

OTIS 网络的支配集问题算法研究

向永香¹ 叶 慧¹ 李 旻^{1,2} 陈卫东¹

(华南师范大学计算机学院 广州 510631)¹ (华南师范大学招生办 广州 510631)²

摘 要 图的最小支配集问题和最小连通支配集问题在网络与并行分布式计算中有重要应用,计算上它们都属于 NP 难问题。OTIS 网络是一类可以任意图作为因子网络的复合网络,它能继承因子网络的良好特性,因而成为可扩展性、模块化、容错性的大规模并行计算机系统的体系结构形式之一。研究如何构建 OTIS 网络的较小支配集和连通支配集。基于 OTIS 网络构图规则,分别根据因子网络的支配集算法和连通支配集算法得到了求解 OTIS 网络的支配集算法和连通支配集算法。从理论上分析了这些算法的性能,并通过实例进行了验证。

关键词 网络,OTIS 网络,图,支配集,连通支配集,算法

中图分类号 TP301 **文献标识码** A

Algorithms for Dominating Set Problems in OTIS Networks

XIANG Yong-xiang¹ YE Hui¹ LI Min^{1,2} CHEN Wei-dong¹

(School of Computer Science, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)¹

(Admission Department, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)²

Abstract The minimum dominating set problem and the minimum connected dominating set problem, both of which are NP-hard problems, have many important applications in the fields related to networks and parallel & distributed computing. Recent OTIS networks are a class of two-level structure interconnection networks taking any graph as modules and connecting them in a complete graph manner, which provides a systematic competitive construction scheme for large, scalable, modular, and robust parallel architectures while maintaining favorable properties of their factor networks. In this paper, how to construct a small dominating set and connected dominating set of an OTIS network was discussed. Based on the connectivity rule of OTIS networks, we gave algorithms for constructing a small dominating set (a small connected dominating set, respectively) of an OTIS network from a dominating set (a connected dominating set, respectively) of its factor network. The performances of these algorithms were analyzed, and were shown by examples.

Keywords Network, OTIS network, Graph, Dominating set, Connected dominating set, Algorithm

1 引言

鉴于互连网络用图建模,本文将不加区别地使用图和网络这两个概念。支配集问题多年来一直是图论、计算机科学等领域广泛研究和重视的问题之一,在并行与分布式计算中有重要的实用价值。一些路由、容错、可靠性问题可归结为某种形式的支配集问题^[1]。常见的有最小支配集问题(DS)和最小连通支配集问题(CDS)^[2]。图的支配集是图的点集的一个子集,满足图中每一点或在此子集中或与此子集中的某点相邻。如果支配集所导出的子图是连通图,则称该支配集是连通支配集。最小支配集问题要求找出点数最少的支配集,最小连通支配集问题要求找出点数最少的连通支配集。这些问题具有重要的实际意义。例如,在某些网络应用中,要求在网络中布局数目最少的中心,使得每个节点处在至少一个中

心的附近。该问题实际上可归结为最小支配集问题^[1]。在无线传感器网络中,为了支持高效率的通信和区域监控等功能,需要选择一些无线节点构成小的虚拟骨干网,广播时仅需在这些骨干节点之间交换路由信息,这样能大大减少路由开销。该问题建模即为最小连通支配集问题^[4-6]。在一般图上求解这些问题在计算上是 NP 难的,因此研究特殊图类的支配集性质并设计有效的求解算法是有意义的^[1,3,7,8]。

近年出现的 OTIS (Optical Transpose Interconnection System) 网络(也称为 Swapped 网络)提供了一种用任何网络构建更大网络的一般方式^[9,10]。以规模 n 的任意图 Ω 为因子网络构建的 OTIS 网络(记作 $OTIS(\Omega)$)由 n 个与 Ω 同构的子网络(称作是簇)组成,且采用如下方式将这些簇连通起来:簇 g 中点 p 与簇 p 中的点 g 相连($p \neq g$)。直观上,如果将每个簇看作是一个超点,则 $OTIS(\Omega)$ 网络可以看作是这些超点

到稿日期:2011-04-23 返修日期:2011-07-03 本文受广东省自然科学基金(10451063101006313)和国家自然科学基金(60973150,11071089)资助。

向永香(1987-),女,硕士生,主要研究方向为算法设计;叶 慧(1983-),女,硕士生,主要研究方向为算法设计;李 旻(1980-),女,硕士生,工程师,主要研究方向为数据分析、算法设计;陈卫东(1968-),男,博士,副教授,主要研究方向为图论、组合优化、并行计算,E-mail:chenwd@sncu.edu.cn(通信作者)。

经过簇间链形成的完全图 K_n 。OTIS 网络扩展成本小,能继承因子网络的某些理想性能(如哈密尔顿圈性),且是少数已经实现的互连网络方案之一,因此成为近年来研究的一个热点^[11,12]。在 OTIS 网络上,一些典型应用问题(如选择和排序、矩阵乘法、图像处理等)的算法被广泛研究^[13,14]。这些研究一般都是基于 OTIS 网络的模块化结构,从继承的角度利用因子网络性质和算法来研究相应的 OTIS 网络的性质和算法。最近有对一些常用网络拓扑结构(包括蝶网、de Bruijn 网、Kautz 网、笛卡尔积网等)的支配集的研究^[15,17,18],但尚没有发现有关 OTIS 网络支配集性质及算法的研究报道。

本文研究 OTIS 网络的支配集问题和连通支配集问题的求解算法。基本思路是从继承的角度,利用因子网络的支配集和连通支配集来构建 OTIS 网络的支配集和连通支配集,并分析这些算法的性能。本文第 2 节介绍 OTIS 网络定义及支配集相关概念;第 3 节给出一个利用因子网络支配集算法得到求解 OTIS 网络支配集的算法;第 4 节给出两个利用因子网络连通支配集算法得到求解 OTIS 网络连通支配集的算法;第 5 节是算法评价;最后是结束语。

2 基本概念

本节介绍 OTIS 网络的定义、支配集和连通支配集的概念,并给出它们的一些基本性质。先介绍图论中的几个常用符号。设 G 是一个简单无向图(简称为图),其节点集记作 $V(G)$,边(链)集记作 $E(G)$ 。图 G 中与节点 v 相邻的点的个数称作点 v 的度,记作 $deg_G(v)$ 。 G 中最大度和最小度分别用 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 表示。在图 G 中任意两点 u, v 之间的最短路的长度称作这两点间的距离,记作 $d_G(u, v)$;而 G 中所有点对间的距离的最大值称作图的直径,记作 $D(G)$ 。本文中用到的其它图论概念和术语参见文献[16]。下面给出 OTIS 网络的定义。

定义 1(OTIS 网络^[9,10]) 设 Ω 是一个无向图, $|V(\Omega)|=n$ 。以 Ω 为因子网络构建的 OTIS 网络是一个无向图,记作 $OTIS(\Omega)$,其点集 $V(OTIS(\Omega))=\{\langle g, p \rangle | g, p \in V(\Omega)\}$,边集 $E(OTIS(\Omega))=\{(\langle g, p_1 \rangle, \langle g, p_2 \rangle) | (p_1, p_2) \in E(\Omega), g \in V(\Omega)\} \cup \{(\langle g, p \rangle, \langle p, g \rangle) | g, p \in V(\Omega) \text{ 且 } g \neq p\}$ 。

由定义 1,若 Ω 有 n 个节点(设 $V(\Omega)=\{0, 1, \dots, n-1\}$),则 $OTIS(\Omega)$ 是一个有 n^2 个节点的网络,它由 n 个点不相交的子网络(被称作簇,分别被编号为 $0, 1, \dots, n-1$)组成,每个簇均同构于因子网络 Ω 。 $OTIS(\Omega)$ 中的节点 $\langle g, p \rangle$ 对应于簇 g 的处理器 p ,称 g, p 分别是节点 $\langle g, p \rangle$ 的簇号和处理器号。在一个 OTIS 中,簇间链将 g 簇中的点 p 与 p 簇中的点 g 相连($g \neq p$)。一个具体例子如图 1 所示。

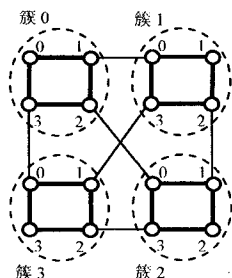


图 1 $OTIS(Q_2)$ (Q_2 是 4 个节点的环网络)

因 $OTIS(\Omega)$ 中簇号和处理器号互换的两点间由簇间链相连,也称 $OTIS(\Omega)$ 为基于图 Ω 的交换网络(Swapped Networks)。根据定义容易得到 OTIS 网络的下列性质^[10]:

- $|V(OTIS(\Omega))|=|V(\Omega)|^2$;
- $\Delta(OTIS(\Omega))=\Delta(\Omega)+1; \delta(OTIS(\Omega))=\delta(\Omega)$;
- $D(OTIS(\Omega))=2D(\Omega)+1$ 。

研究表明,OTIS 网络扩展成本低,能继承因子网络某些良好特性(比如哈密尔顿圈性等)^[10,12]。本文将研究 OTIS 网络的支配集和连通支配集的构造问题。这两个图论概念定义如下。

定义 2(支配集和连通支配集)^[1,2] 图 $G=(V, E)$ 的点集 V 的一个子集 D 如果满足对任意节点 $v \in V$,有 $v \in D$ 或至少存在一个 $u \in D$ 有 $(u, v) \in E$ (此时称点 v 被支配),则称 D 是图 G 的支配集。如果一个支配集所导出的子图是连通图,则称它是一个连通支配集。

最小支配集问题要求找出点数最少的支配集,最小连通支配集要求找出点数最少的连通支配集。图 G 的最小支配集的点数记作 $\gamma(G)$,称作图 G 的支配数;最小连通支配集的点数记作 $\gamma_c(G)$,称作图 G 的连通支配数。

求一般图 G 的 $\gamma(G)$ 和 $\gamma_c(G)$ 是 NP 难的^[3]。为了讨论方便,本文中设 $n=V(G), \delta=\delta(G)$ 。 $\gamma(G)$ 和 $\gamma_c(G)$ 的上界可用 n 和 δ 表示如下^[1]。

定理 1 任意不含孤立点的图 G 的支配数满足 $\gamma(G) \leq n[1 + \ln(\delta + 1)] / (\delta + 1)$ 。

定理 2 任意连通图 G 的连通支配数满足 $\gamma_c(G) \leq 3n / (\delta + 1) - 2$ 。

3 OTIS 网络的支配集算法

目前有许多求解一般图的最小支配集的启发式算法或近似算法,其中一些算法能快速求得图的较小支配集。我们可以使用现有任何算法求因子网络 G 的支配集,在此基础上再求得 $OTIS(G)$ 的支配集。

鉴于 OTIS 网络模块化特点,根据因子网络 G 的一个支配集可得 $OTIS(G)$ 的支配集如下:每个簇都采用因子网络 G 的支配集,所有簇的支配集的并集即为 $OTIS(G)$ 的支配集。这个简单算法显然是正确的。由此可见 OTIS 网络支配数不超过其因子图支配数的 n 倍,即 $\gamma(OTIS(G)) \leq n\gamma(G)$ 。根据 OTIS 网络的互连规则,一个簇中的支配点可以通过簇间链来支配别的簇中的点。按照这个思路,可对上述简单算法进行优化,由此可得到 OTIS 网络的一个更小的支配集。算法描述如图 2 所示。

算法 1 Solver-DS-OTIS

Input: 因子网络 G , 以及用于求 G 的支配集算法 Solver-DS

Output: $OTIS(G)$ 的支配集 $DS_{OTIS(G)}$

1. $DS_{OTIS(G)} \leftarrow \emptyset$ //初始化
2. 使用算法 Solver-DS 求得因子网络 G 的支配集,不妨设其为 $DS_G = \{1, 2, \dots, t\}$,其大小 $t \geq 1$
3. For $k=1$ to t Do
 - For $j=k$ to n Do
 - $DS_{OTIS(G)} \leftarrow DS_{OTIS(G)} \cup \{\langle j, k \rangle\}$
 - //将簇 G_j 中的节点 $\langle j, k \rangle$ 选作为 $OTIS(G)$ 的支配点
- End For

图 2 算法 Solver-DS-OTIS 的描述

定理 3 给出了算法的正确性以及算法求得的支配集的大小。

定理 3 算法 Solver-DS-OTIS 求得的 $DS_{OTIS(G)}$ 是 OTIS (G) 的一个支配集,其大小为 $nt-t(t-1)/2$,其中 t 是算法中求得的因子网络 G 的支配集的大小。

证明: $DS_{OTIS(G)}$ 的大小为 $nt-t(t-1)/2$ 是显然的,下面只需证 $DS_{OTIS(G)}$ 是 OTIS(G) 的支配集即可。首先,容易看出,算法在第 $k(1 \leq k \leq t)$ 次迭代时选取了支配点后,簇 G_k 中所有的点都被支配了。其次,当算法在第 t 次迭代时选取了支配点后,所有 G_{t+1}, \dots, G_n 中的点也都被支配了,这是因为位于这些簇中的支配点集恰好是因子网络中的支配集。

如果求因子网络 G 的支配集算法 Solver-DS 的时间复杂度是 $O(g(n))$,则算法 Solver-DS-OTIS 的时间复杂度显然是 $O(g(n)+n^2)$ 。注意到 OTIS(G) 的点数是 n^2 ,即算法增加与 OTIS 网络中的节点数成比例的时间就可由因子网络的支配集得到 OTIS 的支配集。

结合定理 1 可得 OTIS 网络支配数的上界如下。

推论 1 如果 G 不含孤立点, $\alpha = n[1 + \ln(\delta + 1)]/(\delta + 1)$, 则有

- (1) $\gamma(OTIS(G)) \leq n\gamma(G) - \gamma(G)(\gamma(G) - 1)/2$;
- (2) $\gamma(OTIS(G)) \leq n\alpha - \alpha(\alpha - 1)/2$ 。

4 OTIS 网络的连通支配集算法

求解一般图的最小连通支配集的启发式算法或近似算法主要包括两类^[4-8]:第一类是基于独立集的算法,基本思想是先找出图的一个较小的独立集,然后增加一些节点,将独立集连通起来;第二类是基于生成树的算法,基本思想是先找出图的一个叶节点,尽可能多地生成树,去掉叶节点后剩下的节点就构成一个较小的连通支配集。

可使用现有任何算法求因子网络 G 的连通支配集,在此基础上求得 OTIS(G) 的连通支配集。显然,各簇的连通支配集的并集是 OTIS 网络的支配集,且在每个簇内是连通的,但簇间不一定连通,因此不一定构成 OTIS 网络的连通支配集。此时可通过添加一些节点,得到 OTIS 网络的一个连通支配集。基本思想如下:选一个簇作为总控模块,其中每个节点都被选作支配点,而其余每个簇都采用因子网络 G 的连通支配点集,所有这些支配点的并集即为 OTIS(G) 的一个连通支配集。通过这些支配点,所有簇都与总控模块簇相连通,且每个簇内是连通的,因此正确性是显然的。算法描述如图 3 所示。

算法 2 Solver-CDS-OTIS

Input: 因子网络 G 和用于求 G 的连通支配集算法 Solver-CDS

Output: OTIS(G) 的连通支配集 $CDS_{OTIS(G)}$

1. $CDS_{OTIS(G)} \leftarrow \emptyset$ //初始化
2. 使用算法 Solver-CDS 求得因子网络 G 的连通支配集,设为 $CDS_G = \{d_1, d_2, \dots, d_t\}$,其大小 $t \geq 1$ 。
3. //将簇 d_1 作为总控模块,其所有点均被选作支配点,其余簇中的支配点集恰好是因子网络的支配点集
For $k=1$ to n Do
 If $(k = d_1)$ Then
 $CDS_{OTIS(G)} \leftarrow CDS_{OTIS(G)} \cup \{\langle k, j \rangle | j \in V(G)\}$
 Else
 $CDS_{OTIS(G)} \leftarrow CDS_{OTIS(G)} \cup \{\langle k, j \rangle | j \in \{d_1, d_2, \dots, d_t\}\}$
 End If
End For

图 3 算法 Solver-CDS-OTIS 的描述

根据算法 Solver-CDS-OTIS 容易证明定理 4。

定理 4 算法 Solver-CDS-OTIS 求得 OTIS(G) 的连通支配集 $CDS_{OTIS(G)}$ 大小为 $n+(n-1)t$,其中 t 是算法中求得图 G 的连通支配集的大小。

如果因子网络的连通支配集算法 Solver-CDS 的时间复杂度是 $O(g(n))$,那么算法 Solver-CDS-OTIS 的时间复杂度显然是 $O(g(n)+n^2)$ 。即增加与 OTIS 网络中的节点数成比例的时间就可由因子网络的连通支配集得到 OTIS 的连通支配集。

结合定理 2 可得 OTIS(G) 连通支配数上界如下。

推论 2 如果 G 是连通图,则有

- (1) $\gamma_c(OTIS(G)) \leq n+(n-1)\gamma_c(G)$;
- (2) $\gamma_c(OTIS(G)) \leq n+(n-1)[3n/(\delta+1)-2]$ 。

一个网络往往存在多个不同的连通支配集。如果能得到因子网络的两个较小的连通支配集(很多算法容易做到这一点),就可根据 OTIS 网络的互连规则,优化上述算法,最终得到 OTIS 网络可能更小的连通支配集。为了便于描述算法,这里先给出最佳连通支配集对的概念。

定义 3 设 G 是连通图, \mathcal{R} 是 G 的连通支配集的一个集合。对于任意 $C_i, C_j \in \mathcal{R}$, 记 $h = \max\{|C_i|, |C_j|\}$, $l = \min\{|C_i|, |C_j|\}$ 且 $m = |C_i \cap C_j|$, 定义连通支配集对 (C_i, C_j) 的适配度为 $f(C_i, C_j) = hl + (l-m)h + (n-h-l+m)(l+1)$ 。称适配度最小的连通支配集对为 \mathcal{R} 上最佳连通支配集对。

基于最佳连通支配集对,算法描述如图 4 所示。

算法 3 Solver2-CDS-OTIS

Input: 网络 OTIS(G), 用于求因子网络 G 的多个连通支配集的算法 Solver2-CDS

Output: OTIS(G) 的支配集 $CDS_{OTIS(G)}$

1. $CDS_{OTIS(G)} \leftarrow \emptyset$ //初始化
2. 用算法 Solver2-CDS 求 G 的包含多个连通支配集的集合 \mathcal{R} , 并选择其中最佳支配集对 (C_1, C_2) , 不妨设 $C_1 = \{c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1h}\}$, $C_2 = \{c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2l}\}$, $C_1 \cap C_2 = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, 其中 $1 \leq m \leq l \leq h$ 。
3. For 对于每个簇 $c \in C_1$ Do
 $CDS_{OTIS(G)} \leftarrow CDS_{OTIS(G)} \cup \{\langle c, j \rangle | j \in C_2\}$
End For
4. For 对每个簇 $c \in C_2 - C_1$ Do
 $CDS_{OTIS(G)} \leftarrow CDS_{OTIS(G)} \cup \{\langle c, j \rangle | j \in C_1\}$
End For
5. For 对于每个 $c \in V - (C_1 \cup C_2)$ Do
 $CDS_{OTIS(G)} \leftarrow CDS_{OTIS(G)} \cup \{\langle c, j \rangle | j \in C_2\}$
End For
6. For 对于每个 $c \in V - (C_1 \cup C_2)$ Do
 $CDS_{OTIS(G)} \leftarrow CDS_{OTIS(G)} \cup \{\langle j, c \rangle\}$ //其中 $j \in C_2$ 是满足簇 j 中点 c 与簇 j 中所选连通支配集相连的任意点
End For

图 4 算法 Solver2-CDS-OTIS 的描述

定理 5 算法 Solver2-CDS-OTIS 求得 OTIS(G) 的连通支配集 $CDS_{OTIS(G)}$ 大小为 $f(C_1, C_2)$, 其中 (C_1, C_2) 是算法中第 2 步求得的图 G 的最佳连通支配集对。

证明:因 $h = \max\{|C_1|, |C_2|\}$, $l = \min\{|C_1|, |C_2|\}$, $m = |C_1 \cap C_2|$ ($1 \leq m \leq l \leq h$), 由定义 3 有 $f(C_1, C_2) = hl + (l-m)h + (n-h-l+m)l + (n-h-l+m)$ 。算法第 3-6 步中每一步所添加的支配集大小正好是 $f(C_1, C_2)$ 中 4 个求和项中的各项, 因此算法中所得 $CDS_{OTIS(G)}$ 大小为 $f(C_1, C_2)$ 。现在来证明

$CDS_{OTIS(G)}$ 是 $OTIS(G)$ 的连通支配集。由于每个簇都选取了一个连通支配点集,因此 $CDS_{OTIS(G)}$ 是 $OTIS(G)$ 的支配集是显然的。下面只需证明 $CDS_{OTIS(G)}$ 连通即可。首先,在算法第 3—5 步, $OTIS(G)$ 的每个簇中选取的支配集点在该簇内是连通的;其次,第 3—4 步保证了任意簇 $c \in C_1$ 和任意簇 $c' \in C_1 - C_2$ 间的连通支配集是连通的;最后第 6 步保证了任意簇 $c \in V - (C_1 \cup C_2)$ 中的支配集与某个簇 $j \in C_1 \cup C_2$ 中的支配集是连通的。证毕。

根据定义 3, $f(C, C) = n + (n-1)t$, 其中 $t = |C|$ 。这正是第一个算法 Solver-CDS-OTIS 所求的连通支配集的大小。另一方面,如果 $t = |C_1| = |C_2|$ 且 $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, 则 $f(C_1, C_2) = n + (n-2)t < n + (n-1)t$ 。由最佳支配集定义,算法 Solver2-CDS-OTIS 基于 G 的多个连通支配集所得 $OTIS$ 网络的连通支配集的大小不超过算法 Solver-CDS-OTIS 基于其中 G 的任何单个连通支配集所得 $OTIS$ 网络的连通支配集的大小。因此,算法 Solver2-CDS-OTIS 是第一个算法 Solver-CDS-OTIS 的推广及优化形式。即当获得因子网络的同样质量的一个或多个连通支配集时,第二个算法的结果不差于第一个算法的结果。

算法 Solver2-CDS-OTIS 的时间复杂度分析与 Solver-CDS-OTIS 类似。设求因子网络 G 的连通支配集的算法 Solver2-CDS 的时间复杂度为 $O(g(n))$ 。注意算法第 2 步中 \mathcal{R} 包含的连通支配集个数可设定为常数,因此求 \mathcal{R} 的最佳连通支配集对的时间复杂度为 $O(g(n) + n^2)$ 。算法其余步骤的时间复杂度不超过 $O(n^2)$, 因此算法 Solver2-CDS-OTIS 的时间复杂度为 $O(g(n) + n^2)$ 。即若增加与 $OTIS$ 网络节点数成比例的时间便可由因子网络的连通支配集得到 $OTIS$ 的连通支配集。

5 算法评价

本节对第 3,4 节的算法性能进行评估。由于这些算法都是从继承角度得出的,它们以直接作用在因子网络上的某算法(实际上是直接用于一般图上的算法)为基础,因此这些算法的具体性能依赖于作用在因子网络上的具体算法的性能(应用中可根据需要自由选择具体算法)。为了从一般意义上评价算法,我们将这些算法与一般图上的相应算法(即将 $OTIS$ 网络当作一般图而直接用于 $OTIS$ 网络上的算法)进行比较分析。为了方便,这里称直接用于 $OTIS$ 网络的算法 A 为直接算法,称第 3,4 节提出的 3 个算法(对因子网络 G 使用算法 A)为继承算法。鉴于 $OTIS$ 结构特征明显,这些算法中都只需存储因子网络 G 即可,因此继承算法与直接算法有相同的空间复杂度 $O(n^2)$ 。为了讨论这些继承算法的有效性,下面将从算法时间复杂度和算法解的质量两个方面来说明。

设求图 $G = \langle V, E \rangle$ 的支配集或连通支配集的某算法 A 的时间复杂度为 $g(n)$ (一般有 $g(n) = O(n^k)$, $k \geq 2$)^[1,4-6]。注意到 $OTIS(G)$ 网络的点数为 n^2 , 因此直接算法的时间复杂度为 $g(n^2) = O(n^{2k})$ 。另一方面,根据第 3,4 节的分析,3 个继承算法的时间复杂度为 $O(g(n) + n^2) = O(g(n)) = O(n^k)$, 因此从时间复杂度方面来看,3 个继承算法比直接算法要快。

求图的最小支配集、最小连通支配集(或确定其支配数和连通支配数)是 NP 难的^[1,3]。只有一些结构非常特殊的图才

能得出其支配数或连通支配数^[17,18]。而对于一般图,往往只能得到这些支配参数的界。笛卡尔积网络是一种应用非常普遍的复合网络,例如常见的网格、超立方体都属于笛卡尔积网络。目前只有非常简单特殊的笛卡尔积网络才能得出这些支配参数^[15],即使是超立方体这种很规则的网络,也不能得出精确的支配参数。1968 年提出的 Vizing 猜想是关于笛卡尔积网络与其因子网络支配数之间关系的一个猜想,即 $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G) \times \gamma(H)$, 此猜想至今尚未解决^[19]。这里的 $OTIS$ 网络也是一种复合网络,从理论上探讨由某些特殊的因子网络构建的 $OTIS$ 网络(即使因子网络是超立方体)的支配参数似乎也是困难的。为了从理论上评估继承算法所得解的质量,我们采用如下替代的方法:对将 $OTIS(G)$ 作为一般图的支配参数的上界(见定理 1 和定理 2)与继承算法所导出 $OTIS(G)$ 的支配参数的上界(推论 1 和推论 2)作比较。显然,继承算法导出的上界越小,在某种程度上说明继承类算法所求得解越好。

设 $\delta = \delta(G) = \delta(OTIS(G))$, $\alpha = n[1 + \ln(\delta + 1)] / (\delta + 1)$ 。先考虑求支配集的算法 Solver-DS-OTIS。根据定理 1,将 $OTIS(G)$ 看作一般图,得其支配数上界为

$$\gamma(OTIS(G)) \leq n\alpha \quad (1)$$

根据推论 1,由算法 Solver-DS-OTIS 可得到 $OTIS(G)$ 的支配数上界为

$$\gamma(OTIS(G)) \leq n\alpha - \alpha(\alpha - 1)/2 \quad (2)$$

显然式(1)和式(2)这两上界之差为 $\alpha(\alpha - 1)/2$,即算法 Solver-DS-OTIS 所得解导出 $OTIS(G)$ 的支配数的上界一般要小得多。比较结果如表 1 所列。

表 1 算法 Solver-DS-OTIS 与直接算法性能比较

算法性能	直接算法	Solver-DS-OTIS
时间复杂度	$O(n^{2k})$	$O(n^k)$
解的上界	$n\alpha$	$n\alpha - \alpha(\alpha - 1)/2$

现在考虑求连通支配集的继承算法。因算法 Solver2-CDS-OTIS 所得解质量比 Solver-CDS-OTIS 的要好,因此只考虑 Solver-CDS-OTIS 即可。根据定理 2,将 $OTIS(G)$ 看作一般图得连通支配数上界为

$$\gamma_c(OTIS(G)) \leq 3n^2 / (\delta + 1) - 2 \quad (3)$$

根据推论 2,由算法 Solver-CDS-OTIS 导出的连通支配数的上界为

$$\begin{aligned} \gamma_c(OTIS(G)) &\leq n + (n-1)[3n / (\delta + 1) - 2] \\ &= 3n^2 / (\delta + 1) - 3n / (\delta + 1) - n + 2 \end{aligned} \quad (4)$$

式(3)和式(4)这两个界之差为 $3n / (\delta + 1) + n - 4 \geq 0$ 。相对 n 而言,如果 δ 越小,这个差 $3n / (\delta + 1) + n - 4$ 就越大,即算法 Solver-CDS-OTIS 和 Solver2-CDS-OTIS 所得解导出 $OTIS(G)$ 的连通支配数的上界一般要小得多。由此可见,在算法所得解的质量方面,继承算法是有效的。比较结果如表 2 所列。

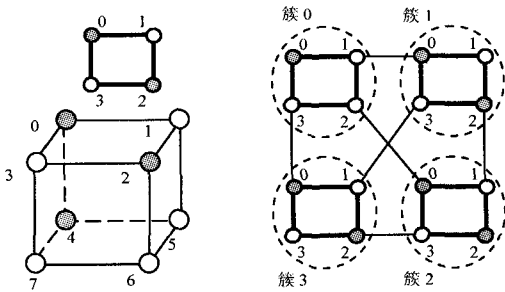
表 2 算法 Solver-CDS-OTIS 与直接算法性能比较

算法性能	直接算法	Solver-CDS-OTIS
时间复杂度	$O(n^{2k})$	$O(n^k)$
解的上界	$3n^2 / (\delta + 1) - 2$	$3n^2 / (\delta + 1) - 3n / (\delta + 1) - n + 2$

理论研究和实际应用中,超立方体(Hypercube)都是最常用的网络拓扑之一。下面来具体看看几个继承算法在 $OTIS$

(Q_2)上的性能,其中 $OTIS(Q_2)$ 是以超立方体 Q_2 为因子网络的 OTIS 网络。

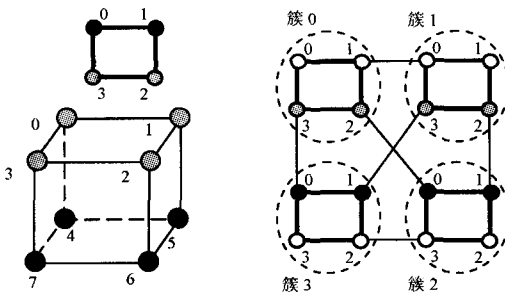
图 5(a)给出了超立方体 Q_2 和 Q_3 的一个支配集(灰点集);图 5(b)给出了 Solver-DS-OTIS 所求得 $OTIS(Q_2)$ 的支配集(灰点集),容易看出它实际上是 $OTIS(Q_2)$ 的一个极小支配集。



(a) Q_2 和 Q_3 的一个支配集(灰点集) (b) $OTIS(Q_2)$ 的支配集(灰点集)

其中 Q_2 是 4 个节点的环网络

图 5 算法 Solver-DS-OTIS 得出的 $OTIS(Q_2)$ 的支配集



(a) Q_2 和 Q_3 的两个连通支配集 (b) $OTIS(Q_2)$ 的连通支配集(灰点黑点并集)

其中 Q_2 是 4 个节点的环网络

图 6 算法 Solver2-CDS-OTIS 得出的 $OTIS(Q_2)$ 的连通支配集

图 6(a)给出了超立方体 Q_2 和 Q_3 的两个连通支配集(灰点集、黑点集各为一连通支配集);图 6(b)给出了 Solver2-CDS-OTIS 求得的 $OTIS(Q_2)$ 的连通支配集(灰点和黑点的并集),容易看出实际上它是 $OTIS(Q_2)$ 的一个极小连通支配集。

结束语 研究了 OTIS 网络的支配集和连通支配集的有效构建算法。遵循 OTIS 网络的一般研究思路,即从继承的角度,先使用某现存算法 A 构造因子网络的支配集(连通支配集),然后基于 OTIS 网络的构图规则快速得到整个 OTIS 的相应支配集(连通支配集)。所得算法时间复杂度低,所得结果比直接将算法 A 作用在 OTIS 网络上所得的结果要好。据我们所知,这是 OTIS 网络支配集研究的首次尝试。此外,从图论上来看,与笛卡尔积网络类似,OTIS 网络也是一大类图,本文研究结果实际上也给出这一大类图的支配集和连通支配集的有效构造方法。未来感兴趣的工作包括两方面:一是如果将求解连通支配集的近似算法作用在因子网络上,探讨本文算法是否保持这个近似算法的近似比性能;二是基于实际应用,设计求解 OTIS 网络的支配集和连通支配集的分布式算法,并通过广泛模拟实验来评估算法的实际性能。

参考文献

- [1] Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. Fundamentals of Domination in Graphs [M]. New York: Marcel Dekker Inc., 1998:15-60
- [2] 徐俊明. 组合网络理论[M]. 北京:科学出版社,2007:259-269
- [3] Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness [M]. San Francisco: W. H. Freeman, 1979:190
- [4] Guha S, Khuller S. Approximation algorithms for connected dominating sets [J]. Algorithmica, 1998, 20(4): 374-387
- [5] Dai Fei, Wu Jie. An Extended Localized Algorithm for Connected Dominating Set Formation in Ad-hoc Wireless Networks [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2004, 15(10): 908-920
- [6] Thai My T, Tiwari R, Du Ding-zhu. On Construction of Virtual Backbone in Wireless Ad-hoc Networks with Unidirectional Links [J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2008, 7(9): 1098-1109
- [7] 唐勇,周明天. 基于极大独立集的最小连通支配集的分布式算法[J]. 电子学报, 2007, 35(5): 868-874
- [8] 路纲,周明天,唐勇,等. 任意图支配集精确算法回顾[J]. 计算机学报, 2010, 33(6): 1073-1087
- [9] Marsden G C, Marchand P J, Harvey P, et al. Optical transpose interconnection system architectures [J]. Optical Letters, 1993, 18(13): 1083-1085
- [10] Behrooz P. Swapped interconnection networks: Topological, performance, and robustness attributes [J]. J. Parallel Distrib. Comput., 2005, 65(11): 1443-1452
- [11] Day K. Optical transpose k-ary n-cube networks [J]. Journal of Systems Architecture, 2004, 2(50): 697-705
- [12] Chen Wei-dong, Xiao Wen-jun, Behrooz P. Swapped (OTIS) networks built of connected basis networks are maximally fault tolerant [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2009, 20(3): 361-366
- [13] Rajasekaran S, Sahni S. Randomized Routing, Selection, and Sorting on the OTIS-Mesh [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1998, 9(9): 833-840
- [14] Wang Chih-fang, Sahni S. Image processing on the OTIS-mesh optoelectronic computer [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2002, 2(11): 97-109
- [15] Liu Juan, Zhang Xin-dong, Chen Xing, et al. On Domination Number of Cartesian Product of Directed Cycles [J]. Information Processing Letters, 2010, 110(5): 171-173
- [16] West D B. Introduction to Graph Theory [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2001: 149-169
- [17] Toru A. On the k-tuple domination of de Bruijn and Kautz digraphs [J]. Information Processing Letters, 2007, 104(3): 86-90
- [18] Kelkar I, Maheswari B. Accurate Domination Number of Butterfly Graph [J]. Chamchuri Journal of Mathematics, 2009, 1(1): 35-43
- [19] Vizing V G. Some unsolved problems in graph theory (in Russian) [J]. Uspehi Mat. Naukno, 1968, 23(6): 117-134