mathrm{card}((\overline{x})_{k+1}^F)\geqslant\mathrm{card}((\overline{x})_k^F)$;由式(67)得到:$(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的内逆 P-信息融合。

定理 29(外逆 P-信息融合度量离散区间内点定理) $(\overline{x})_{k+1}^F$是$(\overline{x})_k^F$的外逆 P-信息融合的充分必要条件是,$(\overline{x})_{k+1}^F$的外逆 P-度量η_{k+1}^F是单位离散区间(0,1]的一个内点,或者

$$\eta_{k+1}^F\in(0,1] \quad (99)$$

证明与定理 28 类似,此略。

定理 30(逆 P-信息融合度量非空离散区间定理) $((\overline{x})_{k+1}^F,(\overline{x})_{k+1}^F)$是$((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_k^F)$的逆 P-信息融合的充分必要条件是,$\eta_{k+1}^F$与$\eta_{k+1}^F$构成的离散区间$[\eta_{k+1}^F,\eta_{k+1}^F]$与(0,1]满足:

$$[\eta_{k+1}^F,\eta_{k+1}^F]\cap(0,1]\neq\phi \quad (100)$$

第 5 节中给出内 P-信息融合、外 P-信息融合与 P-信息融合;内逆 P-信息融合、外逆 P-信息融合与逆 P-信息融合。第 6 节中给出内 P-信息融合推理发现、外 P-信息融合推理发现与 P-信息融合推理发现;内逆 P-信息融合推理发现、外逆 P-信息融合推理发现与逆 P-信息融合推理发现。第 7 中给出内 P-信息融合的内 P-度量、外 P-信息融合的外 P-度量与 P-信息融合的 P-度量;内逆 P-信息融合的内逆 P-度量、外逆 P-信息融合的外逆 P-度量与逆 P-信息融合的逆 P-度量。第 8 节中对第 5—7 节的结果,给出继续讨论。

8 P-信息融合，逆P-信息融合的过滤-辨识

8.1 P-信息融合的颗粒特征与过滤-辨识

称$GRD((x)_k^F)$是内P-信息融合$(x)_k^F$的颗粒度，而且

$$GRD((x)_k^F)=\text{card}((x)_k^F)/\text{card}(U) \tag{101}$$

称$GRD((x)_k^F)$是外P-信息融合$(x)_k^F$的颗粒度，而且

$$GRD((x)_k^F)=\text{card}((x)_k^F)/\text{card}(U) \tag{102}$$

式(101)、式(102)中的GRD=granulation degree；U是一类信息系统中被采集得到的信息元x_k构成的信息(或传感器检测到的信息(数据)构成的信息)；它的应用意义在第9节中给出。

定理31(内P-信息融合颗粒定理)　内P-信息融合族$\{(x)_i^F|i=1,2,\cdots,n\}$中存在$(x)_p^F\in\{(x)_i^F|i=1,2,\cdots,n\}$，$(x)_p^F$的$GRD((x)_p^F)$满足：

$$GRD((x)_p^F)=\min_{i=1}^{n}(GRD(x)_i^F) \tag{103}$$

式中，$GRD((x)_p^F)=\mu,0<\mu\in R^+$；应用中，$\mu$是一个给定值。

证明：给定内P-信息融合族$\{(x)_1^F,(x)_2^F,\cdots,(x)_n^F\}$，由第2节中的式(1)—式(3)、式(9)得到$(x)_n^F\subseteq(x)_{n-1}^F\subseteq\cdots\subseteq(x)_2^F\subseteq(x)_1^F$；或者，$\text{card}((x)_n^F)\leqslant\text{card}((x)_{n-1}^F)\leqslant\cdots\leqslant\text{card}((x)_2^F)\leqslant\text{card}((x)_1^F)$。由式(101)得到$GRD((x)_n^F)\leqslant GRD((x)_{n-1}^F)\leqslant\cdots\leqslant GRD((x)_2^F)\leqslant GRD((x)_1^F)$；令$GRD((x)_p^F)=GRD((x)_n^F)$，得到式(103)。

定理32(外P-信息融合颗粒定理)　外P-信息融合族$\{(x)_j^F|j=1,2,\cdots,n\}$中存在$(x)_q^F\in\{(x)_j^F|j=1,2,\cdots,n\}$，$(x)_q^F$的$GRD((x)_q^F)$满足：

$$GRD((x)_q^F)=\max_{j=1}^{n}(GRD(x)_j^F) \tag{104}$$

式中，$GRD((x)_q^F)=\theta,\theta\in R^+$；应用中，$\theta$是一个给定值。

证明与定理31类似，此略。

由式(103)、式(104)得到：

1)内P-信息融合过滤-辨识准则

内P-信息融合$(x)_p^F$是$(x)_i^F$中最先被过滤的，$i=1,2,\cdots,n$；$(x)_p^F$具有最大属性集合$\alpha_{\max}^F$；而且

$$IDE((x)_P^F,(x)_{i=1,2,\cdots,p-1,p+1,n-1}^F) \tag{105}$$

式中，IDE=identification。

2)外P-信息融合过滤-辨识准则

外P-信息融合$(x)_q^F$是$(x)_j^F$中的过滤剩余，$j=1,2,\cdots,n$；$(x)_q^F$具有最小属性集合$\alpha_{\min}^F$；而且

$$IDE((x)_q^F,(x)_{j=1,2,\cdots,q-1,q+1,n-1}^F) \tag{106}$$

定理33(内逆P-信息融合颗粒定理)　内逆P-信息融合族$\{(\overline{x})_i^F|i=1,2,\cdots,n\}$中存在$(\overline{x})_\lambda^F\in\{(\overline{x})_i^F|i=1,2,\cdots,n\}$，$(\overline{x})_\lambda^F$的$GRD((\overline{x})_\lambda^F)$满足：

$$GRD((\overline{x})_\lambda^F)=\max_{i=1}^{n}(GRD(\overline{x})_i^F) \tag{107}$$

式中，$GRD((\overline{x})_\lambda^F)=\zeta,\zeta\in R^+$；应用中，$\zeta$是一个给定值。

证明：事实上，$\{(\overline{x})_i^F|i=1,2,\cdots,n\}$中的内逆P-信息融合满足$(\overline{x})_1^F\subseteq(\overline{x})_2^F\cdots\subseteq(\overline{x})_{n-1}^F\subseteq(\overline{x})_n^F$；或者，$\text{card}((\overline{x})_1^F)\leqslant\text{card}((\overline{x})_2^F)\leqslant\cdots\leqslant\text{card}((\overline{x})_{n-1}^F)\leqslant\text{card}((\overline{x})_n^F)$。与式(104)类似，得到$GRD((\overline{x})_1^F)\leqslant GRD((\overline{x})_2^F)\leqslant\cdots\leqslant GRD((\overline{x})_{n-1}^F)\leqslant GRD((\overline{x})_n^F)$；令$GRD((\overline{x})_\lambda^F)=GRD((\overline{x})_n^F)$，得到式(107)。

定理34(外逆P-信息融合颗粒定理)　外逆P-信息融合族$\{(\overline{x})_j^F|j=1,2,\cdots,n\}$中存在$(\overline{x})_k^F\in\{(\overline{x})_j^F|j=1,2,\cdots,n\}$，$(\overline{x})_k^F$的$GRD((\overline{x})_j^F)$满足：

$$GRD((\overline{x})_k^F)=\min_{j=1}^{n}(GRD(\overline{x})_j^F) \tag{108}$$

式中，$GRD((\overline{x})_k^F)=\tau,0<\tau\in R^+$；应用中，$\tau$是一个给定值。

由式(107)、式(108)得到：

1)内逆P-信息融合过滤-辨识准则

内逆P-信息融合$(\overline{x})_\lambda^F$是$(\overline{x})_i^F$的过滤剩余，$i=1,2,\cdots,n$；$(\overline{x})_\lambda^F$具有最大属性集合$\alpha_{\max}^F$；而且

$$IDE((\overline{x})_\lambda^F,(\overline{x})_{i=1,2,\cdots,\lambda-1,\lambda+1,n-1}^F) \tag{109}$$

2)外逆P-信息融合过滤-辨识准则

外逆P-信息融合$(\overline{x})_k^F$是$(\overline{x})_j^F$中最先被过滤的，$j=1,2,\cdots,n$；$(\overline{x})_k^F$具有最小属性集合$\alpha_{\min}^F$；而且

$$IDE((\overline{x})_k^F,(\overline{x})_{j=1,2,\cdots,k-1,k+1,n-1}^F) \tag{110}$$

过滤-辨识准则中，“过滤”的直接意义：

容器A,B中分别装盛玉米粒、小米粒。顽皮的孩童把容器B的小米粒倒入倒容器A的玉米粒中(或者，把小米与玉米融合在一起)；孩童的母亲找到一只筛子孔适中的筛子，把A中已融合的小米与玉米倒入筛子内，用筛子把小米、玉米分离。分离是一种“过滤”过程。小米被过滤在筛子外，玉米被留在筛子内；或者，玉米是“过滤剩余”。

9 P-集合，逆P-集合与信息智能融合-过滤辨识应用

因为研究领域的差异，专业术语的障碍与专业知识概念的限制给本节的讨论造成困难，所以在本节中给出两个能被一般人接受的应用例子，这些例子稍加扩展、改进就能够被应用到其它信息系统与信息工程中。

9.1 内P-信息融合过滤-辨识应用

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$构成山东省青岛市某集团公司$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$，$\forall x_i\in X$是$X$的子公司；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$构成$X$的属性集合，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$。这里，属性是市场特征，例如$\alpha_1$=市场份额，$\alpha_2$=原材料价格，等。$X$用信息$(x)$表示；或者$(x)=X$，$\alpha$是$(x)$的属性集合，$y$是信息$(x)$的信息值集合(集团公司2008年1—6月利润值)，而且

$$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\} \tag{111}$$

$$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\} \tag{112}$$

$$\begin{aligned} y&=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\}\\ &=\{\sum_{i=1}^{8}y_{i,1},\sum_{i=1}^{8}y_{i,2},\sum_{i=1}^{8}y_{i,3},\sum_{i=1}^{8}y_{i,4},\sum_{i=1}^{8}y_{i,5},\sum_{i=1}^{8}y_{i,6}\}\\ &=\{1.68,1.93,1.75,1.87,1.98,1.52\} \end{aligned} \tag{113}$$

式(113)中的数据是$\forall x_k\in(x)$的真实数据y_k($\forall x_k\in(x)$在2008年1—6月”的利润值y_k)经数据技术方法得到的，$y_k=\{y_{k,1},y_{k,2},y_{k,3},y_{k,4},y_{k,5},y_{k,6}\}$的真实数据，略，$k=1,2,3,4,5,6,7,8$。技术方法后的数据，不影响例子的分析。

2008年年底，爆发了全球性的金融危机，突发性的风险属性β_1,β_2,β_3在危机中生成，例如，β_1=多个供货合同被取消，β_2=汇率下降，等。β_1,β_2,β_3入侵到α内；或者元素迁移$f\in F$把β_1,β_2,β_3变成$f(\beta_1)=\alpha_1'$，$f(\beta_2)=\alpha_2'$，$f(\beta_3)=\alpha_3'$。$\alpha_1',\alpha_2',\alpha_2'\in\alpha$，$\alpha$变成$\alpha^F$，或者

$$\begin{aligned} \alpha^F&=\alpha\cup\{f(\beta_1),f(\beta_2),f(\beta_2)\}\\ &=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'\} \end{aligned} \tag{114}$$

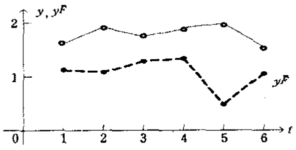
因为属性集合 α^F 的存在，(x)中的 x_2,x_5,x_6 从(x)内被删除(x_2,x_5,x_6 负利润经营，被迫关闭)；或者，元素迁移 $\bar{f}\in\bar{F}$ 把 x_2,x_5,x_6 变成 $f(x_2)=u_2,f(x_5)=u_5,f(x_6)=u_6$；$u_2,u_5,u_6\overline{\in}(x)$，$(x)$变成$(x)^F$，$(x)^F\subseteq(x)$，而且

$$(x)^F=\{x_1,x_3,x_4,x_7,x_8\}$$

$(x)^F$的信息值集合 y^F(2010 年 1 月－6 月的利润值)是

$$y^F=\{y_1^{\bar{f}},y_2^{\bar{f}},y_3^{\bar{f}},y_4^{\bar{f}},y_5^{\bar{f}},y_6^{\bar{f}}\}$$
$$=\{\sum_{i=1}^{5}y_{i,1},\sum_{i=1}^{5}y_{i,2},\sum_{i=1}^{5}y_{i,3},\sum_{i=1}^{5}y_{i,4},\sum_{i=1}^{5}y_{i,5},\sum_{i=1}^{5}y_{i,6}\}$$
$$=\{1.13,1.08,1.27,1.33,0.70,1.03\} \tag{115}$$

图 3 给出信息值集合 y 与 y^F的离散分布。



"——"是信息(x)的信息值 y 的离散分布

"－－－－"是信息$(x)^F$的信息值 y^F的离散分布

图 3

利用第 6－8 节中的结果，再认识这个例子。由第 6 节中的内 P-推理式(73) if $\alpha\Rightarrow\alpha^F$，then $(x)^F\Rightarrow(x)$得到 x_2,x_5,x_6 构成的(x)的子信息$(x)'=\{x_2,x_5,x_6\}\subseteq(x)$被"融合"到$(x)$之外；或者，$x_2,x_5,x_6\overline{\in}(x)$；或者，在内 P-推理条件 $\alpha\Rightarrow\alpha^F$ 的限定下，内 P-信息融合$(x)^F=\{x_1,x_3,x_4,x_7,x_8\}\subseteq\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}=(x)$在$(x)$内被发现；$(x)^F$被发现的原因是存在$\beta_1,\beta_2,\beta_3,f(\beta_1)=\alpha_1',f(\beta_2)=\alpha'_2,f(\beta_3)=\alpha_3'$入侵到$\alpha$ 内，α 变成α^F。利用第 7 节中的内 P-信息融合度量概念，内 P-信息融合$(x)^F$的融合度量ρ^F满足$\rho^F\in(0,1]$。利用第 8 节中的信息颗粒概念，内 P-信息融合$(x)^F$的颗粒 $GRD((x)^F)$与信息(x)的颗粒 $GRD(x)$满足 $GRD((x)^F)\leqslant GRD(x)$，$(x)^F$从$(x)$内被过滤，$(x)^F$与$(x)$满足 $IDE((x)^F,(x))$。因为例子中使用了内 P-推理，$(x)^F$被发现具有智能特征。

例子的扩展讨论：例子中的信息$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$可定义成"传感器"采集的信息元 x_k 构成的信息，$y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7,y_8\}$可定义成信息元 $x_k\in(x)$的信息值。在某种条件的限定下，$x_1－x_8$ 中有一些信息元 x_k 是有用的，有一些信息元 x_k 是冗余的。给定阈值 $\lambda\in R^+$，在 $y_1－y_8$ 中选择 $y_p\geqslant\lambda$ 的信息元 x_p，x_p 构成$(x)^F\subseteq(x)$，满足 $y_q<\lambda$ 的信息元 x_q 被融合到(x)之外；显然，这个过程是"滤波器"的特征。例子扩展到具体的信息系统应用，留给读者。

9.2 内逆 P-信息融合过滤-辨识应用

集团公司 A 每年都在理工类的高校中招收新的专业人才，对招聘的人才需满足公司 A 事先确定的人才属性集合 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$；$\alpha_1$＝理工类硕士学位研究生，$\alpha_2$＝一定的研发技能，$\alpha_3$＝动手能力。依据 α，公司 A 确定招聘人选，得到人才集合 X，把 X 用信息(x)表示，则有

$$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\} \tag{116}$$

$$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \tag{117}$$

公司 A 在招聘中发现，一些优秀本科生的人才属性并不比硕士研究生差，甚至超过硕士生，这些本科生弃之可惜，因此人才属性集合 α 内补充属性 β＝优秀本科生；式(116)中的(x)、式(117)中的 α 分别成为$(\overline{x})^F,\alpha^F$，而且

$$(\overline{x})^F=(x)\cup\{x_1',x_2',x_3'\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_1',x_2',x_3'\} \tag{118}$$

$$\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha_1'\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1'\} \tag{119}$$

事实上，式(119)中元素迁移 $f\in F$ 把$\beta_1\overline{\in}\alpha$ 变成$f(\beta_1)=\alpha_1'\in\alpha$；$\alpha$ 变成 α^F，$\alpha\subseteq\alpha^F$；式(118)中，元素迁移 $f\in F$ 把 $u_1,u_2,u_3\overline{\in}(x)$变成 $f(u_1)=x_1',f(u_2)=x_2',f(u_3)=x_3'$；$x_1',x_2',x_3'\in(x)$，$(x)$变成$(\overline{x})^F$，$(x)\subseteq(\overline{x})^F$。

利用第 6－8 节中的结果，再认识这个例子。由第 6 节中的内逆 P-推理式(79)

if $\alpha\Rightarrow\alpha^F$，then $(x)\Rightarrow(\overline{x})^F$

得到(x)是$(\overline{x})^F$ 的子信息，$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}\subseteq\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_1',x_2',x_3'\}=(\overline{x})^F$，$x_1',x_2',x_3'$被"融合"到$(x)$之内；或者，$x_1',x_2',x_3'\in(x)$。在内逆 P-推理条件 $\alpha\Rightarrow\alpha^F$ 的限定下，内逆 P-信息融合$(\overline{x})^F$ 在(x)外被发现；或者$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}\subseteq\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_1',x_2',x_3'\}=(\overline{x})^F$。$(\overline{x})^F$ 被发现的原因是存在$\beta_1,f(\beta_1)=\alpha_1'$入侵到$\alpha$ 内，α 变成α^F。利用第 7 节中的内逆 P-信息融合度量概念，内逆 P-信息融合$(\overline{x})^F$ 的融合度量 η^F 满足 $\eta^F\overline{\in}(0,1]$。利用第 8 节中的信息颗粒概念，内逆 P-信息融合$(\overline{x})^F$ 的颗粒 $GRD((\overline{x})^F)$与信息(x)的颗粒 $GRD((x))$满足 $GRD((x))\leqslant GRD((\overline{x})^F)$；$(\overline{x})^F$ 是(x)的过滤剩余，$(\overline{x})^F$ 与(x)满足 $IDE((\overline{x})^F,(x))$。因为例子中使用了内逆 P-推理，$(\overline{x})^F$ 被发现具有智能特征。

例子的扩展讨论：在信息系统中，经常要进行信息(数据)采集，$t\in T$ 时刻采集的信息(数据)是$(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$(或者数据 $y=\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}$)，原始信息(x)不满足实验要求；或者，(x)是一个不完整的信息(一些信息元 x_i 被遗漏)。人们在 $t+\lambda\in T$ 时刻进行信息补充采集，得到$(x)'=\{x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n\}$，信息$(\overline{x})^F=(x)\cup(x)'=\{x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n\}$满足实验要求。显然，$x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n$ 是被融合到(x)内的信息元；$(\overline{x})^F$ 是(x)的内逆 P-信息融合。如果把 $t\in T$ 定义成属性α_1，或者 $t=\alpha_1$，则有属性集合 $\alpha=\{\alpha_1\}$；把 $t+\lambda\in T$ 定义成属性α_2，或者 $t+\lambda=\alpha_2$，则有属性集合 $\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha_2\}=\{\alpha_1,\alpha_2\}$。因为 α^F 的存在，使得内逆 P-信息融合$(\overline{x})^F$ 存在。例子扩展到具体的信息系统应用，留给读者。

10 诸多讨论与建议

P-集合、逆 P-集合是从两个事实中对两个事实给予数学抽象得到的两个数学结构与数学模型。P-集合与逆 P-集合具有相反的动态特征。P-集合、逆 P-集合是用模型表达两类动态信息系统的动态特征；换一个说法，对于两类动态信息系统的动态本性，P-集合与逆 P-集合从数学理论上对它们给出抽象认识。P-集合、逆 P-集合为深入认识两类动态信息系统动态特征的本质，寻找潜藏在两类动态信息系统的背后不被人们事先知道的新概念、新特性，提供了数学理论支持与研究工具的准备。把两类动态信息系统抽象成 P-集合、逆 P-集合是一种必然。

P-集合、逆 P-集合的存在来自元素迁移的概念，元素迁移使得有限普通集合 X 具有了动态特性，X 变成 P-集合；或者，X 变成逆 P-集合。因为集合 X 具有属性集合α，在α 内不断地补充一些属性，同时又不断地删除另一些属性，在这样的

动态特征下，有限普通集合 X 变成多个集合对$(X_1^F, X_1^{\bar{F}})$，$(X_2^F, X_2^{\bar{F}}), \cdots, (X_n^F, X_n^{\bar{F}})$；$\forall i,j \in (1,2,\cdots,n)$，$(X_i^F, X_j^{\bar{F}})$是 P-集合；$X_i^F \subseteq X, X \subseteq X_j^{\bar{F}}$。或者，有限普通集合 X 变成多个集合对$(\overline{X}_1^F, \overline{X}_1^{\bar{F}}), (\overline{X}_2^F, \overline{X}_2^{\bar{F}}), \cdots, (\overline{X}_n^F, \overline{X}_n^{\bar{F}})$；$\forall i,j \in (1,2,\cdots,n)$，$(\overline{X}_i^F, \overline{X}_j^{\bar{F}})$是逆 P-集合；$X \subseteq \overline{X}_i^F, \overline{X}_j^{\bar{F}} \subseteq X$。在普通数学中（数学分析，离散数学），有限普通集合 X 只作为一个概念被人们使用着，它的动态特性没有引起人们的注意。用有限普通集合的概念去研究具有动态特征的信息系统，使人们感到研究工具的缺失。寻找与两类信息系统动态特征相似的新的数学模型：P-集合、逆 P-集合又是一种必然。从 P-集合、逆 P-集合的结构中容易看到 P-集合、逆 P-集合与粗集、S-粗集、函数 S-粗集[46-51]不是一个数学概念，尽管它们的表示形式都是集合对的形式。

元素迁移是函数概念：例如$[a,b]$，$[c,d]$分别是函数的、义域、值域；$a,b,c,d \in \mathbf{R}$；$\forall x_k \in [a,b]$，元素迁移 $f \in F$ 把 x_k 从$[a,b]$内迁移到$[c,d]$内；在迁移中，$f \in F$ 把 x_k 变成 $f(x_k) = y_k \in [c,d]$。函数概念中潜藏着“迁移”概念，只是没有引起人们的注意。元素迁移 $f \in F, \bar{f} \in \bar{F}$ 在信息系统应用中，它们是一个具体的函数表达式，要根据所研究的具体信息系统，给出它们的具体设计；或者给出 $f \in F, \bar{f} \in \bar{F}$ 的具体的函数表达式。如果把 P-集合、逆 P-集合应用到具体的信息系统，设计出具体的应用软件，则元素迁移 $f \in F, \bar{f} \in \bar{F}$ 的函数形式是软件中的核心技术之一；元素迁移 $f \in F, \bar{f} \in \bar{F}$ 的函数形式是多种多样的。

在计算机系统，信息系统应用中，给定信息$(x) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$x_k \in (x)$是$(x)$的信息元。$y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$是$(x)$的信息值构成的数据集合，$\forall y_k \in y$ 是信息元 $x_k \in (x)$的信息值，$y_k \in \mathbf{R}, k = 1,2,\cdots,n$。利用 $a = \min\limits_{k=1}^{n}(y_k)$，$b = \max\limits_{k=1}^{n}(y_k)$作离散区间$[a,b]$，显然，$\forall y_i \in [a,b]$，具有 y_i 的 x_i 满足 $x_i \in (x)$，$i \in (1,2,\cdots,n)$；$\forall y_j \overline{\in} [a,b]$，具有 y_j 的 x_j 满足 $x_j \overline{\in} (x)$。因此，1°. 若 $u \in U, u \overline{\in} (x)$，$u$ 的信息值 $y^* \overline{\in} [a,b]$；元素迁移 $f \in F$ 把 u 具有的信息值 y^* 变成 $f(y^*) = y_k \in [a,b]$；u 变成(x)之内的一个元素，或者写作 $f(u) = x' \in (x)$，(x)变成$(x)^* = (x) \cup \{f(u)\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, x'\}$；$(x)$外的信息元 u 被迁入到(x)内。2°. 若 $x_k \in (x)$，x_k 的信息值 $y_k \in [a,b]$；元素迁移 $\bar{f} \in \bar{F}$ 把 x_k 具有的信息值 y_k 变成 $\bar{f}(y_k) = r_k \overline{\in} [a,b]$；$x_k$ 变成(x)之外的一个元素，或者写作 $\bar{f}(x_k) = u_k \overline{\in} (x)$，$(x)$变成$(x)^{\circ} = (x) - \{\bar{f}(x_k)\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n\}$；$(x)$内的信息元 x_k 被迁到(x)外。利用这些简短的讨论，再回到本文的第 2 节内：式(2) $X^- = \{x \mid x \in X, \bar{f}(x) = u \overline{\in} X, \bar{f} \in \bar{F}\}$，式(6) $\alpha^F = \alpha - \{\beta_\lambda \mid \bar{f}(\alpha_\lambda) = \beta_\lambda \overline{\in} \alpha, \bar{f} \in \bar{F}\}$是由数学式子抽象地表达 2°。式(5) $X^+ = \{u \mid u \in U, u \overline{\in} X, f(u) = x' \in X, f \in F\}$，式(3) $\alpha^F = \alpha \cup \{\alpha' \mid f(\beta) = \alpha' \in \alpha, f \in F\}$是由数学式子抽象地表达 1°。第 2 节中给出的 P-集合、逆 P-集合的数学结构与模型的表达中，不可能把这些细节都在数学结构中一一给出。正如在一个微分方程的表达形式中，不可能把方程解的特征也在方程的表达形式中一一给出是一样的。理解 1°—2°给出的简短讨论，设计出元素迁移 $f \in F, \bar{f} \in \bar{F}$ 不是一件困难的事。或许，年轻的学者们，从这个简短的讨论中得到的更多。

信息融合(information fusion)产生于 1973 年美国国防部资助的项目“声纳信号理解”中，它的原始名称是数据融合(data fusion)，直到 1998 年“数据融合”更名为“信息融合”。信息融合的多数成果应用于军事工程领域。最近，信息融合的研究越来越多的出现在信息科学、信息工程与计算机系统中，被一般应用领域所接受。国际、国内的多个学者，在信息融合研究中给出了多个优秀成果[52-60]。本文把 P-集合、逆 P-集合、P-推理、逆 P-推理与信息融合交叉，渗透给出研究，得到一些初步结果；这仅是把 P-集合、逆 P-集合、P-推理、逆 P-推理与信息融合交叉研究的一个开始；这里还有一个很大的可扩展研究的空间。把信息融合研究已得到的结果[52-60]，再用 P-集合、逆 P-集合给出进一步的讨论，或许可以得到一些更新的结果。事实上，P-集合、逆 P-集合是把动态特性引入到有限普通集合 X 内，改进有限普通集合 X，得到的两个动态特征相反的数学结构与数学模型。如果用 P-集合、逆 P-集合表达信息融合，或许能找到信息融合的另一个新的研究分支，或许能找到潜藏在信息融合中的一些新的研究方法；显然，得到的研究结果也是新的；这些新的结果可能是在无意之中得到的，对此感兴趣的年轻一代，不妨到这个研究领域里走一走，收获肯定多多；事情就是这样的偶然。如果这个新的研究分支，新的研究方法被找到，那么 P-集合、逆 P-集合为应用前景看好的信息融合研究做了一点事。

参 考 文 献

[1] 史开泉. P-集合[J]. 山东大学学报：理学版，2008，43(11)：77-84

[2] Shi Kai-quan. P-sets and its applications[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications，2009，9(2)：209-219

[3] 史开泉. 函数 P-集合[J]. 山东大学学报：理学版，2011，46(2)：62-69

[4] Shi Kai-quan. Function P-sets[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics，2011，2(4)：281-288

[5] 史开泉. 逆 P-集合[J]. 山东大学学报：理学版，2012，47(1)：98-109

[6] 史开泉. P-集合与它的应用特性[J]. 计算机科学，2010，37(8)：1-8

[7] 史开泉. P-推理与信息的 P-推理发现-辨识[J]. 计算机科学，2011，38(7)：1-9

[8] Shi Kai-quan，Li Xiu-hong. Camouflaged information identification and its application [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications，2010，10(2)：157-167

[9] 张丽，崔玉泉，史开泉. 外 P-集合与数据内-恢复[J]. 系统工程与电子技术，2010，32(6)：1233-1238

[10] 张飞，陈萍，张丽. P-集合的 P-分离与应用[J]. 山东大学学报：理学版，2010，45(3)：18-22

[11] 史开泉，张丽. 内 P-集合与数据外-恢复[J]. 山东大学学报：理学版，2009，44(4)：8-14

[12] Zhang Li，Cui Yu-quan. Outer P-sets and data internal recovery [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications，2010，10(2)：189-199

[13] Zhang Li，Xiu Ming，Shi Kai-quan. P-sets and applications of internal-outer data circle[J]. Quantitative Logic and Soft Computing，2010，1(2)：581-592

[14] Li Yu-ying, Zhang Li, Shi Kai-quan. Generation and recovery of compressed data and redundant data[J]. Quantitative Logic and Soft Computing, 2010, 1(2): 661-672
[15] Xiu Ming, Shi Kai-quan, Zhang Li. P-sets and $\bar{F}$-data selection-discovery[J]. Quantitative Logic and Soft Computing, 2010, 1(2): 791-800
[16] 周玉华，张冠宇，张丽. 内-外数据圆与动态数据-恢复[J]. 山东大学学报：理学版，2010，45(8)：21-26
[17] Lin Hong-kang, Li Yu-ying. P-sets and its P-separation theorems[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 209-215
[18] 周玉华，张冠宇，史开泉. P-集合与双信息规律生成[J]. 数学的实践与认识，2010，40(13)：71-80
[19] Wang Yang, Geng Hong-qin, Shi Kai-quan. The mining of dynamic information based on P-sets and its application[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 234-240
[20] Zhang Guan-yu, Li En-zhong. Information gene and identification of its information knock-out/knock-in[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 308-315
[21] Huang Shun-liang, Wang Wei, Geng Dian-you. P-sets and its internal P-memory characteristics[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 216-222
[22] Liu Ji-qin. P-probabilities and its application [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 200-222
[23] 张冠宇，周厚勇，史开泉. P-集合与双 P-数据恢复-辨识[J]. 系统工程与电子技术，2010，32(9)：1919-1924
[24] 于秀清. P-集合的识别与筛选[J]. 山东大学学报：理学版，2010，45(1)：94-98
[25] 汤积华，陈保会，史开泉. P-集合与$(\bar{F},F)$数据生成-辨识[J]. 山东大学学报：理学版，2009，44(11)：83-92
[26] 李豫颖，谢维奇，史开泉. $\bar{F}$-残缺数据的辨识与恢复[J]. 山东大学学报：理学版，2009，45(9)：57-64
[27] 刘若慧，刘保仓，史开泉. 外 P-集合与 F-信息伪装[J]. 系统工程与电子技术，2011，33(1)：116-119
[28] 耿红琴，张冠宇，史开泉. F-信息伪装与伪装-还原辨识[J]. 计算机科学，2011，38(2)：241-245
[29] 汪洋，张冠宇，史开泉. P-集合与 $\bar{F}$-记忆信息特征-应用[J]. 计算机科学，2011，38(2)：246-249
[30] 于秀清. P-集合与 F-外嵌入信息辨识-发现[J]. 计算机科学，2011，38(2)：250-253
[31] 于秀清，徐风生. P-规律推理与未知规律发现-应用[J]. 山东大学学报：理学版，2012，47(1)：110-115
[32] 张世良，李豫颖，林宏康. 半 P-集合$(X^{\bar{F}},X^F)$与 $\bar{F}$-导航数据的路径匹配[J]. 山东大学学报：理学版，2012，47(1)：116-126
[33] 林蓉，范成贤. 函数 P-集合与信息规律动态特征[J]. 山东大学学报：理学版，2012，47(1)：121-126
[34] 李豫颖，史开泉. 半 P-集合$(X^{\bar{F}},X^F)$与信息的内-真度环特征[J]. 计算机科学，2011，33(4)：239-248
[35] 于秀清. 迭代 F-内嵌入信息生成及其遗传发现-应用[J]. 系统工程与电子技术，2011，22(12)：2691-2731
[36] 林宏康，范成贤，史开泉. 倒向 P-推理与属性剩余发现-应用[J]. 计算机科学，2011，38(10)：189-198
[37] 李豫颖，范成贤，史开泉. 混合记忆信息与记忆筛选[J]. 系统工程与电子技术，2011，33(8)：1824-1828
[38] 赵文菊，范成贤. 函数 P-集合属性依赖与应用[J]. 山东大学学报：理学版，2011，46(6)：115-126
[39] 李豫颖，阮群生. 内-递推信息的辨识-还原[J]. 山东大学学报：理学版，2011，46(6)：121-126
[40] 李豫颖，林宏康，史开泉. 数据离散区间特征与数据发现-应用[J]. 系统工程与电子技术，2011，33(10)：2258-2262
[41] 赵占平，周厚勇，谢黎明. P-集合及其测度空间[J]. 山东大学学报：理学版，2011，46(8)：122-126
[42] 汪洋，张冠宇，张丽. P-集合与 $\bar{F}$-信息的动态分离特征[J]. 山东大学学报：理学版，2011，46(3)：35-40
[43] 李豫颖，林宏康. $(\bar{F},F)$-数据离散矩形区域在数据辨识中的应用[J]. 山东大学学报：理学版，2011，46(3)：46-51
[44] Fan Cheng-xian, Lin Hong-kang. P-sets and the reasoning-identification of disaster information [J]. International Journal of Convergence Information Technology, 2012, 7(1): 337-345
[45] Lin Hong-kang, Fan Cheng-xian. The dual form of P-reasoning and identification of unknown attribute[J]. International Journal of Digital Content Technology and its Applications, 2012, 6(1): 121-131
[46] 史开泉，姚炳学. 函数 S-粗集与规律辨识[J]. 中国科学 E：信息科学，2008，38(4)：553-564
[47] 史开泉，赵建立. 函数 S-粗集与隐藏规律安全-认证[J]. 中国科学 E：信息科学，2008，38(8)：1234-1243
[48] Shi Kai-quan, Yao Bing-xue. Function S-rough sets and law identification[J]. Science in China F: Information Sciences, 2008, 51(5): 499-510
[49] Shi Kai-quan, Zhao Jian-li. Function S-rough sets and security-authentication of hiding law[J]. Science in China F: Information Science, 2008, 51(7): 924-935
[50] 史开泉，崔玉泉. S-粗集与粗决策[M]. 北京：学科出版社，2006：41-47
[51] 史开泉，姚炳学. 函数 S-粗集与系统规律挖掘[M]. 北京：科学出版社，2007：147-198
[52] Figue J, Grabisch M, Charbonnle M P. A method for still image interpretation relying on a multi algorithems fusion scheme. Application to human face characterization[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999(103): 317-337
[53] Robinson G D, Harry N. Evaluation of two application of spectral mixing models to image fusion[J]. Remote sens envirion, 2000(71): 272-281
[54] 杨宝强，张雄，李洪烈. 信息融合技术研究及其应用[J]. 空军工程大学学报，2005，5(2)：41-44
[55] 董志荣. 再论信息融合[J]. 舰船论证参考，2002(4)：8-12
[56] 董志荣. 论信息融合[J]. 情报指挥控制系统与仿真技术，2001(7)：27-36
[57] Varshney P K. Multisensor data fusion [J]. Journal of Electronics Computer Engineering, 1997, 9(6): 245-253
[58] 赵杰，崔智社，等. 信息融合的实质及其核心技术[J]. 情报指挥控制系统与仿真技术，2003(8)：38-42
[59] 何友，彭应宁，等. 多传感器数据融合模型评述[J]. 清华大学学报，1996(9)：68-70
[60] Waltz E, Llinas J. Multisensor data fusion[M]. Artech House, INC, 1990: 47-92