

基于分子格的粗糙集模型推广

赵 涛 秦克云

(西南交通大学数学学院 成都 610031)

摘 要 粗糙集模型的推广是粗糙集理论研究的重要方向之一。在分子格的框架下,定义了一个从分子到一般元素的映射,基于该映射,分别构造了两种上近似算子和两种下近似算子,并讨论了这些算子的基本性质。

关键词 粗糙集,分子格,近似算子

中图分类号 TP18 **文献标识码** A

Generalization of Rough Set Model Based on Molecular Lattices

ZHAO Tao QIN Ke-yun

(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract The generalization of rough set model is one of the most important branches of rough set theory study. This paper was devoted to the study of rough approximations on molecular lattice. A mapping which from the set of molecules to molecular lattice was defined, and two upper approximation operators and two lower approximation operators were defined using the mapping based on the framework of molecular lattice. Finally, the properties of these operators were derived.

Keywords Rough set, Molecular lattices, Approximation operator

1 引言

粗糙集理论是一种新的处理模糊性和不确定性知识的数学工具。自1982年由波兰数学家Pawlak^[1,2]首次提出以来,经过二十几年的研究与发展,已经在理论和实际应用上取得了长足的发展,特别是20世纪80年代末和90年代初在知识发现等领域的成功应用而受到了国际上的广泛关注。目前,它已经在机器学习、知识与数据发现、决策支持与分析等方面得到了成功的应用。

在Pawlak粗糙集模型中,论域上的等价关系起到了重要的作用,基于等价关系形成划分,构造了论域的上、下近似算子,用来刻画不确定的概念。为推广粗糙集理论的应用范围,许多学者对Pawlak粗糙集模型进行了多种形式的推广,相继提出了基于一般二元关系的粗糙集模型、变精度粗糙集模型、覆盖粗糙集模型、模糊粗糙集模型等。为了给以上的推广形式提供统一的理论框架,Chen^[3]在完全分配格框架下,使用覆盖的概念定义了上、下近似算子并研究了它们的性质。代建华^[4]在分子格中借助从分子到一般元素的映射,构造了上、下近似算子,研究了当映射为外展映射、对称映射和内缩映射时算子与模态逻辑的对应关系。注意到其上近似算子不是Pawlak粗糙集模型中上近似算子的推广。基于此,本文在文献[4]的基础上,保留下近似算子定义,重新定义了两种新的上近似算子和一种下近似算子。若将映射限制为外展映射,则定义的算子就是真正意义上的粗糙近似算子。本文的

主要工作是在外展映射的前提下,研究这些近似算子的基本性质。当将分子格具体化为一般的集代数 $(2^U, \subseteq)$ 时,本文中的近似算子退化为Pawlak粗糙集模型中的上、下近似算子。

2 预备知识

本节介绍分子格的有关概念及结论。

王国俊在文献[5]中首次引入“分子”概念,建立了拓扑分子格理论,随后又在文献[6]中对分子条件作了较大幅度的减弱,建立了广义拓扑分子格理论,文献[7]已证明完全分配格实质就是一类广义分子格,分子集就是格中非零的并既约元之集。

定义 1^[8] 设 L 是格, $a \in L$, a 叫并既约元,若对 L 的任意元 x 与 y ,当 $a = x \vee y$ 时,有 $x = a$ 或 $y = a$ 。 L 中的非零并既约元叫分子。

定理 1^[8] 设 L 是完全分配格,则 L 中每个元都可以表示为分子之并。

定义 2^[8] 设 L 是完全分配格,则称 L 为分子格。

本文以下总假设 $L(\pi)$ 为完全分配格,并分别以1和0表示其最大元和最小元, π 表示分子的集合。

引理 1^[3] 对于 $\forall x, y \in L, x \leq y$ 当且仅当对于 $\forall p \in \pi, p \leq x \Rightarrow p \leq y$ 成立。

3 上近似算子

文献[4]的上近似算子不是Pawlak粗糙集模型中上近似

到稿日期:2011-01-02 返修日期:2011-06-29 本文受国家自然科学基金(60875034)资助。

赵 涛(1988—),男,硕士生,主要研究方向为粗糙集、智能信息处理;秦克云(1962—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为多值逻辑和不确定性推理。

算子的推广。基于此,本文在分子格上重新定义了两种形式完全不同于文献[4]的上近似算子。若将映射限制为外展映射,则定义两种上近似算子就是真正意义上的粗糙近似算子。接下来讨论这两种上近似算子及其相应的性质。

定义 3 设 $\varphi: \pi \rightarrow L$ 为一映射, φ 满足 $\forall p \in \pi, p \leq \varphi(p)$ 。定义上近似算子 $\bar{S}_1, \bar{S}_2: L \rightarrow L$ 为: $\forall x \in L$,

$$\bar{S}_1(x) = \bigvee \{p \in \pi; \varphi(p) \wedge x \neq 0\}$$

$$\bar{S}_2(x) = \bigvee_{p \in \pi} \{\varphi(p); \varphi(p) \wedge x \neq 0\}$$

注:若格具体化为一般的集代数,即 $L = (P(U), \subseteq)$,此时分子集为 $\pi = \{\{x\} | x \in U\}$,将映射 φ 理解为 $\varphi: U \rightarrow P(U), x \rightarrow [x]_R$,其中 $[x]_R$ 为等价关系 R 下的等价类,则近似算子 $\bar{S}_1$ 和 $\bar{S}_2$ 就是 Pawlak 粗糙集模型中的上近似算子。

定理 2 设 $\bar{S}_1$ 是定义 3 中的上近似算子,对于 $\forall x, y \in L$,有

- (1) $\bar{S}_1(0) = 0, \bar{S}_1(1) = 1$;
- (2) $x \leq \bar{S}_1(x)$;
- (3) $x \leq y \Rightarrow \bar{S}_1(x) \leq \bar{S}_1(y)$;
- (4) $\bar{S}_1(x \vee y) = \bar{S}_1(x) \vee \bar{S}_1(y)$;
- (5) $\bar{S}_1(x) \leq \bar{S}_1(\bar{S}_1(x))$ 。

证明:(1)由定义可直接得到 $\bar{S}_1(0) = 0$,且 $\bar{S}_1(1) = \bigvee \{p \in \pi; \varphi(p) \wedge 1 \neq 0\} = \bigvee \{p \in \pi; \varphi(p) \neq 0\} = \bigvee \{p; p \in \pi\} = 1$ 。

(2)对于任意 $x \in L, p \in \pi$,若 $p \leq x$,则 $\varphi(p) \wedge x \geq p \wedge x = p \neq 0$,从而 $p \leq \bigvee \{q \in \pi; \varphi(q) \wedge x \neq 0\} = \bar{S}_1(x)$,由引理 2 可得 $x \leq \bar{S}_1(x)$ 。

(3)直接由定义可得。

(4)由(3)可得 $\bar{S}_1(x) \vee \bar{S}_1(y) \leq \bar{S}_1(x \vee y)$ 。另一方面,若 $\varphi(p) \wedge (x \vee y) \neq 0$,则 $(\varphi(p) \wedge x) \vee (\varphi(p) \wedge y) \neq 0$,不妨设 $\varphi(p) \wedge x \neq 0$,于是 $p \leq \bigvee \{q \in \pi; \varphi(q) \wedge x \neq 0\} = \bar{S}_1(x) \leq \bar{S}_1(x) \vee \bar{S}_1(y)$,故 $\bar{S}_1(x \vee y) = \bigvee \{u \in \pi; \varphi(u) \wedge (x \vee y) \neq 0\} \leq \bar{S}_1(x) \vee \bar{S}_1(y)$ 。

(5)由(2)可得。

例 1 令 $U = \{1, 2, 3, 4\}$,则 $L = (P(U), \subseteq)$ 是分子格,其中 $\pi = \{\{x\} | x \in U\}$ 。设 $\varphi(\{1\}) = \{1\}, \varphi(\{2\}) = \{2\}, \varphi(\{3\}) = \{1, 3\}, \varphi(\{4\}) = \{3, 4\}$ 。对于 $A = \{1, 2\}$,经计算可得 $\bar{S}_1(A) = \{1, 2, 3\}, \bar{S}_1(\bar{S}_1(A)) = \{1, 2, 3, 4\}$ 。所以, $\bar{S}_1(x) = \bar{S}_1(\bar{S}_1(x))$ 一般不成立。

定理 3 设 $\bar{S}_2$ 是定义 3 中的上近似算子,对于 $\forall x, y \in L$,有

- (1) $\bar{S}_2(0) = 0, \bar{S}_2(1) = 1$;
- (2) $x \leq \bar{S}_2(x)$;
- (3) $x \leq y \Rightarrow \bar{S}_2(x) \leq \bar{S}_2(y)$;
- (4) $\bar{S}_2(x \vee y) = \bar{S}_2(x) \vee \bar{S}_2(y)$;
- (5) $\bar{S}_2(x) \leq \bar{S}_2(\bar{S}_2(x))$ 。

证明:定理的证明类似于定理 2 的证明。

定理 4 设 $\bar{S}_1$ 是定义 3 中的上近似算子,若 $\forall p, q \in \pi$, $\varphi(p) \wedge \varphi(q) \neq 0 \Rightarrow \varphi(p) = \varphi(q)$ 成立,则 $\bar{S}_1(x) = \bar{S}_1(\bar{S}_1(x))$ 。

证明:若 $p \in \pi$ 使得 $\varphi(p) \wedge \bar{S}_1(x) \neq 0$,则 $\bigvee \{\varphi(p) \wedge q; \varphi(q) \wedge x \neq 0\} \neq 0$,从而存在 $q \in \pi$ 使得 $\varphi(p) \wedge q \neq 0, \varphi(p) \wedge \varphi(q) \geq \varphi(p) \wedge q \neq 0$,由假设 $\varphi(p) = \varphi(q)$,即 $\varphi(p) \wedge x \neq 0$,故 $p \leq \bar{S}_1(x)$,由 p 的任意性,有 $\bar{S}_1(\bar{S}_1(x)) \leq \bar{S}_1(x)$ 。再由定理

2(5)知结论成立。

定理 5 设 $\bar{S}_2$ 是定义 3 中的上近似算子,若 $\forall p, q \in \pi$, $\varphi(p) \wedge \varphi(q) \neq 0 \Rightarrow \varphi(p) = \varphi(q)$ 成立,则 $\bar{S}_2(x) = \bar{S}_2(\bar{S}_2(x))$ 。

证明:类似于定理 4。

4 下近似算子

文献[4]的下近似算子是 Pawlak 粗糙集模型中下近似算子的推广。基于此,本文保留该下近似算子定义(即本文的 $\underline{S}_1$),并推广定义了另一种形式类似于文献[4]的下近似算子(即本文的 $\underline{S}_2$)。若将映射限制为外展映射,则定义两种下近似算子就是真正意义上的粗糙近似算子。接下来就开始讨论这两种下近似算子及其相应的性质。

定义 4 设 $\varphi: \pi \rightarrow L$ 为一映射, φ 满足 $\forall p \in \pi, p \leq \varphi(p)$ 。定义下近似算子 $\underline{S}_1, \underline{S}_2: L \rightarrow L$ 为

$$\forall x \in L$$

$$\underline{S}_1(x) = \bigvee \{p \in \pi; \varphi(p) \leq x\}$$

$$\underline{S}_2(x) = \bigvee_{p \in \pi} \{\varphi(p); \varphi(p) \leq x\}$$

注:若格具体化为一般的集代数,即 $L = (P(U), \subseteq)$,此时分子集为 $\pi = \{\{x\} | x \in U\}$,将映射 φ 理解为 $\varphi: U \rightarrow P(U), x \rightarrow [x]_R$,其中 $[x]_R$ 为等价关系 R 下的等价类,则近似算子 $\underline{S}_1$ 和 $\underline{S}_2$ 就是 Pawlak 粗糙集模型中的下近似算子。

定理 6 设 $\underline{S}_1$ 是定义 4 中的下近似算子,对于 $\forall x, y \in L$,有

- (1) $\underline{S}_1(0) = 0, \underline{S}_1(1) = 1$;
- (2) $\underline{S}_1(x) \leq x$;
- (3) $x \leq y \Rightarrow \underline{S}_1(x) \leq \underline{S}_1(y)$;
- (4) $\underline{S}_1(x \wedge y) \leq \underline{S}_1(x) \wedge \underline{S}_1(y)$;
- (5) $\underline{S}_1(\underline{S}_1(x)) \leq \underline{S}_1(x)$ 。

证明:(1)由定义可直接得到 $\underline{S}_1(0) = 0$,且 $1 = \bigvee \{p; p \in \pi\} \leq \bigvee \{p \in \pi; \varphi(p) \leq 1\} = \underline{S}_1(1)$,即 $\underline{S}_1(1) = 1$ 。

(2)对于任意 $x \in L, p \in \pi$,若 $\varphi(p) \leq x$,则 $p \leq x$,由 p 的任意性,有 $\underline{S}_1(x) \leq x$ 。

(3)直接由定义可得。

(4)由(3)直接可得。

(5)由(2)直接可得。

例 2^[8] 设格 $L = \{0, a, b, c, d, 1\}$,图 1 是其 Hasse 图,则 L 是完全分配格。该格的分子集为 $\pi = \{a, b, d, 1\}$ 。令 $\varphi(a) = a, \varphi(b) = b, \varphi(d) = a, \varphi(1) = 1$ 。依据定义 4 可得 $\underline{S}_1(a \wedge b) = \underline{S}_1(d) = 0, \underline{S}_1(a) \wedge \underline{S}_1(b) = a \wedge b = d$ 。所以, $\underline{S}_1(x \wedge y) = \underline{S}_1(x) \wedge \underline{S}_1(y)$ 一般不成立。

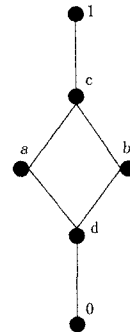


图 1

例3 令 $U=\{1,2,3,4\}$, 则 $L=(P(U), \subseteq)$ 是分子格, 其中 $\pi=\{\{x\} | x \in U\}$. 设 $\varphi(\{1\})=\{1,2\}$, $\varphi(\{2\})=\{2,3\}$, $\varphi(\{3\})=\{3,4\}$, $\varphi(\{4\})=\{4\}$. 对于 $A=\{1,2,3\}$, 经计算可得 $\underline{S}_1(A)=\{1,2\}$, $\underline{S}_1(\underline{S}_1(A))=\{1\}$. 所以, $\underline{S}_1(x)=\underline{S}_1(\underline{S}_1(x))$ 一般不成立.

定理7 设 $\underline{S}_2$ 是定义4中的下近似算子, 对于 $\forall x, y \in L$, 有

- (1) $\underline{S}_2(0)=0, \underline{S}_2(1)=1$;
- (2) $\underline{S}_2(x) \leq x$;
- (3) $x \leq y \Rightarrow \underline{S}_2(x) \leq \underline{S}_2(y)$;
- (4) $\underline{S}_2(x \wedge y) \leq \underline{S}_2(x) \wedge \underline{S}_2(y)$;
- (5) $\underline{S}_2(x) = \underline{S}_2(\underline{S}_2(x))$.

证明: (1)、(2)、(3)、(4)由定义可得.

(5) 对于任意 $p \in \pi, x \in L$, 若 $\varphi(p) \leq x$, 则 $\varphi(p) \leq \bigvee \{\varphi(q) | \varphi(q) \leq x\} = \underline{S}_2(x)$, 从而有 $\varphi(p) \leq \bigvee \{\varphi(q) | \varphi(q) \leq \underline{S}_2(x)\} = \underline{S}_2(\underline{S}_2(x))$. 于是有 $\underline{S}_2(x) \leq \underline{S}_2(\underline{S}_2(x))$. 另一方面, 由(2)可得 $\underline{S}_2(\underline{S}_2(x)) \leq \underline{S}_2(x)$.

例4 令 $U=\{1,2,3,4,5\}$, 则 $L=(P(U), \subseteq)$ 是分子格, 其中 $\pi=\{\{x\} | x \in U\}$, 设 $\varphi(\{1\})=\{1\}$, $\varphi(\{2\})=\{2\}$, $\varphi(\{3\})=\{1,2,3,4\}$, $\varphi(\{4\})=\{2,3,4,5\}$, $\varphi(\{5\})=\{5\}$. 对于 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, 计算得 $\underline{S}_2(A)=\{1,2,3,4\}$, $\underline{S}_2(B)=\{2,3,4,5\}$, $\underline{S}_1(A \cap B)=\{2\}$. 所以, $\underline{S}_2(x \wedge y) = \underline{S}_2(x) \wedge \underline{S}_2(y)$ 一般不成立.

定理8 设 $\underline{S}_1$ 是定义4中的下近似算子, 若 $\forall p, q \in \pi$, $q \leq \varphi(p) \Rightarrow \varphi(p) = \varphi(q)$ 成立, 则 $\underline{S}_1(\underline{S}_1(x)) = \underline{S}_1(x)$.

证明: 若 $p \in \pi$ 使得 $\varphi(p) \leq x$, 令 m 为任意分子且 $m \leq \varphi(p)$, 由定理条件知 $\varphi(m) = \varphi(p) \leq x$, 故 $m \leq \underline{S}_1(x)$. 由引理1知 $\varphi(p) \leq \underline{S}_1(x)$, 即 $p \leq \underline{S}_1(\underline{S}_1(x))$, 由 p 的任意性知 $\underline{S}_1(x) \leq \underline{S}_1(\underline{S}_1(x))$. 再由定理6(5), 结论成立.

5 算子间关系

本节讨论两对上、下近似算子间的关系. 显然, 对于 $\forall x \in L$, 有 $\underline{S}_1(x) \leq \underline{S}_2(x)$, $\bar{S}_1(x) \leq \bar{S}_2(x)$.

定理9 设 $\bar{S}_1$ 是定义3中的上近似算子, $\underline{S}_1$ 是定义4中的下近似算子. 对于 $\forall x \in L$, 有

- (1) $\underline{S}_1(x) \leq \bar{S}_1(\underline{S}_1(x))$;
- (2) $\underline{S}_1(\bar{S}_1(x)) \leq \bar{S}_1(x)$.

证明: (1)由定理2(2)直接可得.

(2)由定理6(2)直接可得.

例5 令 $U=\{1,2,3,4\}$, 则 $L=(P(U), \subseteq)$ 是分子格, 其中 $\pi=\{\{x\} | x \in U\}$. 设 $\varphi(\{1\})=\{1,2\}$, $\varphi(\{2\})=\{2,3\}$, $\varphi(\{3\})=\{1,3,4\}$, $\varphi(\{4\})=\{4\}$.

(1) 对于 $A=\{1,2,3\}$, 由定义计算可得 $\underline{S}_1(A)=\{1,2\}$, $\bar{S}_1(\underline{S}_1(A))=\bar{S}_1(\{1,2\})=\{1,2,3\}$. 所以, $\underline{S}_1(x) = \bar{S}_1(\underline{S}_1(x))$ 一般不成立.

(2) 对于 $B=\{1,2\}$, 由定义直接计算可得 $\bar{S}_1(B)=\{1,2,3\}$, $\underline{S}_1(\bar{S}_1(B))=\underline{S}_1(\{1,2,3\})=\{1,2\}$. 所以, $\underline{S}_1(\bar{S}_1(x)) = \bar{S}_1(x)$ 一般不成立.

定理10 设 $\bar{S}_1$ 是定义3中的上近似算子, $\underline{S}_1$ 是定义4中的下近似算子. 若 $\forall p, q \in \pi, \varphi(p) \wedge \varphi(q) \neq 0 \Rightarrow \varphi(p) = \varphi(q)$ 成立, 则 $\underline{S}_1(x) = \bar{S}_1(\underline{S}_1(x))$.

证明: 类似于定理4的证明.

定理11 设 $\bar{S}_1$ 是定义3中的上近似算子, $\underline{S}_1$ 是定义4中的下近似算子. 若 $\forall p, q \in \pi, q \leq \varphi(p) \Rightarrow \varphi(p) = \varphi(q)$ 成立, 则 $\underline{S}_1(\bar{S}_1(x)) = \bar{S}_1(x)$.

证明: 类似于定理8的证明.

定理12 设 $\bar{S}_2$ 是定义3中的上近似算子, $\underline{S}_2$ 是定义4中的下近似算子. 对于 $\forall x \in L$, 有

- (1) $\underline{S}_2(x) \leq \bar{S}_2(\underline{S}_2(x))$;
- (2) $\underline{S}_2(\bar{S}_2(x)) = \bar{S}_2(x)$.

证明: (1)由定理3(2)直接可得.

(2)若 $p \in \pi$ 使得 $\varphi(p) \wedge x \neq 0$, 则 $\varphi(p) \leq \bar{S}_2(x)$, 从而 $\varphi(p) \leq \underline{S}_2(\bar{S}_2(x))$, 由 p 的任意性可知 $\bar{S}_2(x) \leq \underline{S}_2(\bar{S}_2(x))$. 再由定理7(2), 结论成立.

例6 令 $U=\{1,2,3,4\}$, 则 $L=(P(U), \subseteq)$ 是分子格, 其中 $\pi=\{\{x\} | x \in U\}$. 设 $\varphi(\{1\})=\{1,2\}$, $\varphi(\{2\})=\{2,3\}$, $\varphi(\{3\})=\{1,3,4\}$, $\varphi(\{4\})=\{4\}$. 对于 $A=\{1,2,3\}$, 经计算可得 $\underline{S}_2(A)=\{1,2,3\}$, $\bar{S}_2(\underline{S}_2(A))=\bar{S}_2(\{1,2,3\})=\{1,2,3,4\}$. 所以, $\underline{S}_2(x) = \bar{S}_2(\underline{S}_2(x))$ 一般不成立.

定理13 设 $\bar{S}_2$ 是定义3中的上近似算子, $\underline{S}_2$ 是定义4中的下近似算子. 若 $\forall p, q \in \pi, \varphi(p) \wedge \varphi(q) \neq 0 \Rightarrow \varphi(p) = \varphi(q)$ 成立, 则 $\underline{S}_2(x) = \bar{S}_2(\underline{S}_2(x))$.

证明: 类似于定理4的证明.

结束语 粗糙集模型的推广一直吸引着众多研究者. 本文基于分子格, 分别定义了两种新的上近似算子和两种下近似算子, 并且研究了它们的基本性质. 本文的结果部分推广了文献[4]中相应的结论. 关于本文提出的近似算子的拓朴性质以及公理化描述, 将另文详述.

参考文献

- [1] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Information Science, 1982, 11(5): 341-356
- [2] Pawlak Z. Rough Sets; Theoretical Aspects of Reasoning About Data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991
- [3] Chen De-gang, Zhang Wen-xiu, Yeung D, et al. Rough approximations on a complete completely distributive lattice with applications to generalized rough sets [J]. Information Sciences, 2006, 176: 1829-1848
- [4] 代建华. 利用分子格对粗糙集理论进行推广[J]. 计算机学报, 2004, 27(10): 1436-1440
- [5] 王国俊. 拓朴分子格(1)[J]. 科学通报, 1983, 18: 1089-1091
- [6] 王国俊. 广义拓朴分子格[J]. 中国科学: A 辑, 1983, 12: 1063-1072
- [7] 王国俊. 论 Fuzzy 格之构造[J]. 数学学报, 1986, 29(4): 539-543
- [8] 王国俊. L-Fuzzy 拓朴空间论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988