广义的直觉模糊蕴涵及剩余格

薛占熬[1] 肖运花[1] 程惠茹[1] 薛海峰[2]
（河南师范大学计算机与信息技术学院 新乡 453007）[1] （中央广播电视大学信息管理处 北京 100031）[2]

摘 要 直觉模糊蕴涵是直觉模糊推理的重要基础，为直觉模糊集在不确定信息系统下推理和决策中的应用提供了理论基础。对直觉模糊蕴涵进行了研究。首先回顾了直觉模糊的有关基础知识，在此基础上构造了一种新的广义的直觉模糊蕴涵，证明了其单调性、边界性等系列重要性质，最后证明了该蕴涵可构成直觉模糊剩余格。

关键词 直觉模糊集，直觉模糊蕴涵，直觉模糊剩余格

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A

Generalized Intuitionistic Fuzzy Implication and its Residuated Lattice

XUE Zhan-ao[1] XIAO Yun-hua[1] CHENG Hui-ru[1] XUE Hai-feng[2]
(College of Computer and Information Technology, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)[1]
(IT Center, China Central Radio and TV University, Beijing 100031, China)[2]

Abstract Intuitionistic fuzzy implication plays an important role in the intuitionistic fuzzy reasoning, and provides basic theory for applications of the uncertain reasoning and decision-making. The instuitionistic fuzzy implication was researched. The basic knowledge of the intuitionistic fuzzy was firstly reviewed, a new kind of the generalized intuitionistic fuzzy implication was constructed, and its properties were proved, such as its monotonicity law and boundary, etc. Furthermore, it was proved that the implication can construct the intuitionistic fuzzy residuated lattice.

Keywords Intuitionistic fuzzy sets, Intuitionistic fuzzy implication, Intuitionistic fuzzy residuated lattice

直觉模糊集(Intuitionistic Fuzzy Set, IFS)是由 Atanassov 于 1986 年提出的[1]，是对 Zadeh 模糊集理论的一种扩充与发展[2]。直觉模糊集在模糊集上增加一个非隶属函数，描述了“非此非彼”的“模糊概念”，更加细腻地刻画了客观世界的模糊性，能更好地反映日常中不精确、不确定性的现象，在决策分析和模式识别等领域得到了广泛应用。因此，对直觉模糊集的理论与应用研究具有重要意义，其研究已成为目前不确定信息研究的热点之一。1989 年 Bubeascu 提出了直觉模糊关系的思想[3]，1996 年 Bustince 给出了直觉模糊关系及其合成的定义[4]，2000 年又给出了一种直觉模糊关系的构造方法[5]。近两三年，贺正洪、雷英杰给出了一种直觉模糊相似矩阵构造方法[6]，周磊、吴伟志对广义的直觉模糊粗糙近似算子进行了研究[7,8]，杨勇、朱晓钟给出了一组直觉模糊粗糙集的公理系统[9]，Beliakov 关于直觉模糊平均算子进行了研究[10]等，这些均对直觉模糊集理论进行了深入研究。

而直觉模糊蕴涵是直觉模糊推理的重要基础，为直觉模糊集在不确定信息系统下推理和决策中的应用提供了理论基础，是直觉模糊研究领域的重要组成部分，得到了众多学者的关注，并进行研究。徐小来、雷英杰研究了直觉模糊三角模的剩余蕴涵及其性质[11]，2010 年李璧镜、王国俊研究了广义三角模和广义剩余蕴涵的对应关系[12]，等。本文在直觉模糊集理论基础上，对直觉模糊蕴涵进行了研究。首先回顾了直觉模糊集的有关知识，然后构造了一种新的广义直觉模糊蕴涵，证明了其单调性、边界性等重要性质，最后证明了该蕴涵可构成直觉模糊剩余格(residuated lattice)。该研究为直觉模糊逻辑的丰富和完善提供了理论基础。

1 基本理论

定义 1[1] 设 U 是一个给定论域，则 U 上的一个直觉模糊集 A 为

$$A(x)=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle \mid x\in U\}$$

式中，$\mu_A(x):U\to[0,1]$ 和 $\nu_A(x):U\to[0,1]$ 分别代表 A 的隶属函数和非隶属函数，且对于 A 上的所有 $x\in U$，$0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1$ 成立。

对于 U 中的每一个直觉模糊子集，称 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ 为 A 中 x 的直觉指数(intui- tionistic index)，它是 x 对 A 的犹豫程度(hesitancy degree)的一种测度。显然，对于每一个 $x\in U$，$0\leqslant\pi_A(x)\leqslant 1$。$U$ 上的一切直觉模糊集记作 $IFS(U)$。

在 $A(x)=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle \mid x\in U\}$ 中，当 $\nu_A(x)=1-$

到稿日期：2011-04-07 返修日期：2011-06-04 本文受河南省重点科技攻关项目(092102210149)，河南省教育厅自然科学研究计划项目(2009B520015)资助。

薛占熬(1963－)，男，博士，教授，主要研究方向为人工智能基础理论，E-mail: xuezhanao@163.com；**肖运花**(1986－)，女，硕士生，主要研究方向为模糊集理论；**程惠茹**(1983－)，女，硕士生，主要研究方向为粗糙集理论；**薛海峰**(1975－)，男，博士，助理研究员，主要研究方向为教育信息化、信息安全和远程教育技术。

$\mu_A(x)$时，A 就退化为一般的模糊集。为方便，直觉模糊集 A 可以简记为 $A(x)=(\mu_A(x),\nu_A(x))$。

定义 2(直觉模糊关系)[6] 设 X 和 Y 是 $IFS(U)$ 的子集，定义在直积空间 $X\times Y$ 上的直觉模糊子集称为从 X 到 Y 之间的二元直觉模糊关系，记为

$R(x,y)=\{\langle(x,y),\mu_R(x,y),\nu_R(x,y)\rangle\,|\,x\in X,y\in Y\}$

式中，$\mu_R:X\times Y\to[0,1]$和 $\nu_R:X\times Y\to[0,1]$分别代表 R 的隶属函数和非隶属函数，满足条件 $0\leqslant\mu_R(x,y)+\nu_R(x,y)\leqslant 1$，$\forall(x,y)\in X\times Y$。

直觉模糊关系也是一种直觉模糊集合，它在基于直觉模糊推理和知识处理中十分有用。

定义 3[1] 设 $A,B\in IFS(U)$，$x\in U$，$A(x)=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\,|\,x\in U\}$，$B(x)=\{\langle x,\mu_B(x),\upsilon_B(x)\rangle\,|\,x\in U\}$，定义两个直觉模糊集的包含关系、等价关系如下：

(1) $A\subseteq B$，当且仅当 $\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$，$\nu_B(x)\leqslant\nu_A(x)$；

(2) $A=B$，当且仅当 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$，$\nu_A(x)=\nu_B(x)$。

定义 4[1] 设 $A,B\in IFS(U)$，$x\in U$，$A(x)=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\,|\,x\in U\}$，$B(x)=\{\langle x,\mu_B(x),\upsilon_B(x)\rangle\,|\,x\in U\}$，定义两个直觉模糊集的交、并、补运算如下：

(1) $A\Cap B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\rangle\,|\,x\in U\}$；

(2) $A\Cup B=\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle\,|\,x\in U\}$；

(3) $A^c(x)=\{\langle x,\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle\,|\,x\in U\}$。

定义 5[8,9] 直觉模糊集上常数的定义：

$(\alpha,\beta)=\{\langle x,\alpha,\beta\rangle\,|\,x\in U\}$，其中 $\alpha,\beta\in[0,1]$且 $\alpha+\beta\leqslant 1$。

在 IFS 中，全集 $1_{IFS}=U=(1,0)=\{\langle x,1,0\rangle\,|\,x\in U\}$，空集 $0_{IFS}=\phi=(0,1)=\{\langle x,0,1\rangle\,|\,x\in U\}$。

定义 6[1] 设 $IFS=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1+x_2\leqslant 1,(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1]\}$，对于任意$(x_1,x_2)$，$(y_1,y_2)\in IFS$，定义序关系$\leqslant_{IFS}$如下：$(x_1,x_2)\leqslant_{IFS}(y_1,y_2)$，当且仅当 $x_1\leqslant y_1$，$x_2\geqslant y_2$。

定理 1 设 $IFS=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1+x_2\leqslant 1,(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1]\}$，对于任意$(x_1,x_2)$，$(y_1,y_2)\in IFS$，序关系为$\leqslant_{IFS}$，则$(IFS,\leqslant_{IFS})$是完备格。其中最小元为 $0_{IFS}=(0,1)$，最大元为 $1_{IFS}=(1,0)$。

证明：根据定义 6 和完备格的定义，容易得证，略。

显然，论域 U 上的直觉模糊集合 A 和序关系为$\leqslant_{IFS}$组成的$(A,\leqslant_{IFS})$是完备格。

定理 2 设 $A,B,C\in IFS(U)$，则直觉模糊集具有以下性质

(1) 幂等律 $A\Cup A=A$，$A\Cap A=A$；

(2) 交换律 $A\Cup B=B\Cup A$，$A\Cap B=B\Cap A$；

(3) 结合律 $(A\Cup B)\Cup C=A\Cup(B\Cup C)$，$(A\Cap B)\Cap C=A\Cap(B\Cap C)$；

(4) 分配律 $A\Cap(B\Cup C)=(A\Cap B)\Cup(A\Cap C)$，$A\Cup(B\Cap C)=(A\Cup B)\Cap(A\Cup C)$；

(5) 吸收律 $A\Cap(A\Cup B)=A$，$A\Cup(A\Cap B)=A$；

(6) 复原律 $(A^c)^c=A$；

(7) 两极律 $A\Cup 1_{IFS}=1_{IFS}$，$A\Cap 1_{IFS}=A$，$A\Cup 0_{IFS}=A$，$A\Cap 0_{IFS}=0_{IFS}$；

(8) 对偶律 $(A\Cup B)^c=A^c\Cap B^c$，$(A\Cap B)^c=A^c\Cup B^c$。

证明：根据直觉模糊集的定义，(1)－(3)显然成立，下面对其他几条性质进行证明。

(4) $A\Cap(B\Cup C)$

$=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge(\mu_B(x)\vee\mu_C(x)),\nu_A(x)\vee(\nu_B(x)\wedge\nu_C(x))\rangle\,|\,x\in U\}$

$=\{\langle x,(\mu_A(x)\wedge\mu_B(x))\vee(\mu_A(x)\wedge\mu_C(x)),(\nu_A(x)\vee\nu_B(x))\wedge(\nu_A(x)\vee\nu_C(x))\rangle\,|\,x\in U\}$

$=(A\Cap B)\Cup(A\Cap C)$

同理可证，$A\Cup(B\Cap C)=(A\Cup B)\Cap(A\Cup C)$。

(5) $A\Cap(A\Cup B)$

$=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge(\mu_A(x)\vee\mu_B(x)),\nu_A(x)\vee(\nu_A(x)\wedge\nu_B(x))\rangle\,|\,x\in U\}$

$=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\,|\,x\in U\}=A$

(6) $(A^c)^c=(\{\langle x,\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle\,|\,x\in U\})^c$

$=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\,|\,x\in U\}=A$

(7) $A\Cup 1_{IFS}=\{\langle x,\mu_A(x)\vee 1,\nu_A(x)\wedge 0\rangle\,|\,x\in U\}$

$=\{\langle x,1,0\rangle\,|\,x\in U\}=1_{IFS}$。

同理可证，$A\Cap 1_{IFS}=A$，$A\Cup 0_{IFS}=A$，$A\Cap 0_{IFS}=0_{IFS}$。

(8) $(A\Cup B)^c$

$=(\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle\,|\,x\in U\})^c$

$=\{\langle x,\nu_A(x)\wedge\nu_B(x),\mu_A(x)\vee\mu_B(x)\rangle\,|\,x\in U=A^c\Cap B^c$

同理可证，$(A\Cap B)^c=A^c\Cup B^c$。

2 一种新的直觉模糊蕴涵

在直觉模糊集理论基础上，构造了一种新的广义的直觉模糊蕴涵算子，证明了其单调性、边界性等重要性质，为丰富和完善直觉模糊推理提供了理论基础。

定义 7(直觉模糊蕴涵) 设 $A(x)=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\,|\,x\in U\}$，$B(x)=\{\langle x,\mu_B(x),\nu_B(x)\rangle\,|\,x\in U\}\in IFS(U)$，且 $0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1$，则称$\Rightarrow_{IFS}$为直觉模糊蕴涵，如果满足如下条件：

$A\Cup B=\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle\,|\,x\in U\}$

$A\Cap B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\rangle\,|\,x\in U\}$

$A\Rightarrow_{IFS}B=\{\langle x,((1-\mu_A(x))\wedge(1-\upsilon_B(x)))\vee(\nu_A(x)\vee\mu_B(x)),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle\,|\,x\in U\}$

式中，$\mu_A(x)\leqslant 1-\nu_A(x)$，$\nu_A(x)\leqslant 1-\mu_A(x)$。为方便研究，记 $1-\mu_A(x)=\neg\mu_A(x)$，$1-\nu_A(x)=\neg\nu_A(x)$。而 $A\Rightarrow_{IFS}B$ 可化简为

$A\Rightarrow_{IFS}B=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg\upsilon_B(x))\vee(\nu_A(x)\vee\mu_B(x)),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle\,|\,x\in U\}$

定理 3 $\Rightarrow_{IFS}$在 IFS 上，满足边界条件

(1) $0_{IFS}\Rightarrow_{IFS}0_{IFS}=1_{IFS}$；(2) $0_{IFS}\Rightarrow_{IFS}1_{IFS}=1_{IFS}$；

(3) $1_{IFS}\Rightarrow_{IFS}0_{IFS}=0_{IFS}$；(4) $1_{IFS}\Rightarrow_{IFS}1_{IFS}=1_{IFS}$。

证明：根据定义 7

(1) $0_{IFS}\Rightarrow_{IFS}0_{IFS}=\{\langle x,(\neg 0\wedge\neg 1)\vee(1\vee 0),(0\wedge 1)\rangle\,|\,x\in U\}=\{\langle x,1,0\rangle\,|\,x\in U\}=1_{IFS}$；

(2) $0_{IFS}\Rightarrow_{IFS}1_{IFS}=\{\langle x,(\neg 0\wedge\neg 0)\vee(1\vee 1),(0\wedge 0)\rangle\,|\,x\in U\}=\{\langle x,1,0\rangle\,|\,x\in U\}=1_{IFS}$；

(3) $1_{IFS} \Rightarrow_{IFS} 0_{IFS} = \{\langle x, (\neg 1 \wedge \neg 1) \vee (0 \vee 0), (1 \wedge 1)\rangle \mid x \in U\} = \{\langle x, 0, 1\rangle \mid x \in U\} = 0_{IFS}$;

(4) $1_{IFS} \Rightarrow_{IFS} 1_{IFS} = \{\langle x, (\neg 1 \wedge \neg 0) \vee (0 \vee 1), (1 \wedge 0)\rangle \mid x \in U\} = \{\langle x, 1, 0\rangle \mid x \in U\} = 1_{IFS}$。

定理 4 设 $A \in IFS(U)$，则 $\Rightarrow_{IFS}$ 在 IFS 上的基本性质：

(1) $A \Rightarrow_{IFS} 1_{IFS} = 1_{IFS}$；(2) $1_{IFS} \Rightarrow_{IFS} A = A$；

(3) $0_{IFS} \Rightarrow_{IFS} A = 1_{IFS}$。

证明：根据蕴涵的定义，

(1) $A \Rightarrow_{IFS} 1_{IFS}$

$= \{\langle x, (\neg \mu_A(x) \wedge \neg 0) \vee (\nu_A(x) \vee 1), \mu_A(x) \wedge 0\rangle \mid x \in U\}$

$= \{\langle x, 1, 0\rangle \mid x \in U\} = 1_{IFS}$

(2) $1_{IFS} \Rightarrow_{IFS} A$

$= \{\langle x, (\neg 1 \wedge \neg v_A(x)) \vee (0 \vee \mu_A), 1 \wedge \nu_A(x)\rangle \mid x \in U\}$

$= \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in U\} = A$

(3) $0_{IFS} \Rightarrow_{IFS} A$

$= \{\langle x, (\neg 0 \wedge \neg v_A(x)) \vee (1 \vee \mu_A(x)), 0 \wedge \nu_A(x)\rangle \mid x \in U\}$

$= \{\langle x, 1, 0\rangle \mid x \in U\} = 1_{IFS}$

定理 5(单调性) 设 $A, B, C \in IFS(U)$，证明直觉模糊蕴涵 $\Rightarrow_{IFS}$ 关于第一个变量单调递减、关于第二个变量单调递增。

(1) 如果 $A \subseteq B$，则 $B \Rightarrow_{IFS} C \subseteq A \Rightarrow_{IFS} C$；

(2) 如果 $B \subseteq C$，则 $A \Rightarrow_{IFS} B \subseteq A \Rightarrow_{IFS} C$。

证明：(1) 根据定义 7，则

$A \Rightarrow_{IFS} C = \{\langle x, (\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_C(x)) \vee (\nu_A(x) \vee \mu_C(x)), \mu_A(x) \wedge \nu_C(x)\rangle \mid x \in U\}$

$B \Rightarrow_{IFS} C = \{\langle x, (\neg \mu_B(x) \wedge \neg v_C(x)) \vee (\nu_B(x) \vee \mu_C(x)), \mu_B(x) \wedge \nu_C(x)\rangle \mid x \in U\}$

当 $A \subseteq B$，即 $\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x), \nu_A(x) \geqslant \nu_B(x)$，则

$\neg \mu_A(x) \geqslant \neg \mu_B(x), \neg \nu_A(x) \leqslant \neg \nu_B(x)$。

得 $\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_C(x) \geqslant \neg \mu_B(x) \wedge \neg v_C(x), \nu_A(x) \vee \mu_C(x) \geqslant \nu_B(x) \vee \mu_C(x), \mu_A(x) \wedge \nu_C(x) \leqslant \mu_B(x) \wedge \nu_C(x)$。

得 $(\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_C(x)) \vee (\nu_A(x) \vee \mu_C(x)) \geqslant (\neg \mu_B(x) \wedge \neg v_C(x)) \vee (\nu_B(x) \vee \mu_C(x))$。

故 $B \Rightarrow_{IFS} C \subseteq A \Rightarrow_{IFS} C$。

(2) 根据定义 7，则

$A \Rightarrow_{IFS} B = \{\langle x, (\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_B(x)) \vee (\nu_A(x) \vee \mu_B(x)), \mu_A(x) \wedge \nu_B(x)\rangle \mid x \in U\}$

$A \Rightarrow_{IFS} C = \{\langle x, (\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_C(x)) \vee (\nu_A(x) \vee \mu_C(x)), \mu_A(x) \wedge \nu_C(x)\rangle \mid x \in U\}$

当 $B \subseteq C$，即 $\mu_B(x) \leqslant \mu_C(x), \nu_B(x) \geqslant \nu_C(x)$，则

$\neg \mu_B(x) \geqslant \neg \mu_C(x), \neg \nu_B(x) \leqslant \neg \nu_C(x)$。

得 $\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_B(x) \leqslant \neg \mu_A(x) \vee \neg v_C(x), \nu_A(x) \vee \mu_B(x) \leqslant \nu_A(x) \vee \mu_C(x), \mu_A(x) \wedge \nu_B(x) \geqslant \mu_A(x) \wedge \nu_C(x)$。

得 $(\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_B(x)) \vee (\nu_A(x) \vee \mu_B(x)) \leqslant (\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_C(x)) \vee (\nu_A(x) \vee \mu_C(x))$。

故 $A \Rightarrow_{IFS} B \subseteq A \Rightarrow_{IFS} C$。

定理 6 设 $A, B, C \in IFS(U)$，则直觉模糊蕴涵 $\Rightarrow_{IFS}$ 满足下列式子

(1) $((A \Rightarrow_{IFS} C) \Cap (B \Rightarrow_{IFS} C)) \subseteq ((A \Cap B) \Rightarrow_{IFS} C)$；

(2) $((A \Rightarrow_{IFS} B) \Cap (A \Rightarrow_{IFS} C)) \subseteq (A \Rightarrow_{IFS} (B \Cup C))$；

(3) $B \subseteq (A \Rightarrow_{IFS} B)$；

(4) $A \Cap B \subseteq A \Cap (A \Rightarrow_{IFS} B)$；

(5) 如果 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq D$，则 $(D \Rightarrow_{IFS} A) \subseteq (C \Rightarrow_{IFS} B)$。

证明：(1) 由于 $A \Cap B \subseteq A, A \Cap B \subseteq B$，根据定理 5(1) 单调性知，$(A \Rightarrow_{IFS} C) \subseteq (A \Cap B) \Rightarrow_{IFS} C$，$(B \Rightarrow_{IFS} C) \subseteq (A \Cap B) \Rightarrow_{IFS} C$，所以，$((A \Rightarrow_{IFS} C) \Cap (B \Rightarrow_{IFS} C)) \subseteq ((A \Cap B) \Rightarrow_{IFS} C)$。

(2) 由于 $B \subseteq B \Cup C, C \subseteq B \Cup C$，根据定理 5(2) 单调性知，$(A \Rightarrow_{IFS} B) \subseteq (A \Rightarrow_{IFS} (B \Cup C))$，$(A \Rightarrow_{IFS} C) \subseteq (A \Rightarrow_{IFS} (B \Cup C))$，所以 $((A \Rightarrow_{IFS} B) \Cap (A \Rightarrow_{IFS} C)) \subseteq (A \Rightarrow_{IFS} (B \Cup C))$。

(3) $A \Rightarrow_{IFS} B$

$= \{\langle x, (\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_B(x)) \vee (\nu_A(x) \vee \mu_B(x)), \mu_A(x) \wedge \nu_B(x)\rangle \mid x \in U\}$

$= \{\langle x, \mu_B(x) \vee (\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_B(x)) \vee \nu_A(x), \nu_B(x) \wedge \mu_A(x)\rangle \mid x \in U\}$

$\mu_B(x) \leqslant \mu_B(x) \vee (\neg \mu_A(x) \wedge \neg \nu_B(x)) \vee \nu_A(x)$

$\nu_B(x) \geqslant \nu_B(x) \wedge \mu_A(x)$

根据定义 3(1) 可知，

$\{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x)\rangle \mid x \in U\} \subseteq \{\langle x, \mu_B(x) \vee (\neg \mu_A(x) \wedge \neg \nu_B(x)) \vee \nu_A(x), \nu_B(x) \wedge \mu_A(x)\rangle \mid x \in U\}$

所以，$B \subseteq (A \Rightarrow_{IFS} B)$。

(4) $A \Cap B = \{\langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), v_A(x) \vee v_B(x)\rangle \mid x \in U\}$

$A \Cap (A \Rightarrow_{IFS} B)$

$= A \Cap \{\langle x, (\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_B(x)) \vee (v_A(x) \vee \mu_B(x)), \mu_A(x) \wedge v_B(x)\rangle \mid x \in U\}$

$= \{\langle x, \mu_A(x) \wedge ((\neg \mu_A(x) \wedge \neg v_B(x) \vee v_A(x) \vee \mu_B(x)), v_A(x) \vee (v_B(x) \wedge \neg v_A(x))\rangle \mid x \in U)$

$= \{\langle x, (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) \vee (\mu_A(x) \wedge v_A(x)) \vee \mu_A(x) \wedge \neg \mu_A(x) \wedge \neg v_B(x)), (v_A(x) \wedge v_B(x)) \wedge (v_A(x) \vee \mu_A(x))\rangle \mid x \in U\}$

得

$\{\langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), v_A(x) \vee v_B(x)\rangle \mid x \in U\} \subseteq \{\langle x, (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) \vee (\mu_A(x) \wedge v_A(x)) \vee (\mu_A(x) \wedge \neg \mu_A(x) \wedge \neg v_B(x)), (v_A(x) \vee v_B(x)) \wedge (v_A(x) \vee \mu_A(x))\rangle \mid x \in U\}$

所以，$A \Cap B \subseteq A \Cap (A \Rightarrow_{IFS} B)$。

(5) $D \Rightarrow_{IFS} A$

$= \{\langle x, (\neg \mu_D(x) \wedge \neg v_A(x)) \vee (v_D(x) \vee \mu_A(x)), \mu_D(x) \wedge v_A(x)\rangle \mid x \in U\}$

$C \Rightarrow_{IFS} B$

$= \{\langle x, (\neg \mu_C(x) \wedge \neg v_B(x)) \vee (v_C(x) \vee \mu_B(x)), \mu_C(x) \wedge v_B(x)\rangle \mid x \in U\}$

由 $A \subseteq B, C \subseteq D$ 知，$\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x), v_A(x) \geqslant v_B(x), \mu_C(x) \leqslant \mu_D(x), v_C(x) \geqslant v_D(x)$。

得 $\neg \mu_D(x) \wedge \neg v_A(x) \leqslant \neg \mu_C(x) \wedge \neg v_B(x), v_D(x) \vee \mu_A(x) \leqslant v_C(x) \vee \mu_B(x), \mu_D(x) \wedge v_A(x) \geqslant \mu_C(x) \wedge v_B(x)$

所以

$\{\langle x, (\neg \mu_D(x) \wedge \neg v_A(x)) \vee (v_D(x) \vee \mu_A(x)), \mu_D(x) \wedge v_A(x)\rangle \mid x \in U\} \subseteq \{\langle x, (\neg \mu_C(x) \wedge \neg v_B(x)) \vee (v_C(x) \vee \mu_B(x)), \mu_C(x) \wedge v_B(x)\rangle \mid x \in U\}$

因此，$(D\Rightarrow_{IFS}A)\subseteq(C\Rightarrow_{IFS}B)$。

定理7 设$A,B,C\in IFS(U)$，则直觉模糊蕴涵$\Rightarrow_{IFS}$满足以下性质

(1) $(A\Cup B)\Rightarrow_{IFS}C=(A\Rightarrow_{IFS}C)\Cap(B\Rightarrow_{IFS}C)$；

(2) $A\Rightarrow_{IFS}(B\Cap C)=(A\Rightarrow_{IFS}B)\Cap(A\Rightarrow_{IFS}C)$；

(3) $(A\Cap B)\Rightarrow_{IFS}C=(A\Rightarrow_{IFS}C)\Cup(B\Rightarrow_{IFS}C)$；

(4) $A\Rightarrow_{IFS}(B\Cup C)=(A\Rightarrow_{IFS}B)\Cup(A\Rightarrow_{IFS}C)$；

(5) $A\Rightarrow_{IFS}(B\Rightarrow_{IFS}C)=B\Rightarrow_{IFS}(A\Rightarrow_{IFS}C)$；

(6) 若$A\Rightarrow_{IFS}B=B\Rightarrow_{IFS}A=1_{IFS}$，则$A=B$；

(7) $A\Rightarrow_{IFS}B=B^c\Rightarrow_{IFS}A^c$。

证明：(1) $(A\Cup B)\Rightarrow_{IFS}C$

$=\{\langle x,(\neg(\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\wedge\neg\nu_C(x))\vee(\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)\vee\mu_C(x)),(\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg(\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\vee(\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)\vee\mu_C(x)))\wedge(\neg\nu_C(x)\vee(\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)\vee\mu_C(x))),(\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg(\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\vee\mu_C(x))\wedge(\neg\nu_C(x)\vee\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)),(\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg\mu_B(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg\nu_C(x)\vee\nu_A(x))\wedge(\neg\nu_C(x)\vee\nu_B(x)),(\mu_A(x)\wedge\nu_C(x))\vee(\mu_B(x)\wedge\nu_C(x))\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg\nu_C(x)\vee\nu_A(x))\wedge(\neg\mu_B(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg\nu_C(x)\vee\nu_B(x)),(\mu_A(x)\wedge\nu_C(x))\vee(\mu_B(x)\wedge\nu_C(x))\rangle|x\in U\}$

$(A\Rightarrow_{IFS}C)\Cap(B\Rightarrow_{IFS}C)$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_C(x))\vee(v_A(x)\vee\mu_C(x)),\mu_A(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$\Cap\langle x,(\neg\mu_B(x)\wedge\neg v_C(x))\vee(\nu_B(x)\vee\mu_C(x)),\mu_B(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_C(x))\vee(\neg\mu_A(x)\wedge v_A(x)\vee\mu_C(x)\wedge\neg v_C(x)\vee\mu_C(x)\wedge v_A(x)),\mu_A(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$\Cap\{\langle x,(\neg\mu_B(x)\wedge\neg v_C(x))\vee(\neg\mu_B(x)\wedge v_B(x)\vee\mu_C(x)\vee\neg v_C(x)\vee\mu_C(x)\wedge v_B(x)),\mu_B(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg v_C(x)\vee v_A(x)),\mu_A(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$\Cap\{\langle x,(\neg\mu_B(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg v_C(x)\vee v_B(x)),\mu_B(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg v_C(x)\vee v_A(x))\wedge(\neg\mu_B(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg v_C(x)\vee v_B(x)),(\mu_A(x)\wedge v_C(x))\vee(\mu_B(x)\wedge v_C(x))\rangle|x\in U\}$

所以，$(A\Cup B)\Rightarrow_{IFS}C=(A\Rightarrow_{IFS}C)\Cap(B\Rightarrow_{IFS}C)$。

(2) $A\Rightarrow_{IFS}(B\Cap C)$

$=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in U\}$

$\Rightarrow_{IFS}\{\langle x,\mu_B(x)\wedge\mu_C(x),\nu_B(x)\vee\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg(\nu_B(x)\vee\nu_C(x)))\vee\nu_A(x)\vee(\mu_B(x)\wedge\mu_C(x)),\mu_A(x)\wedge(\nu_B(x)\vee\nu_C(x))\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\nu_A(x)\vee(\mu_B(x)\wedge\mu_C(x)))\wedge(\neg(\nu_B(x)\vee\nu_C(x))\vee\nu_A(x)\vee(\mu_B(x)\wedge\mu_C(x))),\mu_A(x)\wedge(\nu_B(x)\vee\nu_C(x))\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee(\mu_B(x)\wedge\mu_C(x)))\wedge(\neg(\nu_B(x)\vee\nu_C(x))\vee\nu_A(x),\mu_A(x)\wedge(\nu_B(x)\vee\nu_C(x))\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\wedge(\neg\nu_B(x)\vee\nu_A(x))\wedge(\neg\mu_A(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg\nu_C(x)\vee\nu_A(x)),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\vee\mu_A(x)\wedge\nu_C(x))\rangle|x\in U\}$

$(A\Rightarrow_{IFS}B)\Cap(A\Rightarrow_{IFS}C)$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_B(x))\vee(v_A(x)\vee\mu_B(x)),\mu_A(x)\wedge v_B(x)\rangle|x\in U\}$

$\Cap\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_C(x))\vee(\nu_A(x)\vee\mu_C(x)),\mu_A(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_B(x))\vee(\neg\mu_A(x)\wedge v_A(x)\vee\mu_B(x)\wedge\neg v_B(x)\vee\mu_B(x)\wedge v_A(x)),\mu_A(x)\wedge v_B(x)\rangle|x\in U\}$

$\Cap\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_C(x))\vee(\neg\mu_A(x)\wedge v_A(x)\vee\mu_C(x)\wedge\neg v_C(x)\vee\mu_C(x)\wedge v_A(x)),\mu_A(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\wedge(\neg v_B(x)\vee v_A(x)),\mu_A(x)\wedge v_B(x)\rangle|x\in U\}$

$\Cap\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg v_C(x)\vee v_A(x)),\mu_A(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\wedge(\neg v_B(x)\vee v_A(x))\wedge(\neg\mu_A(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg v_C(x)\vee v_A(x)),\mu_A(x)\wedge v_B(x))\vee\mu_A(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

所以，$A\Rightarrow_{IFS}(B\Cap C)=(A\Rightarrow_{IFS}B)\Cap(A\Rightarrow_{IFS}C)$。

(3) $(A\Cap B)\Rightarrow_{IFS}C$

$=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\rangle|x\in U\}$

$\Rightarrow_{IFS}\{\langle x,\mu_C(x),\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,\neg(\mu_A(x)\wedge\mu_B(x))\wedge\neg\nu_C(x)\vee\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\neg\mu_B(x))\wedge\neg\nu_C(x)\vee\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$(A\Rightarrow_{IFS}C)\Cup(B\Rightarrow_{IFS}C)$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg\nu_C(x))\vee\nu_A(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$\Cup\{\langle x,(\neg\mu_B(x)\wedge\neg\nu_C(x))\vee\nu_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_B(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg\nu_C(x))\vee\mu_C(x)\vee\nu_A(x)\vee(\neg\mu_B(x)\wedge\neg\nu_C(x))\vee\mu_C(x)\vee\nu_B(x),\mu_A(x)\wedge\nu_C(x)\wedge\mu_B(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\neg\mu_B(x))\wedge\neg\nu_C(x)\vee\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

所以，$(A\Cap B)\Rightarrow_{IFS}C=(A\Rightarrow_{IFS}C)\Cup(B\Rightarrow_{IFS}C)$。

(4) $A\Rightarrow_{IFS}(B\Cup C)=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in U\}$

$\Rightarrow_{IFS}\{\langle x,\mu_B(x)\vee\mu_C(x),\nu_B(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg(\nu_B(x)\wedge\nu_C(x)))\vee(\nu_A(x)\vee\mu_B(x)\vee\mu_C(x)),\mu_A(x)\wedge(\nu_B(x)\wedge\nu_C(x))\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,\neg\mu_A(x)\wedge(\neg\nu_B(x)\vee\neg\nu_C(x))\vee\mu_B(x)\vee\mu_C(x)\vee\nu_A(x),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$(A\Rightarrow_{IFS}B)\Cup(A\Rightarrow_{IFS}C)$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg\nu_B(x))\vee\nu_A(x)\vee\mu_B(x),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle|x\in U\}$

$\Cup\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg\nu_C(x))\vee\nu_A(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\wedge\neg\nu_B(x))\vee\nu_A(x)\vee\mu_B(x)\vee(\neg\mu_A(x)\wedge\neg\nu_C(x))\vee\nu_A(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\wedge\mu_A(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,\neg\mu_A(x)\wedge(\neg\nu_B(x)\vee\neg\nu_C(x))\vee(\mu_B(x)\vee\mu_C(x)\vee\nu_A(x)),\mu_A(x)\wedge\nu_B(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$

所以，$A\Rightarrow_{IFS}(B\Cup C)=(A\Rightarrow_{IFS}B)\Cup(A\Rightarrow_{IFS}C)$。

(5) $A\Rightarrow_{IFS}(B\Rightarrow_{IFS}C)=\{\langle x,\mu_A(x),v_A(x)\rangle|x\in U\}$

$\Rightarrow_{IFS}\{\langle x,\neg\mu_B(x)\wedge\neg v_C(x)\vee v_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_B(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,\neg\mu_A(x)\wedge\neg(\mu_B(x)\wedge v_C(x))\vee v_A(x)\vee\neg\mu_B(x)\wedge\neg v_C(x)\vee v_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,\neg\mu_A(x)\wedge(\neg\mu_B(x)\vee\neg v_C(x))\vee\neg\mu_B(x)\wedge\neg v_C(x)\vee v_A(x)\vee v_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$B\Rightarrow_{IFS}(A\Rightarrow_{IFS}C)=\{\langle x,\mu_B(x),v_B(x)\rangle|x\in U\}$

$\Rightarrow_{IFS}\{\langle x,\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_C(x)\vee v_A(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,\neg\mu_B(x)\wedge\neg(\mu_A(x)\wedge v_C(x))\vee v_B(x)\vee\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_C(x)\vee v_A(x)\vee\mu_C(x),\mu_B(x)\wedge\mu_A(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,\neg\mu_B(x)\wedge(\neg\mu_A(x)\vee\neg v_C(x))\vee\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_C(x)\vee v_A(x)\vee v_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,\neg\mu_B(x)\wedge\neg\mu_A(x)\vee\neg\mu_B(x)\wedge\neg v_C(x)\vee\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_C(x)\vee v_A(x)\vee v_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,\neg\mu_A(x)\wedge(\neg\mu_B(x)\vee\neg v_C(x))\vee\neg\mu_B(x)\wedge\neg v_C(x)\vee v_A(x)\vee v_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$

所以，$A\Rightarrow_{IFS}(B\Rightarrow_{IFS}C)=B\Rightarrow_{IFS}(A\Rightarrow_{IFS}C)$。

(6) 根据定义 7

$A\Rightarrow_{IFS}B$

$=\{\langle x,\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_B(x)\vee v_A(x)\vee\mu_B(x),\mu_A(x)\wedge v_B(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_A(x)\vee\mu_B(x))\wedge(\neg v_B(x)\vee v_A(x)),\mu_A(x)\wedge v_B(x)\rangle|x\in U\}$

$=1_{IFS}$

得 $\neg\mu_A(x)\vee\mu_B(x)=1,\neg v_B(x)\vee v_A(x)=1$。

$\mu_A(x)\wedge v_B(x)=0$

$B\Rightarrow_{IFS}A$

$=\{\langle x,\neg\mu_B(x)\wedge\neg v_A(x)\vee v_B(x)\vee\mu_A(x),\mu_B(x)\wedge v_A(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,(\neg\mu_B(x)\vee\mu_A(x))\wedge(\neg v_A(x)\vee v_B(x)),\mu_B(x)\wedge v_A(x)\rangle|x\in U\}=1_{IFS}$

得 $\neg\mu_B(x)\vee\mu_A(x)=1,\neg v_A(x)\vee v_B(x)=1,\mu_B(x)\wedge v_A(x)=0$。

由题设 $A\Rightarrow_{IFS}B=B\Rightarrow_{IFS}A=1_{IFS}$ 及上述得

$\mu_A(x)=\mu_B(x),v_A(x)=v_B(x)$。

根据定义 2 知，$A=B$。

(7) 根据定义 7 知，

$A\Rightarrow_{IFS}B$

$=\{\langle x,\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_B(x)\vee v_A(x)\vee\mu_B(x),\mu_A(x)\wedge v_B(x)\rangle|x\in U\}$

$B^c\Rightarrow_{IFS}A^c$

$=\{\langle x,v_B(x),\mu_B(x)\rangle|x\in U\}\Rightarrow_{IF}\{\langle x,v_A(x),\mu_A(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,\neg v_B(x)\wedge\neg\mu_A(x)\vee\mu_B(x)\vee v_A(x),v_B(x)\wedge\mu_A(x)\rangle|x\in U\}$

$=\{\langle x,\neg\mu_A(x)\wedge\neg v_B(x)\vee v_A(x)\vee\mu_B(x),\mu_A(x)\wedge v_B(x)\rangle|x\in U\}$

所以，$A\Rightarrow_{IFS}B=B^c\Rightarrow_{IFS}A^c$。

3 直觉模糊剩余格

本节中，首先回顾了伴随对和剩余格的概念，然后在直觉模糊集和新的蕴涵基础上，证明由该蕴涵构成的剩余格。

定义 8(伴随对)[13] 设 L 为偏序集，L 上的二元运算 $\otimes$ 与 θ 叫做互为伴随对，若以下条件成立

(M_0) $\otimes:L\times L\to L$ 是单调递增的。

(R_0) $\theta:L\times L\to L$ 关于第一变量是不增的，关于第二变量是不减的。

(A) $\otimes(a,b)\leqslant c$ 当且仅当 $a\leqslant\theta(a,b),a,b,c\in L$。

这时($\otimes,\theta$)叫做 L 上的伴随对。

定义 9(剩余格)[13] 三元组($L,\otimes,\theta$)称为一个剩余格，如果

(1) L 是有界格，最小元为 0，最大元为 1；

(2) ($\otimes,\theta$)是 L 上的伴随对；

(3) ($L,\otimes,1$)是以 1 为单位元的交换半群。

定理 8 ($IFS,\leqslant_{IFS}$)是一有界格，最小元为 0_{IFS}，最大元为 1_{IFS}。

证明：根据定理 1 容易得证，略。

定理 9 设任意 $A,B,C\in IFS(U)$，($\Cap,\Rightarrow_{IFS}$)是 IFS 上的伴随对，则以下条件成立：

(1) $\Cap:IFS\times IFS\to IFS$ 是单调递增的。

(2) $\Rightarrow_{IFS}:IFS\times IFS\to IFS$ 关于第一变量是单调递减的，关于第二变量是单调递增的。

(3) $A\Cap B\subseteq C$ 当且仅当 $A\subseteq(B\Rightarrow_{IFS}C)$。

证明：(1) 令 $A,B,C\in IFS(U),A\subseteq B$，则

$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x),v_A(x)\geqslant v_B(x)$。

$A\Cap C=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_C(x),v_A(x)\vee v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$B\Cap C=\{\langle x,\mu_B(x)\wedge\mu_C(x),v_B(x)\vee v_C(x)\rangle|x\in U\}$

$\mu_A(x)\wedge\mu_C(x)\leqslant\mu_B(x)\wedge\mu_C(x),v_A(x)\vee v_C(x)\geqslant v_B(x)\vee v_C(x)$

所以，$A\Cap C\subseteq B\Cap C$。

同理可证，$C\Cap A\subseteq C\Cap B$。

因此，$\Cap$ 是单调递增的。

(2) $\Rightarrow_{IFS}$ 单调性在定理 5 中已证，略。

(3) 必要性

由 $A\Cap B\subseteq C$ 知，$\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\leqslant\mu_C(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\geqslant\nu_C(x)$，得 $\mu_A(x)\leqslant\mu_C(x),\mu_B(x)\leqslant\mu_C(x);\nu_A(x)\geqslant\nu_C(x),\nu_B$

$(x)\geq\nu_C(x)$。

又因为 $0\leq\mu_A(x),\mu_B(x),\mu_C(x),\neg\mu_B(x),\nu_B(x),\nu_B(x),\neg\nu_C(x)\leq1$，得 $\mu_A(x)\leq\mu_C(x)\vee\neg\mu_B(x)\wedge\neg\nu_C(x)\vee\nu_B(x)$，$\nu_A(x)\geq\nu_C(x)\wedge\mu_B(x)$。

而

$$B\Rightarrow_{IFS}C$$
$$=\{\langle x,\mu_C(x)\vee\neg\mu_B(x)\wedge\neg\nu_C(x)\vee\nu_B(x),\mu_B(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$$
$$\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in U\}$$
$$\subseteq\{\langle x,\mu_C(x)\vee\neg\mu_B(x)\wedge\neg\nu_C(x)\vee\nu_B(x),\mu_B(x)\wedge\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$$

所以，$A\subseteq B\Rightarrow_{IFS}C$。

充分性

$$B\Rightarrow_{IFS}C$$
$$=\{\langle x,\neg\mu_B(x)\wedge\neg v_C(x)\vee v_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_B(x)\wedge v_C(x)\rangle x\in U\}$$
$$=\{\langle x,(\neg\mu_B(x)\vee\mu_C(x))\wedge(\neg v_C(x)\vee v_B(x)),\mu_B(x)\wedge v_C(x)\rangle|x\in U\}$$

由 $A\subseteq B\Rightarrow_{IFS}C$ 得 $\mu_A(x)\leq\neg\mu_B(x)\vee\mu_C(x),\mu_A(x)\leq\neg v_C(x)\vee v_B(x),v_A(x)\geq\mu_B(x)\wedge v_C(x)$。

得 $\mu_A(x)\leq\mu_C(x),\mu_A(x)\leq v_B(x),\mu_B(x)\leq v_A(x),v_C(x)\leq v_A(x)$。

故 $\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\leq\mu_C(x)\wedge v_A(x)\leq\mu_C(x),v_C(x)\leq v_C(x)\vee\mu_A(x)\leq v_A(x)\vee v_B(x)$。

即

$$\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),v_A(x)\vee v_B(x)\rangle|x\in U\}\subseteq\{\langle x,\mu_C(x),v_C(x)\rangle|x\in U\}$$

所以，$A\Cap B\subseteq C$。

定理 10 $(IFS,\Cap,1_{IFS})$是在 IFS 上以 1_{IFS} 为单位元的交换半群。

证明：(1) 单位元

$$A\Cap 1_{IFS}=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge1,v_A(x)\vee0\rangle|x\in U\}=A$$
$$1_{IFS}\Cap A=\{\langle x,1\wedge\mu_A(x),0\vee v_A(x)\rangle|x\in U\}=A$$

(2)结合律

$$(A\Cap B)\Cap C$$
$$=\{\langle x,(\mu_A(x)\wedge\mu_B(x))\wedge\mu_C(x),(\nu_A(x)\vee\nu_B(x))\vee\nu_C(x)\rangle|x\in U\}$$
$$=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge(\mu_B(x)\wedge\mu_C(x)),\nu_A(x)\vee(\nu_B(x)\vee\nu_C(x))\rangle|x\in U\}$$
$$=A\Cap(B\Cap C)$$

(3) 交换律

$$A\Cap B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\rangle|x\in U\}$$
$$=\{\langle x,\mu_B(x)\wedge\mu_A(x),\nu_B(x)\vee\nu_A(x)\rangle|x\in U\}=B\Cap A$$

根据定义 9 和定理 8－10 可知，$(IFS,\Cap,\Rightarrow_{IFS})$是直觉模糊剩余格。

结束语 直觉模糊是处理不精确、不确定性问题的重要工具，在模糊推理、群决策等领域具有广阔的应用前景。本文对直觉模糊蕴涵进行了研究。首先回顾了直觉模糊集的有关知识，构造了一种新的广义的直觉模糊蕴涵，证明了其单调性、边界性等重要性质，最后证明了该蕴涵可构成直觉模糊剩余格，为直觉模糊逻辑的丰富和完善提供了理论基础。

参考文献

[1] Atanassov K. Intuitionstic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,1986,20:87-96

[2] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control,1965(8):338-385

[3] Bubaescu T. Some observations on intuitionistic fuzzy relations [M]. Itinerant Seminar on Functional Equations. Cluj- Napoca, 1989:111-118

[4] Bustince H,Burllo P. Structures on intuitionistic fuzzy relations [J]. Fuzzy Sets and Systems,1996,78(3):293-303

[5] Bustince H. Construction of intuitionistic fuzzy relation with predetermined properties[J]. Fuzzy Sets and Systems,2000,109(3):379-403

[6] 贺正洪,雷英杰,李景涛.一种新的直觉模糊相似矩阵构造方法[J].计算机工程与应用,2010,46(18):27-29

[7] Zhou Lei,Wu Wei-zhi,Zhang Wen-xiu. On characterization of intuitionistic fuzzy rough set based on intuitionistic fuzzy implicators[J]. Information Sciences,2009(179):883-898

[8] Zhou Lei,Wu Wei-zhi. On generalized intuitionistic fuzzy rough approximation operators[J]. Information Sciences, 2008, 178:2448-2465

[9] 杨勇,朱晓钟,李廉.直觉模糊粗糙集的公理化[J].合肥工业大学学报:自然科学版,2010,33(4):590-592

[10] Beliakov G, Bustince H, Goswami D P, et al. On averaging operators for Atanassov's intuitionistic fuzzy sets[J]. Information Sciences,2011(181):1116-1124

[11] 徐小来,雷英杰,雷阳.直觉模糊三角模的剩余蕴涵及其性质[J].计算机科学,2008,35(11):154-156

[12] 李璧镜,王国俊.广义三角模和广义剩余蕴涵之间的对应关系[J].计算机工程与应用,2010,46(2):22-25

[13] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京:科学出版社,2000

(上接第 186 页)

[3] Molnar S,Cox M,Ellsworth D,et al. A Sorting Classification of Parallel Rendering[J]. IEEE Computer Graph and Application, 1994,14(4):23-31

[4] Cavin X,Mion C. Pipelined sort-last rendering:Scalability,performance and beyond [C] // Proceedings Eurographics Symposiumon Parallel Graphics and Visualization. 2006

[5] Eilemann S. Direct Send Compositing for Parallel Sort-last Rendering [C]//Eurographics Symposium on Parallel Graphics and Visualization. 2007

[6] Eilemann S. Equalizer: A Scalable Parallel Rendering Framework[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics,2009,15(3)

[7] Soares L P,Raffin B,Jorge J A. PC Clusters for Virtual Reality[J]. The International Journal of Virtual Reality,2008,7(1):67-80