类传递关系下的广义粗糙集及其公理化

马周明 李进金

（漳州师范学院数学与信息科学系 漳州363000） （漳州师范学院粒计算重点实验室 漳州363000）

摘 要 提出了正向类传递与反向类传递二元关系，分别考虑了基于这两种二元关系的广义粗糙集，探讨了它们各自的性质，给出了相应粗糙近似算子的公理化特征。分析了这两类广义粗糙集与其它相关二元关系下广义粗糙集之间的联系，得到了一些重要的结果。

关键词 粗糙集，等价关系，类传递关系，公理特征

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Similar Transitive Binary Relation-based Generalized Rough Sets and their Axiomation

MA Zhou-ming LI Jin-jin

(Department of Mathematics and Information Science, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, China)

(Lab of Granular Computing, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract This paper presented the defintions of positive similar transitive and negative similar transitive binary relation, considered the generalized rough sets based on these two kinds of binary relations, analyzed their properties, respectively, also gave the corresponding axiomatic characterizations. Finally, we investigated the correlations between these two kinds relations and other relations-based generalized rough sets. Some important conclusions were achieved.

Keywords Rough set, Equivalence relation, Similar transitive relation, Axiomatic characterizations

1 引言

波兰逻辑学家Pawlak教授在从事关于信息系统逻辑特性研究的基础上创立的粗糙集理论[1,2]，是一种继概率论、模糊集理论、证据理论之后的又一种处理不确定性的数学工具。尤其是20世纪90年代以来，该理论在机器学习、知识获取、决策分析及过程控制等许多领域[3-6]得到了广泛的应用。

上、下近似算子是粗糙集理论中最重要的概念之一，它们是等价关系条件下论域上的一元运算。将等价关系推广为一般的二元关系，即得到相应的广义粗糙集，比如相容关系[7]、相似关系[8]下的广义粗糙集。由于论域上划分与等价关系之间具有一一对应的关系，因此覆盖广义粗糙集也成为推广经典粗糙集的一个很重要的分支。

很多学者将粗糙集理论与模糊集或证据理论等不确定性理论[9-11]综合研究，或利用拓扑学的方法研究粗糙集理论的基本结构、性质[12,13]。这些方面都已取得了很好的研究成果。

等价关系是满足自反、对称、传递的二元关系，因而分别研究这3种二元关系下的广义粗糙集[14]，即为对经典粗糙集最基本的推广。在此基础上，也有学者提出了一些新的二元关系下的广义粗糙集[15,16]。一方面，拓广了经典粗糙集理论应用的范围；另一方面进一步阐释了经典粗糙集理论的相关性质。

本文在考虑经典粗糙集一些基本性质的基础上，提出了正向与反向类传递二元关系，分别考虑了基于这两种二元关系下的广义粗糙近似算子的相关性质，给出了它们相应的公理化特征。分析了这两类广义粗糙集与自反、串行等相关二元关系下的广义粗糙集之间的联系。此外，将正向与反向类传递关系下的粗糙近似算子相结合，即能刻画粗糙集中一类特殊的集合(特化的知识)。进一步分析这些广义粗糙集的性质，给出论域上的元素之间的特征(二元关系)和论域上算子的性质(公理)之间的一类特殊的联系，并得出了一些重要的结论。

本文第2节介绍经典粗糙集的基本概念、性质，分别给出了自反、对称、传递二元关系下的广义粗糙集及其公理化特征；第3节引入正向类传递二元关系，构造其下的广义粗糙集，讨论了相关的性质及其公理化特征；第4节引入反向类传递二元关系，构造其下的广义粗糙集，讨论相关的性质及其公理化特征；第5节结合两种类传递二元关系，得到新的二元关系：强对称二元关系，并探讨其下的广义粗糙集以及相应的性质。

2 基本概念

先给出一般二元关系下粗糙近似算子的定义。

定义1[14] 论域U为有限集合，R是U上的二元关系，$RN(x)=\{y\in U|xRy\in R\}$称为$x$的后继邻域，$R$上的下近似

到稿日期：2011-02-20 返修日期：2011-04-25 本文受国家自然科学基金项目(10671173，10971186)资助。

马周明(1979－)，男，讲师，主要研究方向为粗糙集理论及其应用，E-mail：mazhouming@sina.com；李进金(1960－)，男，教授，博士生导师，主要研究方向为拓扑学及其应用、粗糙集理论与人工智能。

和上近似算子定义如下：

$\underline{R}(X)=\{x|RN(x)\subseteq X\}$

$\overline{R}(X)=\{x|RN(x)\cap X\neq\emptyset\}$

显然它们满足(LH)$\underline{R}(-X)=-\overline{R}(X)$，即对偶性(按此定义的粗糙近似算子均满足对偶性)。

如果二元关系 R 是 U 上的等价关系，上述定义即为经典的上、下近似算子。此时，它们具有如下基本性质：

(1L) $\underline{R}(U)=U$；

(2L) $\underline{R}(\emptyset)=\emptyset$；

(3L) $\underline{R}(X\cap Y)=\underline{R}(X)\cap\underline{R}(Y)$；

(3L*) $\underline{R}(X\cup Y)\supseteq\underline{R}(X)\cup\underline{R}(Y)$；

(4L) $\underline{R}(X)\subseteq X$；

(5L) $-X\subseteq\underline{R}(-\underline{R}(X))$；

(6L) $\underline{R}(\underline{R}(X))=\underline{R}(X)$；

(LH) $\underline{R}(-X)=-\overline{R}(X)$。

上、下近似算子之间满足(LH)对偶性，下近似算子的上述性质对应的上近似算子也有类似的性质(1H)(2H)(3H)(3H*)(3H)(5H)(6H)，这里不再一一列出，下同。

定义了基于二元关系的广义粗糙集，下面给出其相应的公理化。

定理 1[14] 论域 U 为有限集合，L,H 分别是 $2^U\to2^U$ 上的一元运算，它们满足(LH)，则

L 满足(1L)，(3L)$\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的二元关系 R，使得 $L=\underline{R}$；

H 满足(1H)，(3H)$\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的二元关系 R，使得 $H=\overline{R}$。

说明：为了叙述方便，这里把(1L)$\underline{R}(U)=U$ 与(1L)$L(U)=U$ 当作是没有差别的，其余类似。

定理 2[14,15] 论域 U 为有限集合，L,H 分别是 $2^U\to2^U$ 上的一元运算，它们满足(LH)，且算子 L 总满足(1L)，(3L)，算子 H 总满足(1H)，(3H)，则

(1)L 满足(3L)$\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的自反关系 R，使得 $L=\underline{R}$；

H 满足(3H)$\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的自反关系 R，使得 $H=\overline{R}$。

(2)L 满足(5L)$\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的对称关系 R，使得 $L=\underline{R}$；

H 满足(5H)$\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的对称关系 R，使得 $H=\overline{R}$。

(3)L 满足(6L″)$\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的传递关系 R，使得 $L=\underline{R}$；

H 满足(6H″)$\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的传递关系 R，使得 $H=\overline{R}$。

其中(6L″)$\underline{R}(\underline{R}(X))\supseteq\underline{R}(X)$；(6H″)$\overline{R}(\overline{R}(X))\subseteq\overline{R}(X)$。

上述公理化特征不仅用比较简洁的公理组刻画了相应二元关系下的粗糙近似算子，而且把论域内部元素间的特征(二元关系)和论域上算子的性质(公理)进行了相互表达或阐述。

3 基于正向类传递关系的广义粗糙集

将传递二元关系的条件适当降低，考虑相应的非等价二元关系：正向类传递二元关系。然后，构造其下的广义粗糙集，深入探讨其理论基础，寻找其公理化特征。并考虑这种特化的粗糙集模型与经典粗糙集之间的区别与联系，以及一般二元关系下的广义粗糙集中特定知识之间的联系。这必将为寻找粗糙集中的特定知识提供一定的帮助，对进一步研究经典粗糙集的一些性质和基于粗糙集理论的知识获取具有一定的现实意义。

先给出如下正向类传递二元关系的定义。

定义 2 论域 U 为有限集合，$R\subseteq U\times U$，$\forall(x,y)\in R$，存在$(y,z)\in R$，使得$(x,z)\in R$；否则，$RN(y)=\emptyset$，则 $RN(x)=U$，则称 R 是论域 U 上的正向类传递二元关系，简称 R 正向类传递。

现定义正向类传递关系下的广义粗糙集。令 R 为有限论域 U 上的正向类传递二元关系，将

$L(R)(X)=\{x|RN(x)\subseteq X\}$

$H(R)(X)=\{x|RN(x)\cap X\neq\emptyset\}$

分别称为正向类传递关系 R 下的广义下近似算子和广义上近似算子。不致混淆时可删去标号 R。

命题 1 设 R 为有限论域 U 上的正向类传递二元关系，L,H 分别为 R 下的广义下近似算子和广义上近似算子。$\forall X\subseteq U$，有下面的性质：

(1L) $L(U)=U$；

(3L) $L(X\cap Y)=L(X)\cap L(Y)$；

(3L*) $L(X)\cup L(Y)\subseteq L(X\cup Y)$；

(7L′) $L(X)\subseteq LH(X)$；

(LH) $L(-X)=-H(X)$。

证明：(7L′)下面定理 3 证明，其余性质为粗糙近似算子的基本性质，因而是显然的。

现考虑基于正向类传递关系下的广义粗糙集的公理化特征。

定理 3 论域 U 为有限集合，L,H 分别是 $2^U\to2^U$ 上的一元运算，它们满足(LH)。且算子 L 总满足(1L)，(3L)，算子 H 总满足(1H)，(3H)，则

L 满足(7L′)$L(X)\subseteq L(H(X))\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的正向类传递关系 R，使得 $L=\underline{R}$；

H 满足(7H′)$H(L(X))\subseteq H(X)\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的正向类传递关系 R，使得 $H=\overline{R}$。

证明：由于 L,H 满足(LH)对偶性，故只需证明上、下近似算子其中之一相应结论成立即可。

($\Rightarrow$)由已知条件和定理 1，$\exists U$ 上唯一的二元关系 R，使得 $H=\overline{R}$。下面只需证明，若 H 满足(7H′)$H(L(X))\subseteq H(X)$，则 R 满足正向类传递。根据 $H(L(X))\subseteq H(X)$，若 $x\in H(L(X))$，必有 $x\in H(X)$，即若 $RN(x)\cap L(X)\neq\emptyset$，必有 $RN(x)\cap X\neq\emptyset$。换言之，如存在 $y\in U$，xRy 且 $RN(y)\subseteq X$，则必存在 $h\in RN(x)$ 且 $h\in X$。下面分两种情况证明 R 满足正向类传递。

(1) 若 $RN(y)=\emptyset$，由 X 为任意，取 X 为论域 U 中的任意单点集$\{z\}$。即$\forall z\in U$，若 xRy，$RN(y)=\emptyset\subseteq X=\{z\}$，则必存在 $h\in RN(x)$ 且 $h\in\{z\}$，从而$\{z\}=\{h\}$。又 z 为任意，从而即有：如果 xRy，且 $RN(y)=\emptyset$，则 $RN(x)=U$。

(2) 若 $RN(y)\neq\emptyset$，由 xRy，$\emptyset\neq RN(y)\subseteq X$，必有 $h\in RN(x)$ 且 $h\in X$。由 X 为任意，取 $X=RN(y)$，则上述结论即为：如果 xRy 且 $RN(y)\neq\emptyset$，则必存在 $h\in RN(x)\cap RN(y)$。即如果 xRy 且 $RN(y)\neq\emptyset$，则必存在 $z\in U$ 同时满足 yRz 和 xRz。

综合(1)，(2)，R 是论域 U 上的正向类传递关系。

($\Leftarrow$)若 R 满足正向类传递关系，下面证明其相应的上、下近似算子具有性质(7L′)$L(X)\subseteq L(H(X))$和(7H′)$H(L(X))\subseteq H(X)$。鉴于对偶性，这里证明(7H′)。

$\forall x\in H(L(X))$，有 $RN(x)\cap L(X)\neq\emptyset$，即存在 $y\in RN(x)$ 且 $RN(y)\subseteq X$。一方面，若 $RN(y)=\emptyset$，因 R 满足正向类传递，则 $\forall z\in X\subseteq U$，有 xRz，即 $z\in RN(x)\cap X\neq\emptyset$，故 $x\in H(X)$；另一方面，若 $RN(y)\neq\emptyset$，由 R 满足正向类传递，存在 $z\in RN(y)\subseteq X$ 且 $z\in RN(x)$。因此，$z\in RN(x)\cap X\neq\emptyset$，即 $x\in H(X)$。综上，$\forall x\in H(L(X))$，总有 $x\in H(X)$，从而有 $H(L(X))\subseteq H(X)$。

由定理 3 易知，基于正向类传递关系的广义粗糙集的公理组为(1L)(3L)(7L′)，公理间相互独立性见下述例 1、例 2、例 3 和例 4。

定理 4 设 R 为有限论域 U 上的正向类传递二元关系，L 为 R 下的广义下近似算子，则下面公理组为正向类传递关系下广义粗糙集的一组公理组。

(1L) $L(U)=U$；

(3L) $L(X\cap Y)=L(X)\cap L(Y)$；

(7L′) $L(X)\subseteq L(-L(-X))$。

这里(3L)包含两条公理(3L′)和(3L″)，下面类似。

首先，自反关系必定是正向类传递关系，因此自反关系的特征公理(4L) $L(X)\subseteq X$ 必然在(1L)，(3L) 满足的条件下，蕴含正向类传递关系下近似算子的特征公理(7L′) $L(X)\subseteq L(-L(-X))$。由(4L)知，上下近似算子均满足单调性和自反关系的特征公理(4H) $X\subseteq H(X)$，因此 $L(X)\subseteq L(-L(-X))$ 成立。其次，串行和传递关系必定是正向类传递关系，因此串行和传递关系的特征公理组 $L(X)\subseteq H(X)$[16] 和(6L″) $L(X)\subseteq L(L(X))$ 在(1L)、(3L) 满足的条件下，蕴含正向类传递关系下近似算子的特征公理(7L′) $L(X)\subseteq L(-L(-X))$。由 $L(X)\subseteq H(X)$、(6L″) 和单调性，即有 $L(X)\subseteq L(L(X))\subseteq L(H(X))$，从而(7L′)成立。

4 基于反向类传递关系的广义粗糙集

与传递关系下的广义粗糙集的特征公理(5L′) $L(X)\subseteq L(L(X))$ 相对应，有间接关系(即 $\forall xRy$，必有 $z\in U$，使得 xRz 且 zRy)下的广义粗糙集的特征公理(5L″) $L(L(X))\subseteq L(X)$。同样，这里考虑与正向类传递关系下的广义粗糙集相对应的广义粗糙集，即反向类传递关系下的广义粗糙集。先给出如下定义。

定义 3 论域 U 为有限集合，$\forall x,y\in U$，如果 xRy，则 $\exists z\in U$，使 xRz，且 $RN(z)=\{y\}$；或 $\exists z\in U$，使 xRz，且 $RN(z)=\emptyset$，则称 R 是论域 U 上的反向类传递二元关系，简称 R 反向类传递。

与正向类传递关系下的广义粗糙集类似，定义反向类传递关系下的广义粗糙集。令 R 为有限论域 U 上的反向类传递二元关系，则

$L(R)(X)=\{x|RN(x)\subseteq X\}$

$H(R)(X)=\{x|RN(x)\cap X\neq\emptyset\}$

分别称为反向类传递关系 R 下的广义下近似算子和广义上近似算子。不致混淆时可删去标号 R。

命题 2 设 R 为有限论域 U 上的反向类传递二元关系，L,H 分别为 R 下的广义下近似算子和广义上近似算子，则 $\forall X\subseteq U$，有下面的性质：

(1L) $L(U)=U$；

(3L) $L(X\cap Y)=L(X)\cap L(Y)$；

(3L*) $L(X)\cup L(Y)\subseteq L(X\cup Y)$；

(7L″) $LH(X)\subseteq L(X)$；

(LH) $L(-X)=-H(X)$。

证明：(7L″)见下面定理 5 证明，其余性质为粗糙集的基本性质，因而是显然的。

现考虑基于反向类传递关系下广义粗糙集的公理化特征。

定理 5 论域 U 为有限集合，L,H 分别是 $2^U\rightarrow 2^U$ 上的一元运算。它们满足(LH)，且算子 L 总满足(1L)，(3L)，算子 H 总满足(1H)，(3H)，则

L 满足(7L″) $LH(X)\subseteq L(X)\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的反向类传递关系 R，使得 $L=\underline{R}$；

H 满足(7H″) $H(X)\subseteq HL(X)\Leftrightarrow\exists U$ 上唯一的反向类传递关系 R，使得 $H=\overline{R}$。

证明：由于 L,H 满足对偶性(LH)，故只需证明上、下近似算子其中之一相应结论成立即可。

(⇒)由已知条件，根据定理 1，$\exists U$ 上唯一的二元关系 R，使得 $H=\overline{R}$。下面只需证明：若 H 还满足(7H″) $H(X)\subseteq H(L(X))$，则 R 满足反向类传递。

首先，有如下等价条件：

$H(X)\subseteq H(L(X))$

$\Leftrightarrow H(-X)\subseteq H(-H(X))$

$\Leftrightarrow\forall x\in H(-X)\Rightarrow x\in H(-H(X))$

$\Leftrightarrow RN(x)\cap\{-X\}\neq\emptyset\Rightarrow RN(x)\cap\{-H(X)\}\neq\emptyset$

$\Leftrightarrow RN(x)\not\subseteq X\Rightarrow RN(x)\not\subseteq H(X)$

$\Leftrightarrow RN(x)\not\subseteq X\Rightarrow\exists z\in RN(x)$，但 $z\notin H(X)$

$\Leftrightarrow RN(x)\not\subseteq X\Rightarrow\exists z\in RN(x)$，但 $RN(z)\cap X=\emptyset$

$\Leftrightarrow RN(x)\not\subseteq X\Rightarrow\exists z\in RN(x)$，但 $RN(z)\subseteq\{-X\}$

⇔若 $\forall x\in U$，总 $\exists y\in U$，使 $y\in RN(x)$，且 $y\in\{-X\}$

则有 $z\in RN(x)$，使 $RN(z)\subseteq\{-X\}$。

其次，取 $\{-X\}=\{y\}$，即有如果 xRy，则存在 $z\in U$，使得 xRz 且 $RN(z)=\{y\}$，或 $RN(z)=\emptyset$，从而 R 是论域 U 上的反向类传递关系。

(⇐)若 R 满足反向类传递，下面证明其相应的上、下近似算子具有性质(7L″) $L(H(X))\subseteq L(X)$ 和(7H″) $H(X)\subseteq H(L(X))$。鉴于对偶性，这里证明(7L″) $LH(X)\subseteq L(X)$。

$\forall x\in L(H(X))$，即 $RN(x)\subseteq H(X)$，亦即 $\forall y\in RN(x)$，$RN(y)\cap X\neq\emptyset$。又 R 满足反向类传递，故由 xRy，总 $\exists z\in U$，使 xRz 且 $RN(z)=\{y\}$ (这里 $RN(z)=\emptyset$ 不可能，否则与 $\forall y\in RN(x)$，$RN(y)\cap X\neq\emptyset$ 矛盾)。因此 $\forall y\in RN(x)$，总 $\exists z\in RN(x)$，$RN(z)=\{y\}$。下证 $RN(x)\subseteq X$。

$\forall h\in RN(x)$，由上述结论，总 $\exists m\in RN(x)$，$RN(m)=\{h\}$。又 $\forall m\in RN(x)$，$RN(m)\cap X\neq\emptyset$，即有 $h\in X$。从而 $RN(x)\subseteq X$ 成立，亦即 $x\in L(X)$。因此 $L(H(X))\subseteq L(X)$。

由定理 5 易知，基于反向类传递关系的广义粗糙集的公理组为(1L)(3L)(7L″)，公理间相互独立见以下例 1、例 2、例 3 和例 4。

定理 6 设 R 为有限论域 U 上的反向类传递二元关系，L 为 R 下的广义下近似算子，则以下公理组为反向类传递关系下广义粗糙集的一组公理组。

（下转第 238 页）

1972:455-466

[5] 陈煜生.应用模糊集方法[M].北京:北京师范大学出版社,1986

[6] 胡毓达.实用多目标最优化[M].上海:上海科学技术出版社,1990

[7] 曹炳元.应用模糊数学与系统[M].北京:科学出版社,2005

[8] 徐裕生,王佳佳,杜英阁.目标带有模糊系数的线性规划的一种新解法[J].重庆理工大学学报:自然科学,2010,24(8):97-99

[9] Bazargan M. Airline operations and scheduling[M]. USA: Ashgate Publishing Limited,2006

[10] 孙宏.航空公司飞机排班问题:模型及算法研究[D].成都:西南交通大学,2003

[11] 王伟,王锦彪.中国民航飞机排班问题的多部图模型[J].交通与计算机,2008(4)::35-41

[12] Wu Dong-hua, Xia Hong-shan. Fleet Assignment Problem Study Based on Branch-and-bound Algorithm[C]//IFCSTA 2010 Proceedings. 2010:128-132

(上接第209页)

(1L) $L(U)=U$;

(3L) $L(X\cap Y)=L(X)\cap L(Y)$;

(7L″) $L(-L(-X))\subseteq L(X)$。

例1 设$U=\{a,b\}$,$L:2^U\to 2^U$是有限论域U上的一元算子,$L(U)=\{a\}$,$L(\{a\})=\{a\}$,$L(\{b\})=\emptyset$,$L(\emptyset)=\emptyset$。容易验证,$\forall X,Y\subseteq U$,$L(X\cap Y)=L(X)\cap L(Y)$,$L(-L(-X))=L(X)$,即(3L)(7L′)(7L″)成立。但$U\not\subseteq L(U)=\{a\}$,即(1L)不成立。因此(3L)(7L′)(7L″)$\not\Rightarrow$(1L)。

例2 设$U=\{a,b\}$,$L:2^U\to 2^U$是有限论域U上的一元算子,$L(U)=U$,$L(\{a\})=\{b\}$,$L(\{b\})=\{a\}$,$L(\emptyset)=\emptyset$。容易验证,$\forall X,Y\subseteq U$,$L(X\cap Y)=L(X)\cap L(Y)$,即(3L)成立,且(1L)显然成立。但$L(-L(-\{a\}))=L(-L(\{b\}))=L(-\{a\})=L(\{b\})=\{a\}$,而$L(\{a\})=\{b\}$,从而$L(-L(-\{a\}))\not\subseteq L(\{a\})$且$L(\{a\})\not\subseteq L(-L(-\{a\}))$,即(7L′)或(7L″)都不成立。因此(1L) (3L)$\not\Rightarrow$(7L′)且(1L)(3L)$\not\Rightarrow$(7L″)。

例3 设$U=\{a,b\}$,$L:2^U\to 2^U$是有限论域U上的一元算子,$L(U)=U$,$L(\{a\})=\{a\}$,$L(\{b\})=\{a\}$,$L(\emptyset)=\emptyset$。容易验证,$\forall X,Y\subseteq U$,$L(-L(-X))=L(X)$,$L(X\cap Y)\subseteq L(X)\cap L(Y)$,即(7L′),(7L″)和(3L′)都成立,且(1L)显然成立。但$L(\{a\}\cap\{b\})=L(\emptyset)=\emptyset\not\supseteq L(\{a\})\cap L(\{b\})=\{a\}$,即(3L″)都不成立。因此(1L)(3L′)(7L′)(7L″)$\not\Rightarrow$(3L″)。

例4 设$U=\{a,b\}$,$L:2^U\to 2^U$是有限论域U上的一元算子,$L(U)=U$,$L(\{a\})=\{a\}$,$L(\{b\})=\{b\}$,$L(\emptyset)=U$。容易验证,$\forall X,Y\subseteq U$,$L(-L(-X))=L(X)$,$L(X\cap Y)\supseteq L(X)\cap L(Y)$,即(7L′),(7L″)和(3L″)都成立,且(1L)显然成立。但$L(\{a\}\cap\{b\})=L(\emptyset)=U\not\subseteq L(\{a\})\cap L(\{b\})=\emptyset$,即(3L′)都不成立。因此(1L)(3L″)(7L′)(7L″)$\not\Rightarrow$(3L′)。

一方面,串行关系和反向类传递关系蕴含间接关系;另一方面,串行关系下粗糙近似算子的特征公理$L(\emptyset)=\emptyset$和反向类传递关系下粗糙近似算子的特征公理$L(H(X))\subseteq L(X)$,在公理(1L),(3L),(LH)满足的条件下,必然蕴含间接关系下的粗糙近似算子的特征公理$L(L(X))\subseteq L(X)$。因为由(3L)知上、下近似算子均满足单调性,并且$L(X)\subseteq H(X)$也为串行关系的特征公理,故有$L(L(X))\subseteq L(H(X))$,从而根据$L(H(X))\subseteq L(X)$,即有$L(L(X))\subseteq L(X)$。

结束语 本文提出了正向与反向类传递二元关系,研究了其下的广义粗糙集及其相关性质,给出了它们的公理化特征,也讨论了这两类广义粗糙集与其它相关二元关系下的广义粗糙集之间的联系。正向与反向类传递粗糙近似算子的特征公理在特定的背景中具有一定的应用价值。这两个特征公理结合起来即为$L(X)=LH(X)$或$H(X)=HL(X)$。在此类特化的广义粗糙集中,任何集合与其上近似集的下近似相等;同时,任何集合与其下近似集的上近似相等。换言之,任何集合都与其上近似集或下近似集具有一定意义上相同的近似能力。粗糙近似算子的这些性质用论域内部元素之间的特征来刻画,就是同时满足正向与反向传递关系。这些相互表达或刻画将为进一步研究经典粗糙集或基于粗糙集的特定知识发现提供一定的帮助。

参考文献

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,5:341-356

[2] Pawlak Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishing,1991

[3] Leung Y,Wu W Z,Zhang W X. Knowledge acquisition in incomplete information ststems: A rough set approach[J]. European Journal of Operational Research,2006,168:164-180

[4] Pawlak Z,Skowron A. Rudiments of rough sets[J]. Information Sciences,2007,177:3-27

[5] Wu W Z. Attribute reduction based on evidence theory in incomplete decision systems[J]. Information Sciences, 2008, 178: 1355-1371

[6] Wu W Z,Zhang M,Li H Z,et al. Knowledge reduction in random information systems via [J]. Information Sciences, 2005, 174:143-164

[7] Skowron A,Stepaniuk J. Tolerance Approximation Spaces[J]. Fundamenta Informaticae,1996,27:245-253

[8] Skowron A,Vanderpooten D. A Generalized Definition of Rough Approximations Based on Similarity[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering,2000,12:331-336

[9] Dubios D,Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of General Systems,1990,17:191-209

[10] 张文修,吴伟志.基于随机集的粗糙集模型(I) [J].西安交通大学学报,2001,34(12):75-79

[11] 张文修,吴伟志.基于随机集的粗糙集模型(II) [J].西安交通大学学报,2002,35(4):425-429

[12] 李进金.粗糙集与拓扑空间的子集[J].系统工程与理论实践,2005,7:136-140

[13] 李进金.覆盖广义粗集中的拓扑学方法[J].模式识别与人工智能,2004,17(1):7-10

[14] Yao Y Y. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets[J]. Information Sciences,1998,109:21-47

[15] Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes[J]. International Journal of Approximate Reasoning,1996,15:291-317

[16] Zhu W. Generalized rough sets based on relation[J]. Information Sciences,2007,177:4997-5011