

基于多目标模糊线性规划求解方法的飞机排班问题研究

吴东华^{1,2} 夏洪山²

(南京航空航天大学继续教育学院 南京 210016)¹ (南京航空航天大学民航学院 南京 210016)²

摘要 提出了一种基于多目标模糊线性规划法解决飞机排班问题的新算法。该算法将模糊理论与最优化概念相结合,根据最大隶属度原则,将以飞机飞行时间均衡优先、飞机起降次数均衡优先、飞机等待时间最少优先为目标函数的多目标模糊线性规划数学模型转化为一般的线性规划问题进行求解。实验数据表明,该算法可行、有效,步骤简捷,计算量小,能得到理想的结果。

关键词 多目标优化,模糊论,最大隶属度,飞机排班,线性规划

中图分类号 TP391.41, O221.1 **文献标识码** A

Fleet Assignment Problem Study Based on Multi-objective Fuzzy Linear Optimization Algorithm

WU Dong-hua^{1,2} XIA Hong-shan²

(College of Continuing and Education, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)¹

(College of Civil Aviation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)²

Abstract A new method based on multi-objective fuzzy linear optimization algorithm for fleet assignment problem was proposed. The method applied fuzzy theory to optimization concept, turning the fuzzy multi-objective optimization mathematical model with the objective of the balance of aircraft flight time, the balance of the numbers of the aircraft movements and least waiting time first to a linear programming problem according to the maximum degree of membership. The result of the experiment shows the method can rapidly get the desired results.

Keywords Multi-objective optimization, Fuzzy theory, Maximum degree of membership, Fleet assignment, Linear programming

1 引言

美国加利福尼亚大学控制论教授扎得(L. A. Zadeh)在1965年发表了题为《模糊集》(Fuzzy Set)^[1]的论文。随后,德国模糊系统专家 H. J. Zimmermann 于1978年提出了模糊线性规划问题(Fuzzy Liner Problem, FLP)^[2],此后模糊集的理论与应用得到了迅速发展。目前国内外众多学者主要偏重于研究约束中带有三角模糊数或梯形模糊数的线性规划问题^[3-7]和目标中带有模糊系数的线性规划问题的解法^[8]。

飞机排班问题(Fleet Assignment Problem, FAP)是多目标多约束条件的组合优化问题,是民航界著名的 NP 难问题。合理的飞机排班不仅有助于航班的安全、正点运行,而且还能提高机队的利用率,有效地降低运营和维护成本。飞机排班问题的优化目标主要包括利润最大化、飞机使用上均衡、航班尽早恢复等;约束条件包括要满足航班覆盖、维护要求和机队均衡等要求^[9]。

在美国,大多数航空公司的航线网络都是各种形态的枢纽轮辐式(hub-and-spoke)结构,在各枢纽之间及轮辐城市之间有很高的航班频次,每天的航班计划基本相同,而且其限制飞机排班的一个最重要约束是“4天维护规则”。而在我国,航空公司的运营主要是基于点到点的单枢纽模式,一周内各

天的航班计划有较大的差异,飞机排班时需考虑的约束限制较多,因此国外现有的研究结果并不适用于我国,必须找到一种切实可行、适应我国航空公司运营方式的方法。国内研究飞机排班问题算法的主要有:孙宏等人应用模拟退火算法、二部图最大匹配方法和固定工件排序模型和 Hungarian 算法研究了基于最少飞机数、基于飞机使用均衡和基于飞机调度指令要求下的飞机排班问题,并在其《飞机排班数学规划模型》中,应用以上算法对20架飞机、35个航班节得到一个满意的排班方案时间,即接近23秒^[10]。王伟、王锦彪从划分与划分加细的角度讨论了航班组合等问题^[11]。上述算法虽然为民航飞机排班问题的解决提供了思路,但这些算法并没有有效解决飞机排班过程中的多目标优化问题。

针对上述情况,本文讨论了有多个目标函数多个约束条件的线性规划问题的解法,针对飞机排班问题的不同优化目标建立了飞机排班问题数学模型,提出了一种基于多目标模糊线性规划法解决飞机排班问题的新算法,最后给出了计算实例并对结果进行了分析。

2 多目标模糊线性规划问题的数学模型及相关定义

在解决实际问题时,常常会遇到多个目标函数的线性规划问题。一般来说,要同时使多个目标函数均达到最优解往

往是困难的,这就需要用折中的方法来处理,使各目标相对地“极大”。方法是将线性规划中的目标函数模糊化,引入隶属度函数,从而导出一个新的线性规划问题,新问题的最优解成为原问题的模糊最优解。

多目标线性规划问题的一般数学模型描述为:

数学模型 1 具有 r 个目标、 m 个决策变量、 n 个约束条件的多目标线性规划问题的一般数学模型:

$$\begin{aligned} \max Z &= Cx \\ \text{s.t. } &\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_r)^T$, 而 $Z_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n$ ($i=1, 2, \dots, r$).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T, x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T.$$

定义 1 单目标函数 Z_i 在数学模型 1 约束条件下的最优值 Z_i^* 定义为:

$$Z_i^* = \max\{Z_i \mid Z_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}x_j, Ax \leq b, x \geq 0\} \quad (i=1, 2, \dots, r) \quad (2)$$

定义 2 设 U 是论域,若对 $\forall x \in U$, 都有一个数 $A(x) \in [0, 1]$ 与之对应,则称 A 为 U 上的模糊集, $A(x)$ 称为 x 对 A 的隶属度。当 x 在 U 中变动时, $A(x)$ 就是一个函数,称为 A 的隶属函数。取值于区间 $[0, 1]$ 的隶属函数 $A(x)$ 表征 x 属于 A 的程度高低。

目前,隶属度函数的确定还没有一套成熟有效的方法,大多数系统的确立方法还停留在经验和实验的基础上。对于同一个模糊概念,不同的人会建立完全不同的隶属度函数,本文定义如下的隶属度函数。

定义 3 若对每个最优值 Z_i^* ($i=1, 2, \dots, r$), 给出一个伸缩性指标 d_i ($d_i > 0$), 确定多目标隶属度函数 $F_i(x)$ 为:

$$F_i(x) = g_i\left(\sum_{j=1}^m c_{ij}x_j\right) = \begin{cases} 0, & \sum_{j=1}^m c_{ij}x_j < Z_i^* - d_i \\ 1 - \frac{1}{d_i}(Z_i^* - \sum_{j=1}^m c_{ij}x_j), & Z_i^* - d_i \leq \sum_{j=1}^m c_{ij}x_j < Z_i^* \\ 1, & \sum_{j=1}^m c_{ij}x_j \geq Z_i^* \end{cases} \quad (3)$$

式中, d_i 是描述各目标重要性程度的指标, d_i 越小,表示目标函数 Z_i 越重要。根据定义 3 可知, $F_i(x)$ 越接近于 1, 表示 x 属于 F_i 的程度越高, $F_i(x)$ 越接近于 0, 表示 x 属于 F_i 的程度越低。因此,隶属度函数 $F_i(x) \in [0, 1]$ ($i=1, 2, \dots, r$) 可以表征 x 属于 F_i 的程度高低。通过引入隶属函数,就可以将线性规划中的多个目标函数模糊化。

定义 4 令 $F = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_r$,

$$\lambda = F_1(x) \wedge F_2(x) \wedge \dots \wedge F_r(x) \quad (4)$$

则 F 是对应于多目标函数 $Z = Cx$ 模糊化后的模糊目标集, λ 是 x 属于 F 的隶属度。

定义 5 设 U 是论域, $A \subseteq U$, $f: A \rightarrow R$ 为 U 上的一个有

界实值函数,令:

$$M = \{x^* \mid f(x^*) = \max_{x \in A} f(x)\} \quad (5)$$

称 M 为 f 在 A 上的条件优越集, 并称 $y^* = f(x^*)$, $x^* \in M$, 为 f 在 A 上的条件极大值。而当 A 是模糊集时, 引入 f 的模糊极大值定义。

定义 6 设 $f: U \rightarrow R$ 为论域 U 的一个有界实值函数, 引入 $M_f \in F(U)$, 且

$$M_f(x) = \frac{f(x) - \min_{y \in U} f(y)}{\max_{y \in U} f(y) - \min_{y \in U} f(y)}, \quad \forall x \in U \quad (6)$$

称 M_f 为 f 的无条件模糊优越集, 并称 $f(M_f) \in F(R)$ 为 f 的无条件模糊极大值。记为:

$$f(M_f)(y) = \sup_{f(x)=y} f(x), \quad \forall y \in R$$

性质 1 根据定义 2 可见:

$$\text{当 } f(x_1) = \max_{x \in A} f(x) \text{ 时, } M_f(x) = 1$$

$$\text{当 } f(x_2) = \min_{x \in A} f(x) \text{ 时, } M_f(x) = 0 \quad (7)$$

$$\text{当 } f(x_1) \geq f(x_2) \text{ 时, } M_f(x_1) \geq M_f(x_2)$$

可见, M_f 反映了在模糊意义下 x 的优越程度。

性质 2 根据定义 2 还可知:

$$\text{当 } y_1 = \max_{x \in A} f(x) \text{ 时, } f(M_f)(y_1) = \sup_{f(x)=y_1} M_f(x) = 1$$

$$\text{当 } y_2 = \min_{x \in A} f(x) \text{ 时, } f(M_f)(y_2) = \sup_{f(x)=y_2} M_f(x) = 0 \quad (8)$$

$$\text{当 } y \notin f(x) \text{ 时, } f(M_f)(y) = 0$$

因此, $f(M_f)(y)$ 反映了在模糊意义下 y 对 f 的模糊极大值的隶属程度。根据模糊理论的最大隶属度原则, 若能求得 x^* , 使 $F(x^*) = \sup_{x \in U} F(x)$, 那么, x^* 就是目标函数在模糊约束条件下的最优解, 而 $Z^{**} = Cx^*$ 就是目标函数的最优值。因此, 按照定义 4 中对 F 和 λ 的定义, 数学模型 1 的多目标线性规划模型可以转化成式(10)的数学模型 2。

数学模型 2

$$\begin{cases} \max(\lambda) \\ 1 - \frac{1}{d_i}(Z_i^* - \sum_{j=1}^m c_{ij}x_j) \geq \lambda, \quad (i=1, 2, \dots, r) \\ \sum_{j=1}^m c_{kj}x_j \leq b_k, \quad (k=1, 2, \dots, n) \\ \lambda \geq 0, x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (9)$$

数学模型 2 表明在最大隶属度下的最优解 x^* 和 Z^{**} :

$$\begin{cases} x^* = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \\ Z^{**} = Cx^* = (\sum_{j=1}^m c_{1j}x_j^*, \sum_{j=1}^m c_{2j}x_j^*, \dots, \sum_{j=1}^m c_{rj}x_j^*)^T \end{cases} \quad (10)$$

将是数学模型 1 的最优解和多目标函数的最优值。

3 基于多目标模糊线性规划法的飞机排班问题求解

为了解决飞机排班问题, 本文主要以飞机使用均衡和航班最快恢复为目标, 建立了以飞机飞行时间均衡优先、飞机起降次数均衡优先和飞机最少等待时间优先为目标函数, 满足基本约束条件的多目标多约束线性规划数学模型, 然后将数学模型中的多个目标函数通过隶属度函数使其模糊化, 将其转化为一个新的经典集的线性规划问题进行求解。

3.1 飞机排班问题的数学模型

根据飞机排班问题的目标和约束条件, 参照已有模型^[12], 充分考虑我国航空公司实际运作特点, 建立如下数学模型:

数学模型 3 飞机排班问题数学模型:

$$\min \begin{cases} Z_1 = \sum_{j \in R} (|T_j - Q/N|) x_j \\ Z_2 = \sum_{j \in R} (|P_j - V/N|) x_j \\ Z_3 = \sum_{j \in R} W_j x_j \end{cases} \quad (11)$$

$$s. t. \begin{cases} \sum_{j \in R} a_{i,j} x_j = 1, \forall i \in F \\ \sum_{j \in R} x_j \leq N \\ x_j \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (12)$$

式中, x_j 是决策变量, $x_j = \begin{cases} 1, & \text{如果可行航班环 } j \text{ 被选上} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$ 。

目标函数 $Z_1 = \sum_{j \in R} (|T_j - Q/N|) x_j$ 表示飞机使用均衡的目标, 采用每一个可行航班环的飞行时间与当天每架飞机平均飞行时间差的绝对值和表示均衡与否;

目标函数 $Z_2 = \sum_{j \in R} (|P_j - V/N|) x_j$ 表示飞机起降次数均衡的目标, 采用每一个可行航班环的飞机起降次数与当天每架飞机平均起降次数差的绝对值和表示均衡与否;

目标函数 $Z_3 = \sum_{j \in R} W_j x_j$ 表示每一个可行航班环的飞机等待时间求和。

约束条件: $\sum_{j \in R} a_{i,j} x_j = 1, \forall i \in F$ 表示航班覆盖的要求, 即每个航班只能有一架飞机执飞; $\sum_{j \in R} x_j \leq N$ 表示机队规模要求, 即所需的飞机数不能大于公司所拥有这种机型总的架数; $x_j \in \{0, 1\}$ 是决策变量的 0-1 整数性要求。所涉及的符号及含义表示如下:

(1) 集合: F = 航班集合

R = 可行航班环集合

M = 维护基地集合

(2) 下标变量: j = 可行航班环下标变量

i = 航班下标变量

(3) 参数: $a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{如果航班 } i \text{ 在可行航班环 } j \text{ 中} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$

N = 机队飞机总数

V = 航班集中航班数

W_j = 可行航班环 j 的航节间等待时间

T_j = 可行航班环 j 的飞行时间

P_j = 可行航班环 j 的航班数

Q = 当天所有航班总飞行时间

3.2 求解步骤

求解数学模型 3 的方法是将线性规划中多个目标函数通过确定隶属函数使其模糊化, 再根据最大隶属度原则求出目标函数在模糊约束条件下的最优解, 将新问题的最优解变成原问题的模糊最优解。具体步骤如下。

步骤 1 将数学模型 3 中所有求最小的目标 $\min Z_i, (i=1, 2, 3)$ 进行 $\max(-Z_i), (i=1, 2, 3)$ 的变换, 使目标转化为如数学模型 1 所示的求最大的形式, 即:

$$\max \begin{cases} Z_1 = - \sum_{j \in R} (|T_j - Q/N|) x_j \\ Z_2 = - \sum_{j \in R} (|P_j - V/N|) x_j \\ Z_3 = - \sum_{j \in R} W_j x_j \end{cases} \quad (13)$$

步骤 2 按照式(2)求在式(12)中约束条件下的最优值 $Z_i^* (i=1, 2, 3)$ 。

步骤 3 对每个最优值 $Z_i^* (i=1, 2, 3)$, 给出一个反映各

目标重要性程度的伸缩性指标 $d_i (i=1, 2, 3) (d_i > 0)$, 其中 $d_i (i=1, 2, 3)$ 越小, 表示目标函数 $Z_i (i=1, 2, 3)$ 越重要。相应地得到一个模糊目标集 F_i , 按式(3)选取其隶属度函数, 得到式(14):

$$\begin{aligned} F_1(x) &= g_1(- \sum_{j \in R} (|T_j - Q/N|) x_j) \\ &= \begin{cases} 0, & - \sum_{j \in R} (|T_j - Q/N|) x_j < Z_1^* - d_1 \\ 1 - \frac{1}{d_1} (Z_1 + \sum_{j \in R} (|T_j - Q/N|) x_j), & Z_1^* - d_1 \leq - \sum_{j \in R} (|T_j - Q/N|) x_j < Z_1^* \\ 1, & - \sum_{j \in R} (|T_j - Q/N|) x_j \geq Z_1^* \end{cases} \\ F_2(x) &= g_2(- \sum_{j \in R} (|P_j - V/N|) x_j) \\ &= \begin{cases} 0, & - \sum_{j \in R} (|P_j - V/N|) x_j < Z_2^* - d_2 \\ 1 - \frac{1}{d_2} (Z_2 + \sum_{j \in R} (|P_j - V/N|) x_j), & Z_2^* - d_2 \leq - \sum_{j \in R} (|P_j - V/N|) x_j < Z_2^* \\ 1, & - \sum_{j \in R} (|P_j - V/N|) x_j \geq Z_2^* \end{cases} \\ F_3(x) &= g_3(- \sum_{j \in R} W_j x_j) \\ &= \begin{cases} 0, & - \sum_{j \in R} W_j x_j < Z_3^* - d_3 \\ 1 - \frac{1}{d_3} (Z_3 + \sum_{j \in R} W_j x_j), & Z_3^* - d_3 \leq - \sum_{j \in R} W_j x_j < Z_3^* \\ 1, & - \sum_{j \in R} W_j x_j \geq Z_3^* \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

步骤 4 按式(4)设置对应于多目标函数式(13)的模糊化后的模糊目标集 F 和隶属度 λ 。

步骤 5 将多目标函数式(13)和约束条件式(12)按照式(9)转化为新的数学模型 4:

数学模型 4

$$\begin{cases} \max(\lambda) \\ 1 - \frac{1}{d_1} (Z_1^* + \sum_{j \in R} (|T_j - Q/N|) x_j) \geq \lambda \\ 1 - \frac{1}{d_2} (Z_2^* + \sum_{j \in R} (|P_j - V/N|) x_j) \geq \lambda \\ 1 - \frac{1}{d_3} (Z_3^* + \sum_{j \in R} W_j x_j) \geq \lambda \\ \sum_{j \in R} a_{i,j} x_j = 1, (i=1, 2, \dots, 68) \\ \sum_{j \in R} x_j \leq N \\ x_j \in \{0, 1\} \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

步骤 6 求得数学模型 4 的最优解为 $\lambda^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$ 。 $x^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\}$ 是飞机排班问题的最优解。

步骤 7 按式(10)计算 Z^{**} , 令 $Z^{**} = -Z^*$, 则 Z^{**} 就是多目标多约束飞机排班问题的最优值。

4 实验与分析

4.1 参数设定

本实验的数据来源于一个真实的实例。东方航空公司每周由 12 架 A320 机型执飞的国内航班计划有 68 个, 分别以无锡、南京和浦东机场作为维护基地集合。参数: $M=3$, $N=12$, $V=68$, 构成了航班集合 $F = \{f_1, \dots, f_i, \dots, f_{68}\}$ 。
 $Q = \sum_{i=1}^{68} (f_i \text{ 的飞行时间列}), Q/N = 599.1667, V/N = 5.667$ 。

由于篇幅所限,航班集合 F 的一部分在图 1 中显示。其中,出发时间和到达时间是从当天零点零分算起。

航班号	机型	起飞时间	到达时间	飞行时间
CA101	波音 737	08:00	09:00	60
CA102	波音 737	08:15	09:15	60
CA103	波音 737	08:30	09:30	60
CA104	波音 737	08:45	09:45	60
CA105	波音 737	09:00	10:00	60
CA106	波音 737	09:15	10:15	60
CA107	波音 737	09:30	10:30	60
CA108	波音 737	09:45	10:45	60
CA109	波音 737	10:00	11:00	60
CA110	波音 737	10:15	11:15	60
CA111	波音 737	10:30	11:30	60
CA112	波音 737	10:45	11:45	60
CA113	波音 737	11:00	12:00	60
CA114	波音 737	11:15	12:15	60
CA115	波音 737	11:30	12:30	60
CA116	波音 737	11:45	12:45	60
CA117	波音 737	12:00	13:00	60
CA118	波音 737	12:15	13:15	60
CA119	波音 737	12:30	13:30	60
CA120	波音 737	12:45	13:45	60
CA121	波音 737	13:00	14:00	60
CA122	波音 737	13:15	14:15	60
CA123	波音 737	13:30	14:30	60
CA124	波音 737	13:45	14:45	60
CA125	波音 737	14:00	15:00	60
CA126	波音 737	14:15	15:15	60
CA127	波音 737	14:30	15:30	60
CA128	波音 737	14:45	15:45	60
CA129	波音 737	15:00	16:00	60
CA130	波音 737	15:15	16:15	60
CA131	波音 737	15:30	16:30	60
CA132	波音 737	15:45	16:45	60
CA133	波音 737	16:00	17:00	60
CA134	波音 737	16:15	17:15	60
CA135	波音 737	16:30	17:30	60
CA136	波音 737	16:45	17:45	60
CA137	波音 737	17:00	18:00	60
CA138	波音 737	17:15	18:15	60
CA139	波音 737	17:30	18:30	60
CA140	波音 737	17:45	18:45	60
CA141	波音 737	18:00	19:00	60
CA142	波音 737	18:15	19:15	60
CA143	波音 737	18:30	19:30	60
CA144	波音 737	18:45	19:45	60
CA145	波音 737	19:00	20:00	60
CA146	波音 737	19:15	20:15	60
CA147	波音 737	19:30	20:30	60
CA148	波音 737	19:45	20:45	60
CA149	波音 737	20:00	21:00	60
CA150	波音 737	20:15	21:15	60
CA151	波音 737	20:30	21:30	60
CA152	波音 737	20:45	21:45	60
CA153	波音 737	21:00	22:00	60
CA154	波音 737	21:15	22:15	60
CA155	波音 737	21:30	22:30	60
CA156	波音 737	21:45	22:45	60
CA157	波音 737	22:00	23:00	60
CA158	波音 737	22:15	23:15	60
CA159	波音 737	22:30	23:30	60
CA160	波音 737	22:45	23:45	60
CA161	波音 737	23:00	00:00	60
CA162	波音 737	23:15	00:15	60
CA163	波音 737	23:30	00:30	60
CA164	波音 737	23:45	00:45	60
CA165	波音 737	00:00	01:00	60
CA166	波音 737	00:15	01:15	60
CA167	波音 737	00:30	01:30	60
CA168	波音 737	00:45	01:45	60
CA169	波音 737	01:00	02:00	60
CA170	波音 737	01:15	02:15	60
CA171	波音 737	01:30	02:30	60
CA172	波音 737	01:45	02:45	60
CA173	波音 737	02:00	03:00	60
CA174	波音 737	02:15	03:15	60
CA175	波音 737	02:30	03:30	60
CA176	波音 737	02:45	03:45	60
CA177	波音 737	03:00	04:00	60
CA178	波音 737	03:15	04:15	60
CA179	波音 737	03:30	04:30	60
CA180	波音 737	03:45	04:45	60
CA181	波音 737	04:00	05:00	60
CA182	波音 737	04:15	05:15	60
CA183	波音 737	04:30	05:30	60
CA184	波音 737	04:45	05:45	60
CA185	波音 737	05:00	06:00	60
CA186	波音 737	05:15	06:15	60
CA187	波音 737	05:30	06:30	60
CA188	波音 737	05:45	06:45	60
CA189	波音 737	06:00	07:00	60
CA190	波音 737	06:15	07:15	60
CA191	波音 737	06:30	07:30	60
CA192	波音 737	06:45	07:45	60
CA193	波音 737	07:00	08:00	60
CA194	波音 737	07:15	08:15	60
CA195	波音 737	07:30	08:30	60
CA196	波音 737	07:45	08:45	60
CA197	波音 737	08:00	09:00	60
CA198	波音 737	08:15	09:15	60
CA199	波音 737	08:30	09:30	60
CA200	波音 737	08:45	09:45	60

图 1 部分航班时刻表

根据航空总局规定,在每架飞机每天总飞行时间少于或等于 14 小时、过站时间大于等于 40 分钟的条件下搜索到 233 个可行航班环,构成了可行航班环集合 $R = \{r_1, \dots, r_j, \dots, r_{233}\}$,同时得到每个可行航班环 j 的航节间等待时间 W_j 、飞行时间 T_j 、包含的航节数 P_j 。可行航班环的一部分在图 2 中显示。其中,每一个航班环用航班时刻表中的航班序号组成。部分可行航班环的航节间等待时间(W_j)、飞行时间(T_j)、包含的航节数(P_j)如图 3 所示。

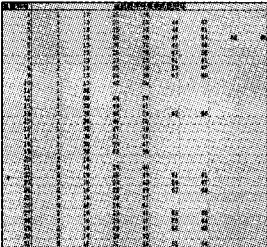


图 2 部分航班环

环序号	W_j	T_j	P_j
1	95	245	4
2	65	570	6
3	140	580	8
4	65	665	8
5	295	515	6
6	90	535	6
7	145	575	6
8	300	560	6
9	230	540	6
10	265	325	4
11	340	130	2
12	360	355	4

图 3 部分航班环的 W_j 、 T_j 、 P_j 值

4.2 实验结果

本实验的软硬件配置为:2.60GHz cpu,1.99GB 内存,500G 硬盘,应用软件为 matlab 7.0。求得分别以飞机飞行时间均衡优先、飞机起降次数均衡优先、飞机最少等待时间优先为单目标函数的函数 Z_i 在约束条件下的最优值 Z_i^* 为:

$Z^* = (Z_1^*, Z_2^*, Z_3^*) = (-481.6667, -10, -810)^T$

图 4 中显示的是单目标函数下的优化结果。图 4(a)是以飞机飞行时间均衡优先的最优分配方案;图 4(b)是以飞机起降次数均衡优先的最优分配方案;图 4(c)是以飞机最少等待时间优先的最优分配方案。

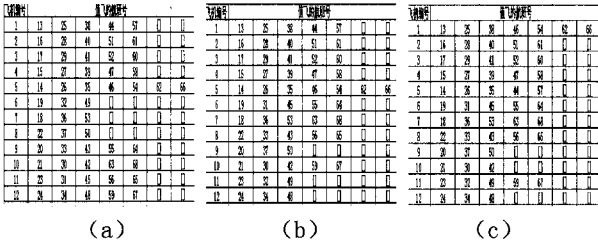


图 4 单目标函数下的飞机排班结果

根据各目标重要程度不同,设定伸缩性指标为: $d_1 = 500$, $d_2 = 5$, $d_3 = 600$ 。按照式(14)的隶属度函数,求解式(15)的线性规划问题,得到最优解为 $\lambda^* = 0.9775$,从而得满足原目标的最大隶属度为 $\lambda^* = 0.9775$,对应的多目标函数的最优值 Z^{**} 为:

$Z^{**} = (Z_1^{**}, Z_2^{**}, Z_3^{**}) = (-481.6667, -10, -945)^T$

即: $Z_1^{**} = 481.6667$, $Z_2^{**} = 10$, $Z_3^{**} = 945$ 。这个结果表明,飞机排班问题的最优分配方案能同时满足目标函数 1 和目标函数 2,而对目标 3 的隶属度为 0.9775。图 5 显示了飞机排班问题的最优结果。这样的分配结果与航空公司实际飞机分配结果相符。由此证明该算法是可行的,并具有实用价值。

飞机编号	值	飞机编号	值
1	13	25	38
2	15	28	40
3	17	29	41
4	15	27	39
5	14	26	35
6	13	32	49
7	13	36	53
8	22	37	50
9	20	33	43
10	21	30	42
11	23	31	45
12	24	34	48

图 5 飞机排班问题的最优化分配结果

实验也对比了在不同伸缩性指标 d_i 下的 λ^* 值以及多目标函数的最优值 Z^{**} (见图 6)。方案 6 和方案 8 表明,在满足多约束的条件下,要想让目标 1 和目标 3 同时满足是不可能的。方案 1 和方案 5 表明,若把目标 3 设置成最重要而需要优先满足的话,对其他两个目标满足的隶属度就只在 0.2 以下。

	d_1	d_2	d_3	λ	Z_1^{***}	Z_2^{***}	Z_3^{***}
方案1	500	8	6	0.12	921.6667	10	810
方案2	500	6	600	0.9775	481.6667	10	945
方案3	3	550	500	0.9775	481.6667	10	945
方案4	500	600	550	0.92	521.6667	10	945
方案5	500	600	3	0.1	931.6667	10	810
方案6	8	5	7	无解	无解	无解	无解
方案7	5	6	600	0.9775	481.6667	10	945
方案8	3	600	6	无解	无解	无解	无解

图 6 不同 d_i 下的 λ^* 、 Z^{**} 值

结束语 本文解决了飞机排班过程中的多目标优化问题,通过建立以飞机飞行时间均衡、飞机起降次数均衡、飞机等待时间最少为目标函数,以航班覆盖、机队规模为约束的多目标多约束数学模型,将模糊理论应用到求解多目标线性规划问题中,利用最大隶属度原则将飞机排班问题转化为一般的线性规划问题进行求解,得到了最优的排班结果。

在实验中,我们也发现了一些问题,如有解的情况下, Z_2^{**} 一直为最优值,这主要是因为航班计划表中,各个航节的飞行时间相差不多,这就导致了目标 Z_1 或目标 Z_3 的实现保证了目标 Z_2 的实现。例如当飞行时间较为均衡时,每架飞机所执飞的航节数不可能相差很多,从而使得飞机起降次数也相差不多。而若航班计划表中有国际航班的话,就不会出现这种情况。如何找到更优的解决飞机排班问题的算法将是我们进一步努力的方向。

参考文献

[1] Zadeh L A. Fuzzy Sets[J]. Information and Control, 1965(8): 338-353

[2] Zimmermann H J. Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978(1):45-55

[3] Ishibuchi H, Tanaka H. Multi-objective programming in optimization of the interval objective function[J]. European Journal of Operational Research, 1990,48:219-225

[4] Geoffrion A M, Hogan W W. Coordination of Two-level-Organizations with Multiple Objective [M]. New York: Academic, 1973

- [5] 陈煜生. 应用模糊集方法[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1986
- [6] 胡毓达. 实用多目标最优化[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990
- [7] 曹炳元. 应用模糊数学与系统[M]. 北京: 科学出版社, 2005
- [8] 徐裕生, 王佳佳, 杜英阁. 目标带有模糊系数的线性规划的一种新解法[J]. 重庆理工大学学报: 自然科学, 2010, 24(8): 97-99
- [9] Bazargan M. Airline operations and scheduling[M]. USA: Ash-

gate Publishing Limited, 2006

- [10] 孙宏. 航空公司飞机排班问题: 模型及算法研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2003
- [11] 王伟, 王锦彪. 中国民航飞机排班问题的多部图模型[J]. 交通与计算机, 2008(4): 35-41
- [12] Wu Dong-hua, Xia Hong-shan. Fleet Assignment Problem Study Based on Branch-and-bound Algorithm[C]//IFCSTA 2010 Proceedings. 2010: 128-132

(上接第 209 页)

$$(1L)L(U)=U;$$

$$(3L)L(X \cap Y)=L(X) \cap L(Y);$$

$$(7L'')L(-L(-X)) \subseteq L(X).$$

例 1 设 $U=\{a,b\}$, $L: 2^U \rightarrow 2^U$ 是有限论域 U 上的一元算子, $L(U)=\{a\}$, $L(\{a\})=\{a\}$, $L(\{b\})=\emptyset$, $L(\emptyset)=\emptyset$. 容易验证, $\forall X, Y \subseteq U$, $L(X \cap Y)=L(X) \cap L(Y)$, $L(-L(-X))=L(X)$, 即 $(3L)(7L')(7L'')$ 成立. 但 $U \not\subseteq L(U)=\{a\}$, 即 $(1L)$ 不成立. 因此 $(3L)(7L')(7L'') \not\Rightarrow (1L)$.

例 2 设 $U=\{a,b\}$, $L: 2^U \rightarrow 2^U$ 是有限论域 U 上的一元算子, $L(U)=U$, $L(\{a\})=\{b\}$, $L(\{b\})=\{a\}$, $L(\emptyset)=\emptyset$. 容易验证, $\forall X, Y \subseteq U$, $L(X \cap Y)=L(X) \cap L(Y)$, 即 $(3L)$ 成立, 且 $(1L)$ 显然成立. 但 $L(-L(-\{a\}))=L(-L(\{b\}))=L(-\{a\})=L(\{b\})=\{a\}$, 而 $L(\{a\})=\{b\}$, 从而 $L(-L(-\{a\})) \not\subseteq L(\{a\})$ 且 $L(\{a\}) \not\subseteq L(-L(-\{a\}))$, 即 $(7L')$ 或 $(7L'')$ 都不成立. 因此 $(1L)(3L) \not\Rightarrow (7L')$ 且 $(1L)(3L) \not\Rightarrow (7L'')$.

例 3 设 $U=\{a,b\}$, $L: 2^U \rightarrow 2^U$ 是有限论域 U 上的一元算子, $L(U)=U$, $L(\{a\})=\{a\}$, $L(\{b\})=\{a\}$, $L(\emptyset)=\emptyset$. 容易验证, $\forall X, Y \subseteq U$, $L(-L(-X))=L(X)$, $L(X \cap Y) \subseteq L(X) \cap L(Y)$, 即 $(7L')$, $(7L'')$ 和 $(3L')$ 都成立, 且 $(1L)$ 显然成立. 但 $L(\{a\} \cap \{b\})=L(\emptyset)=\emptyset \not\subseteq L(\{a\}) \cap L(\{b\})=\{a\}$, 即 $(3L'')$ 都不成立. 因此 $(1L)(3L')(7L')(7L'') \not\Rightarrow (3L'')$.

例 4 设 $U=\{a,b\}$, $L: 2^U \rightarrow 2^U$ 是有限论域 U 上的一元算子, $L(U)=U$, $L(\{a\})=\{a\}$, $L(\{b\})=\{b\}$, $L(\emptyset)=U$. 容易验证, $\forall X, Y \subseteq U$, $L(-L(-X))=L(X)$, $L(X \cap Y) \supseteq L(X) \cap L(Y)$, 即 $(7L')$, $(7L'')$ 和 $(3L'')$ 都成立, 且 $(1L)$ 显然成立. 但 $L(\{a\} \cap \{b\})=L(\emptyset)=U \not\subseteq L(\{a\}) \cap L(\{b\})=\emptyset$, 即 $(3L')$ 都不成立. 因此 $(1L)(3L'')(7L')(7L'') \not\Rightarrow (3L')$.

一方面, 串行关系和反向类传递关系蕴含间接关系; 另一方面, 串行关系下粗糙近似算子的特征公理 $L(\emptyset)=\emptyset$ 和反向类传递关系下粗糙近似算子的特征公理 $L(H(X)) \subseteq L(X)$, 在公理 $(1L)$, $(3L)$, (LH) 满足的条件下, 必然蕴含间接关系下的粗糙近似算子的特征公理 $L(L(X)) \subseteq L(X)$. 因为由 $(3L)$ 知上、下近似算子均满足单调性, 并且 $L(X) \subseteq H(X)$ 也为串行关系的特征公理, 故有 $L(L(X)) \subseteq L(H(X))$, 从而根据 $L(H(X)) \subseteq L(X)$, 即有 $L(L(X)) \subseteq L(X)$.

结束语 本文提出了正向与反向类传递二元关系, 研究了其下的广义粗糙集及其相关性质, 给出了它们的公理化特征, 也讨论了这两类广义粗糙集与其它相关二元关系下的广义粗糙集之间的联系. 正向与反向类传递粗糙近似算子的特征公理在特定的背景中具有一定的应用价值. 这两个特征公理结合起来即为 $L(X)=LH(X)$ 或 $H(X)=HL(X)$. 在此类特化的广义粗糙集中, 任何集合与其上近似集的下近似相

等; 同时, 任何集合与其下近似集的上近似相等. 换言之, 任何集合都与其上近似集或下近似集具有一定意义上相同的近似能力. 粗糙近似算子的这些性质用论域内部元素之间的特征来刻画, 就是同时满足正向与反向传递关系. 这些相互表达或刻画将为进一步研究经典粗糙集或基于粗糙集的特定知识发现提供一定的帮助.

参考文献

- [1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 5: 341-356
- [2] Pawlak Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishing, 1991
- [3] Leung Y, Wu W Z, Zhang W X. Knowledge acquisition in incomplete information systems: A rough set approach[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 168: 164-180
- [4] Pawlak Z, Skowron A. Rudiments of rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177: 3-27
- [5] Wu W Z. Attribute reduction based on evidence theory in incomplete decision systems [J]. Information Sciences, 2008, 178: 1355-1371
- [6] Wu W Z, Zhang M, Li H Z, et al. Knowledge reduction in random information systems via [J]. Information Sciences, 2005, 174: 143-164
- [7] Skowron A, Stepaniuk J. Tolerance Approximation Spaces[J]. Fundamenta Informaticae, 1996, 27: 245-253
- [8] Skowron A, Vanderpooten D. A Generalized Definition of Rough Approximations Based on Similarity[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2000, 12: 331-336
- [9] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191-209
- [10] 张文修, 吴伟志. 基于随机集的粗糙集模型(I) [J]. 西安交通大学学报, 2001, 34(12): 75-79
- [11] 张文修, 吴伟志. 基于随机集的粗糙集模型(II) [J]. 西安交通大学学报, 2002, 35(4): 425-429
- [12] 李进金. 粗糙集与拓扑空间的子集[J]. 系统工程与理论实践, 2005, 7: 136-140
- [13] 李进金. 覆盖广义粗糙集中的拓扑学方法[J]. 模式识别与人工智能, 2004, 17(1): 7-10
- [14] Yao Y Y. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets[J]. Information Sciences, 1998, 109: 21-47
- [15] Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15: 291-317
- [16] Zhu W. Generalized rough sets based on relation[J]. Information Sciences, 2007, 177: 4997-5011