区间值决策形式背景的属性值向量约简

黄 艳 任苗苗 魏 玲
（西北大学数学系 西安 710069）

摘 要 概念格是一种潜力极大的有效的知识发现工具，现已被广泛应用于计算机网络、数据挖掘等领域。针对现实生活中信息的不确定性，定义了区间值决策形式背景；通过讨论条件区间形式背景与决策区间形式背景概念格之间的关系，研究了区间值决策形式背景的协调性，进一步研究了属性值向量约简，使得原背景在属性及属性区间值两个方面得到简化。

关键词 区间值决策形式背景，概念格，协调性，属性值向量约简

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Reduction of Attribute Values Based on Interval-valued Formal Decision Contexts

HUANG Yan REN Miao-miao WEI Ling
(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract The theory of concept lattices is an efficient tool for knowledge discovery, and is applied to many fields. Considering the information uncertainty in the real world, the paper defined the interal-valued formal decision context. Based on which, the consistence of the interval-valued formal decision context was studied through the relation between condition context and decision context, and further, the reduction of attribute value vectors was studied, which makes the attribute number and interval-value of attribute simpler than before.

Keywords Interval-valued formal decision context, Concept lattices, Consistence, Reduction of attribute value vectors

1 引言

形式概念分析，亦称概念格理论，是由德国数学家 R. Wille 于 1982 年提出的，它是一种表达和处理概念与概念层次的数学理论[1,2]。该理论研究的主要对象是形式概念和概念格。概念是由外延和内涵组成的统一体，所有的概念同它们之间的泛化与例化关系构成概念格，其相应的 Hasse 图实现了数据的可视化。这一理论已被广泛应用于计算机网络、数据挖掘、决策分析、信息检索、管理科学等领域[3,4]。

由于现实世界中问题的复杂性，属性值往往是连续的，因此研究区间值的知识获取和约简很有必要[5,6]。对于区间数的处理，一般是将其离散化，但这样往往会丢失原有数据的信息，因而使用直接处理方式就显得尤为重要。Burusco 等引入 L-fuzzy 概念理论来解决区间数处理中的问题[7]。周文将区间形式的背景离散化转换成经典的形式背景，进而获得了与原区间形式背景同构的区间概念格[8]。吴克生、魏玲定义了对象集和属性集之间的一对伽罗瓦连接算子，获得了与原区间形式背景同构的区间概念格，提出了保持区间概念格不变的属性值向量约简方法[10]。

本文结合区间形式背景的约简和经典决策形式背景的约简[11-14]，提出了区间值决策形式背景的协调性问题，进而讨论了协调区间值决策形式背景的属性值向量约简方法，从而使原区间值决策形式背景在属性和属性区间值两个方面得到简化。

定义 1[9] 一个区间 $c=[a,b]$ 是一个实数集合 $\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$，称 c 是一个区间数。区间可以用两个实数表示。

定义 2[10] 设 (U,A,F) 是区间值形式背景，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为对象集，U 中每个元素 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为一个对象。$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是属性集，A 中的每个元素 $a_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为一个属性。F 为 U 与 A 之间的关系集，即

$$F=\{f_j:U\times A\rightarrow[\alpha,\beta]\,|\,(a_j\in A)\}$$

记 $H_x=(f_1(x,a_1),f_2(x,a_2),\cdots,f_m(x,a_m))$，表示某个对象 x 所具有的 $|A|$ 维属性值向量。对于任意的 $x_i,x_j\in U$ $(i,j\leqslant n)$，定义 H_{x_i} 与 H_{x_j} 之间的 $\cup$，$\cap$ 运算和 $\leqslant$ 关系如下：

$$H_{x_i}\cap H_{x_j}=(f_1(x_i,a_1)\cap f_1(x_j,a_1),\cdots,f_m(x_i,a_m)\cap f_m(x_j,a_m))$$

$$H_{x_i}\cup H_{x_j}=(f_1(x_i,a_1)\cup f_1(x_j,a_1),\cdots,f_m(x_i,a_m)\cup f_m(x_j,a_m))$$

$$H_{x_i}\leqslant H_{x_j}\Leftrightarrow f_1(x_i,a_1)\subseteq f_1(x_j,a_1),\cdots,f_m(x_i,a_m)\subseteq f_m(x_j,a_m)$$

定义 3[10] 设 (U,A,F) 是区间值形式背景，$\forall X\subseteq U$，$H\leqslant\bigcup_{x\in U}H_x$，有 $X^*=\bigcap_{x\in X}H_x$，$H'=\{x\in U\,|\,H\leqslant H_x\}$，$X^*$ 表示 X 中所有对象共同具有的属性值向量，H' 表示具有 H 中所有属性区间值的对象的集合。

到稿日期：2011-01-17 返修日期：2011-04-20 本文受国家自然科学基金(11071281,61005042)资助。
黄 艳 女，硕士生，主要研究方向为人工智能，E-mail：huangyan403@163.com；**任苗苗** 女，硕士生，主要研究方向为人工智能；**魏 玲** 女，教授，博士生导师，主要研究方向为人工智能。

定理 1[10] 对于区间值形式背景(U,A,F)，$\forall X_1,X_2,X\subseteq U$；$\forall H_1,H_2,H\leqslant\bigcup_{x\in U}H_x$ 有下面的性质：

(1)$X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_2^*\leqslant X_1^*$，$H_1\leqslant H_2\Rightarrow H_2'\subseteq H_1'$；

(2)$X\subseteq X^{*\prime}$，$H\leqslant H^{\prime *}$；

(3)$X^*=X^{*\prime *}$，$H'=H^{\prime *\prime}$；

(4)$X\subseteq H'\Leftrightarrow H\leqslant X^*$；

(5)$(X_1\cup X_2)^*=X_1^*\cap X_2^*$，$(H_1\cup H_2)'=H_1'\cap H_2'$；

(6)$(X_1\cap X_2)^*\geqslant X_1^*\cap X_2^*$，$(H_1\cap H_2)'\supseteq H_1'\cap H_2'$。

定义 4[10] 设(U,A,F)是区间值形式背景，$\forall X\subseteq U$，$H\leqslant\bigcup_{x\in U}H_x$，$X^*=H$，$H'=X$，称$(X,H)$为区间概念。$X$ 为区间概念的外延，H 为区间概念的内涵。特别地，$(U,\bigcap_{x\in U}H_x)$和$(\varnothing,\bigcup_{x\in U}H_x)$是区间概念。

用$L(U,A,F)$表示全体区间概念，记$(X_1,H_1)\leqslant_1(X_2,H_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2(\Leftrightarrow H_2\leqslant H_1)$，则"$\leqslant_1$"是$L(U,A,F)$上的偏序关系。

定理 2[10] 若(X_1,H_1)和(X_2,H_2)是区间概念，则

$$(X_1,H_1)\wedge(X_2,H_2)=(X_1\cap X_2,(H_1\cup H_2)^{\prime *})$$

$$(X_1,H_1)\vee(X_2,H_2)=((X_1\cup X_2)^{*\prime},H_1\cap H_2)$$

也是区间概念，则$L(U,A,F)$是完备格。

定义 5[10] 设$L(U,A_1,F_1)$和$L(U,A_2,F_2)$是两个区间概念格，若$\forall(X,H)\in L(U,A_2,F_2)$，$\exists(Y,Q)\in L(U,A_1,F_1)$，使得$X=Y$，则称$L(U,A_1,F_1)$细于$L(U,A_2,F_2)$，记作$L(U,A_1,F_1)\leqslant_2 L(U,A_2,F_2)$。若$L(U,A_1,F_1)\leqslant_2 L(U,A_2,F_2)$且$L(U,A_2,F_2)\leqslant_2 L(U,A_1,F_1)$，则称$L(U,A_1,F_1)$同构于$L(U,A_2,F_2)$，记作$L(U,A_1,F_1)\cong L(U,A_2,F_2)$。

2 区间值决策形式背景

定义 6 称(U,A,F,C,G)是区间值决策形式背景，如果(U,A,F)和(U,C,G)都是区间形式背景。其中，A 是条件属性，C 是决策属性。

当 $a_j\in A(j\leqslant m)$时，$f_j(x_i,a_j)=[\alpha_{ij},\beta_{ij}](i\leqslant n)$，取 $q_j=\max\{\beta_{1j},\beta_{2j},\cdots,\beta_{nj}\}$，$\frac{f_j(x_i,a_j)}{q_j}=[\frac{\alpha_{ij}}{q_j},\frac{\beta_{ij}}{q_j}]$；

当 $c_l\in C(l\leqslant k)$时，记 $g_l(x_i,c_l)=[\varphi_{il},\gamma_{il}](i\leqslant n)$，取 $p_l=\max\{\gamma_{1l},\gamma_{2l},\cdots,\gamma_{nl}\}$，$\frac{g_l(x_i,c_l)}{p_l}=[\frac{\varphi_{il}}{p_l},\frac{\gamma_{il}}{p_l}]$。这样可使得所有的区间值都在$[0,1]$上，便于分析区间值决策形式背景。

设(U,A,F,C,G)是区间值决策形式背景，记 $H_0=\bigcup_{x\in U}H_x$ 表示所有对象拥有的$|A|$维的条件属性值向量的并，$H_U=\bigcap_{x\in U}H_x$表示所有对象共同拥有的$|A|$维的条件属性值向量。$P_0=\bigcup_{x\in U}P_x$表示所有对象拥有的$|C|$维的决策属性值向量的并，$P_U=\bigcap_{x\in U}P_x$表示所有对象共同拥有的$|C|$维的决策属性值向量。

定义 7 设(U,A,F,C,G)是区间值决策形式背景，$\forall X\subseteq U$，$H\leqslant H_0$，若 $X^{*F}=\bigcap_{x\in X}H_x$，$H'=\{x\in U\mid H\leqslant H_x\}$；$\forall X\subseteq U$，$P\leqslant P_0$，有 $X^{*G}=\bigcap_{x\in X}P_x$，$P'=\{x\in U\mid P\leqslant P_x\}$，$X^{*F}$ 表示 X 中所有对象共同具有的条件属性值向量，H'表示具有 H 中所有条件属性区间值的对象的集合；X^{*G} 表示 X 中所有对象共同具有的决策属性值向量，P'表示具有 P 中所有决策属性区间值的对象的集合。

定义 8 设(U,A,F,C,G)是区间值决策形式背景，$\forall X\subseteq U$，$H\leqslant H_0$，若 $X^{*F}=H$，$H'=X$，则称(X,H)是条件属性下的区间概念；$\forall X\subseteq U$，$P\leqslant P_0$，若 $X^{*G}=P$，$P'=X$，则称(X,P)是决策属性下的区间概念。

$$L(U,A,F)=\{(X,H)\mid X^{*F}=H,H'=X\}$$

$$L(U,C,G)=\{(X,P)\mid X^{*G}=P,P'=X\}$$

定义 9 设(X_i,H_i)，(X_j,H_j)是两个区间概念，$(X_i,H_i)\leqslant_1(X_j,H_j)$，且$(X_i,H_i)\neq(X_j,H_j)$，若不存在$(Y,E)$，$(Y,E)\neq(X_i,H_i)$，且$(Y,E)\neq(X_j,H_j)$，使得$(X_i,H_i)\leqslant_1(Y,E)\leqslant_1(X_j,H_j)$，则称$(X_j,H_j)$是$(X_i,H_i)$的父概念，$(X_i,H_i)$是$(X_j,H_j)$的子概念，记作$(X_i,H_i)\prec(X_j,H_j)$。

3 协调区间值决策形式背景的属性值向量约简

3.1 基本概念

定义 10 设(U,A,F,C,G)是区间值决策形式背景。若$L(U,A,F)\leqslant_2 L(U,C,G)$，则称$(U,A,F,C,G)$是协调的。

若(U,A,F,C,G)是协调的区间值决策形式背景，当 $B\leqslant H_0$ 且 $B\neq(\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$时，记 $B=(B_1,B_2,\cdots,B_m)$，$T_B=\{t_j:U\times A\rightarrow R\}$，其中 $R=\{f_j(x_i,a_j)\cap B_j\mid x_i\in U,a_j\in A\}$，有 $L(U,A,T_B)\leqslant_2 L(U,C,G)$，则称 B 是协调的区间值决策形式背景(U,A,F,C,G)的协调区间向量。若不存在 $Q\leqslant B$，$Q\neq(\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，使得 $L(U,A,T_Q)\leqslant_2 L(U,C,G)$，则称 B 是协调的区间值决策形式背景(U,A,F,C,G)的约简区间向量。若 B 是约简区间向量，且$\forall x\in U$，$\exists B_j(1\leqslant j\leqslant m)$，使 $B_j\cap f_j(x,a_j)=\varnothing$，则称 a_j 为绝对不必要属性。

定义 11 设(U,A,F,C,G)是协调的区间值决策形式背景，(X_i,H_i)，$(X_j,H_j)\in L(U,A,F)$。称

$$DIS((X_i,H_i),(X_j,H_j))=\begin{cases}H_i-H_j, & (X_i,X_i^{*G})\in L(U,C,G)\text{且}(X_i,H_i)\prec(X_j,H_j)\\ \varnothing, & \text{其它}\end{cases}$$

为(X_i,H_i)与(X_j,H_j)的可辨识属性值区间向量。记 $\Lambda=(DIS((X_i,H_i),(X_j,H_j))\mid(X_i,H_i),(X_j,H_j)\in L(U,A,F))$为区间值决策形式背景的可辨识属性值区间向量矩阵。

3.2 协调区间向量判定定理

定理 3 设(U,A,F,C,G)是协调的区间值决策形式背景，则约简区间向量一定存在。

证明：由(U,A,F,C,G)是协调的区间值决策形式背景，可得 $L(U,A,F)\leqslant_2 L(U,C,G)$，则 H_0 是协调区间向量。若$\forall h<H_0$，$h\neq(\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，$H_0-h$ 都不是协调区间向量，则 H_0 就是约简区间向量。若存在 $h<H_0$，$h\neq(\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，使得 $M_1=H_0-h$ 为协调区间向量，当$\forall h_1\leqslant M_1$，且 $h_1\neq(\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$时，若 M_1-h_1 不是协调区间向量，则 M_1 就是约简区间向量。否则再研究 $M_2=M_1-h_1$。重复上述的过程。由 H_0 是一个有限维属性区间向量可知，一定可以找到一个约简区间向量。所以区间值决策形式背景的约简区间向量一定存在。

同经典形式背景一样，区间值决策形式背景的约简区间向量未必唯一。

引理 1 设(U,A,F,C,G)是协调的区间值决策形式背景，(X_i,H_i)，(X_j,H_j)，$(X_k,H_k)\in L(U,A,F)$，$(X_i,H_i)\prec(X_j,H_j)$，$(X_j,H_j)\leqslant_1(X_k,H_k)$，$B\leqslant H_0$。

若 $H_i\cap B\neq H_j\cap B$，那么 $H_i\cap B\neq H_k\cap B$。

证明：由于$(X_i,H_i)\prec(X_j,H_j)$，因此 $H_j<H_i$，$H_j\cap B\leqslant H_i\cap B$。又 $H_i\cap B\neq H_j\cap B$，因此，$H_j\cap B<H_i\cap B$。由$(X_j,H_j)\leqslant_1(X_k,H_k)$可知 $H_k\leqslant H_j$，从而 $H_k\cap B\leqslant H_j\cap B$，于是

$H_k \cap B < H_i \cap B$，因此 $H_i \cap B \neq H_k \cap B$。

从属性区间向量的角度，可得到如下定理。

定理 4 设 (U,A,F,C,G) 是协调区间值决策形式背景，$B \leqslant H_0$，且 $B \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，以下命题等价：

(1) B 是协调属性区间向量。

(2) 若 $\forall Q \leqslant P_0, Q \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，则 $(Q'^{*} \cap B)' = Q'$。

(3) 若 $\forall Q \leqslant P_0, Q \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，则

$\exists K \leqslant B, K \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，使得 $K' = Q'$。

证明：(1)⇒(2) $\forall Q \leqslant P_0, Q \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，总有 $(Q', Q'^{*G}) \in L(U,C,G)$。由 B 是协调属性区间向量可知，$L(U,A,T_B) \leqslant_2 L(U,C,G)$，则对于 $(Q', Q'^{*G}) \in L(U,C,G)$，$\exists K \leqslant B$，使得 $(Q', K) \in L(U,A,T_B)$，即 $K' = Q'$，$K = Q'^{*T_B} = Q'^{*} \cap B$，因此 $(Q'^{*} \cap B)' = Q'$。

(2)⇒(3) 显然成立。

(3)⇒(1) $\forall Q \leqslant P_0, Q \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，总有 $(X,Q) \in L(U,C,G)$。又 $\exists K \leqslant B, K = (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing), K' = Q'$，则有 $(K \cap B)' = K' = Q'$，故 $(X, K \cap B) = (X,K) \in L(U,A,T_B)$，因此，$L(U,A,T_B) \leqslant_2 L(U,C,G)$。即 B 是协调属性区间向量。

推论 1 设 (U,A,F,C,G) 是协调区间值决策形式背景，$B \leqslant H_0$ 且 $B \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$。若 B 是协调属性区间向量，则 $B' \subseteq P_0'$。

证明：若 B 是协调属性区间向量，由定理 4 知 $(P_0'^{*} \cap B)' = P_0'$。又 $P_0'^{*} \cap B \leqslant B$，因此 $B' \subseteq (P_0'^{*} \cap B)' = P_0'$，即 $B' \subseteq P_0'$。

从辨识属性区间向量的角度，可得到如下的定理。

定理 5 设 (U,A,F,C,G) 为协调区间值决策形式背景，$B \leqslant H_0, B \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$。下列命题等价：

(1) B 是协调属性区间向量。

(2) $\forall (X_i,H_i),(X_j,H_j) \in L(U,A,F)$，若 $(X_i, X_i^{*G}) \in L(U,C,G)$ 且 $(X_i,H_i) \prec (X_j,H_j)$，则 $H_i \cap B \neq H_j \cap B$。

(3) $\forall (X_m,H_m),(X_n,H_n) \in L(U,A,F)$，若 $DIS((X_m,H_m),(X_n,H_n)) \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，则 $B \cap DIS((X_m,H_m),(X_n,H_n)) \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$。

(4) $\forall Q \leqslant H_0$，若 $Q \cap B = (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，则 $Q \notin \Lambda$。

证明：(1)⇒(2) 因为 B 是协调属性区间向量，所以 $L(U,A,T_B) \leqslant_2 L(U,C,G)$。$\forall (X_i,H_i),(X_j,H_j) \in L(U,A,F)$，若 $(X_i, X_i^{*G}) \in L(U,C,G)$，则 $\exists Q_i \leqslant B, (X_i, Q_i) \in L(U,A,T_B)$ 即 $Q_i = X_i^{*T_B} = X_i^{*} \cap B = H_i \cap B$。又 $(X_i,H_i) \prec (X_j,H_j)$，因此 $X_i \subset X_j$。又由 $H_j \cap B \leqslant H_j$ 可得 $X_j = H_j' \subseteq (H_j \cap B)'$。于是 $X_j \subseteq (H_j \cap B)'$，从而 $(H_i \cap B)' = Q_i' = X_i \neq (H_j \cap B)'$。因此 $H_i \cap B \neq H_j \cap B$。

(2)⇒(3) $\forall (X_m,H_m),(X_n,H_n) \in L(U,A,F)$，因为 $DIS((X_m,H_m),(X_n,H_n)) \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$，所以 $(X_m, X_m^{*G}) \in L(U,C,G)$ 且 $(X_m,H_m) \prec (X_n,H_n)$，从而 $H_m \cap B \neq H_n \cap B$。又因为 $H_m > H_n \Rightarrow H_m \cap B \geqslant H_n \cap B$，所以 $H_m \cap B > H_n \cap B$，因此 $(H_m - H_n) \cap B \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$。即 $B \cap DIS((X_m,H_m),(X_n,H_n)) \neq (\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing)$。

(3)⇔(4) 显然成立。

(4)⇔(1) 显然成立。

4 例子

表 1 给出协调区间值决策形式背景 (U,A,F,C,G)，其中对象集 $U=\{1,2,3,4\}$，条件属性集 $A=\{a,b,c,d\}$，决策属性集 $C=\{e,g,h\}$。

表 1 区间值决策形式背景

	a	b	c	d	e	g	h
1	[1,3]	[6,13]	[40,100]	[9,10]	[30,50]	[16,20]	[18,20]
2	[2,5]	[14,16]	[20,30]	[3,6]	[30,40]	[12,16]	[16,24]
3	[4,6]	[9,12]	[20,30]	[7,8]	[40,60]	[10,14]	[12,18]
4	[4,5]	[10,15]	[30,90]	[4,9]	[50,60]	[16,18]	[10,18]

用第 2 节的方法将表 1 转化为表 2。

表 2 转化后的区间值决策形式背景

	a	b	c	d	e	g	h
1	$[\frac{1}{6},\frac{3}{6}]$	$[\frac{6}{16},\frac{13}{16}]$	$[\frac{40}{100},1]$	$[\frac{9}{10},1]$	$[\frac{3}{6},\frac{5}{6}]$	$[\frac{16}{20},1]$	$[\frac{18}{24},\frac{20}{24}]$
2	$[\frac{2}{6},\frac{5}{6}]$	$[\frac{14}{16},1]$	$[\frac{20}{100},\frac{30}{100}]$	$[\frac{3}{10},\frac{6}{10}]$	$[\frac{3}{6},\frac{4}{6}]$	$[\frac{12}{20},\frac{16}{20}]$	$[\frac{16}{24},1]$
3	$[\frac{4}{6},1]$	$[\frac{9}{16},\frac{12}{16}]$	$[\frac{20}{100},\frac{30}{100}]$	$[\frac{7}{10},\frac{8}{10}]$	$[\frac{4}{6},1]$	$[\frac{10}{20},\frac{14}{20}]$	$[\frac{12}{24},\frac{18}{24}]$
4	$[\frac{4}{6},\frac{5}{6}]$	$[\frac{10}{16},\frac{15}{16}]$	$[\frac{30}{100},\frac{90}{100}]$	$[\frac{4}{10},\frac{9}{10}]$	$[\frac{5}{6},1]$	$[\frac{16}{20},\frac{18}{20}]$	$[\frac{10}{24},\frac{18}{24}]$

由定义 7 和定义 8 得条件属性下的区间概念共有 14 个，分别记为 $C_1, C_2, \cdots, C_{14}$：

$$C_1=(1,H_1)=(1,([\frac{1}{6},\frac{3}{6}],[\frac{6}{16},\frac{13}{16}],[\frac{40}{100},1],[\frac{9}{10},1]))$$

$$C_2=(2,H_2)=(2,([\frac{2}{6},\frac{5}{6}],[\frac{14}{16},1],[\frac{20}{100},\frac{30}{100}],[\frac{3}{10},\frac{6}{10}]))$$

$$C_3=(3,H_3)=(3,([\frac{4}{6},1],[\frac{9}{16},\frac{12}{16}],[\frac{20}{100},\frac{30}{100}],[\frac{7}{10},\frac{8}{10}]))$$

$$C_4=(4,H_4)=(4,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{10}{16},\frac{15}{16}],[\frac{30}{100},\frac{90}{100}],[\frac{4}{10},\frac{9}{10}]))$$

$$C_5=(12,H_{12})=(12,([\frac{2}{6},\frac{3}{6}],\varnothing,\varnothing,\varnothing))$$

$$C_6=(13,H_{13})=(13,(\varnothing,[\frac{9}{16},\frac{12}{16}],\varnothing,\varnothing))$$

$$C_7=(14,H_{14})=(14,(\varnothing,[\frac{10}{16},\frac{13}{16}],[\frac{40}{100},\frac{90}{100}],\varnothing))$$

$$C_8=(23,H_{23})=(23,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],\varnothing,[\frac{20}{100},\frac{30}{100}],\varnothing))$$

$$C_9=(24,H_{24})=(24,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{14}{16},\frac{15}{16}],\varnothing,[\frac{4}{10},\frac{6}{10}]))$$

$$C_{10}=(34,H_{34})=(34,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{10}{16},\frac{12}{16}],\varnothing,[\frac{7}{10},\frac{8}{10}]))$$

$$C_{11}=(134,H_{134})=(134,(\varnothing,[\frac{10}{16},\frac{12}{16}],\varnothing,\varnothing))$$

$$C_{12}=(234,H_{234})=(234,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],\varnothing,\varnothing,\varnothing))$$

$$C_{13}=(1234,H_U)=(1234,(\varnothing,\varnothing,\varnothing,\varnothing))$$

$$C_{14}=(\varnothing,H_0)=(\varnothing,([\frac{1}{6},1],[\frac{6}{16},1],[\frac{20}{100},1],[\frac{3}{10},1]))$$

决策属性下的区间概念为：

$(1,P_1)=(1,([\frac{3}{6},\frac{5}{6}],[\frac{16}{20},1],[\frac{18}{24},\frac{20}{24}]))$

$(2,P_2)=(2,([\frac{3}{6},\frac{4}{6}],[\frac{12}{20},\frac{16}{20}],[\frac{16}{24},1]))$

$(3,P_3)=(3,([\frac{4}{6},1],[\frac{10}{20},\frac{14}{20}],[\frac{12}{24},\frac{18}{24}]))$

$(4,P_4)=(4,([\frac{5}{6},1],[\frac{16}{20},\frac{18}{20}],[\frac{10}{24},\frac{18}{24}]))$

$(12,P_{12})=(12,([\frac{3}{6},\frac{4}{6}],\varnothing,[\frac{18}{24},\frac{20}{24}]))$

$(13,P_{13})=(13,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],\varnothing,\varnothing))$

$(14,P_{14})=(14,(\varnothing,[\frac{16}{20},\frac{18}{20}],\varnothing))$

$(23,P_{23})=(23,(\varnothing,[\frac{12}{20},\frac{14}{20}],[\frac{16}{24},\frac{18}{24}]))$

$(34,P_{34})=(34,([\frac{5}{6},1],\varnothing,[\frac{12}{24},\frac{18}{24}]))$

$(234,P_{234})=(234,(\varnothing,\varnothing,[\frac{16}{24},\frac{18}{24}]))$

$(U,P_U)=(1234,(\varnothing,\varnothing,\varnothing))$

$(\varnothing,P_0)=(\varnothing,([\frac{3}{6},1],[\frac{10}{20},1],[\frac{10}{24},1]))$

条件属性上与决策属性上形成的区间概念格分别如图1、图2所示。

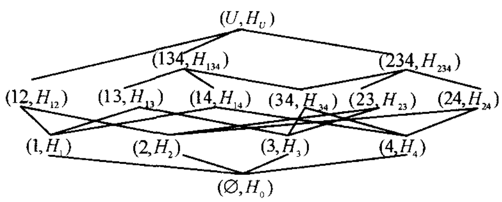

图 1 $L(U,A,F)$

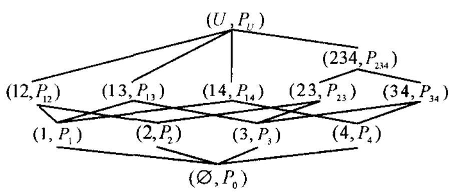

图 2 $L(U,C,G)$

由定义 7 可得可辨识属性向量如下：

$DIS(C_1,C_{14})=((\frac{3}{6},1],(\frac{13}{16},1],[\frac{20}{100},\frac{40}{100}),[\frac{3}{10},\frac{9}{10}))$

$DIS(C_2,C_{14})=([\frac{1}{6},\frac{2}{6})\cup(\frac{5}{6},1],[\frac{6}{16},\frac{14}{16}),(\frac{30}{100},1],(\frac{6}{10},1])$

$DIS(C_3,C_{14})=([\frac{1}{6},\frac{4}{6}),[\frac{6}{16},\frac{9}{16})\cup(\frac{12}{16},1],(\frac{30}{100},1],[\frac{3}{10},\frac{7}{10})\cup(\frac{8}{10},1])$

$DIS(C_4,C_{14})=([\frac{1}{6},\frac{4}{6})\cup[\frac{5}{6},1],[\frac{6}{16},\frac{10}{16})\cup(\frac{15}{16},1],[\frac{20}{100},\frac{30}{100})\cup(\frac{90}{100},1],[\frac{3}{10},\frac{4}{10})\cup(\frac{9}{10},1])$

$DIS(C_1,C_5)=([\frac{1}{6},\frac{2}{6}),[\frac{6}{16},\frac{13}{16}],[\frac{40}{100},1],[\frac{9}{10},1])$

$DIS(C_1,C_6)=([\frac{1}{6},\frac{3}{6}],(\frac{12}{16},\frac{13}{16}],[\frac{40}{100},1],[\frac{9}{10},1])$

$DIS(C_1,C_7)=([\frac{1}{6},\frac{3}{6}],[\frac{6}{16},\frac{10}{16}),(\frac{90}{100},1],[\frac{9}{10},1])$

$DIS(C_2,C_5)=((\frac{3}{6},\frac{5}{6}],[\frac{14}{16},1],[\frac{20}{100},\frac{30}{100}],[\frac{3}{10},\frac{6}{10}])$

$DIS(C_2,C_8)=([\frac{2}{6},\frac{4}{6}),[\frac{14}{16},1],\varnothing,[\frac{3}{10},\frac{6}{10}])$

$DIS(C_2,C_9)=([\frac{2}{6},\frac{4}{6}),(\frac{15}{16},1],[\frac{20}{100},\frac{30}{100}],[\frac{3}{10},\frac{4}{10}))$

$DIS(C_3,C_8)=((\frac{5}{6},1],[\frac{9}{16},\frac{12}{16}],\varnothing,(\frac{7}{10},\frac{8}{10}))$

$DIS(C_3,C_{10})=((\frac{5}{6},1],[\frac{9}{16},\frac{10}{16}),[\frac{20}{100},\frac{30}{100}],\varnothing)$

$DIS(C_3,C_6)=([\frac{4}{6},1],\varnothing,[\frac{20}{100},\frac{30}{100}],[\frac{7}{10},\frac{8}{10}])$

$DIS(C_4,C_7)=([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],(\frac{13}{16},\frac{15}{16}],[\frac{30}{100},\frac{40}{100}],[\frac{4}{10},\frac{9}{10}])$

$DIS(C_4,C_9)=(\varnothing,[\frac{10}{16},\frac{14}{16}),[\frac{30}{100},\frac{90}{100}],[\frac{6}{10},\frac{9}{10}])$

$DIS(C_4,C_{10})=(\varnothing,(\frac{12}{16},\frac{15}{16}],[\frac{30}{100},\frac{90}{100}],[\frac{4}{10},\frac{7}{10})\cup(\frac{8}{10},\frac{9}{10}])$

$DIS(C_5,C_{13})=([\frac{2}{6},\frac{3}{6}],\varnothing,\varnothing,\varnothing)$

$DIS(C_6,C_{11})=(\varnothing,[\frac{9}{16},\frac{10}{16}],\varnothing,\varnothing)$

$DIS(C_7,C_{11})=(\varnothing,[\frac{12}{16},\frac{13}{16}],[\frac{40}{100},\frac{90}{100}],\varnothing)$

$DIS(C_{10},C_{11})=([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],\varnothing,\varnothing,[\frac{7}{10},\frac{8}{10}])$

$DIS(C_{10},C_{12})=(\varnothing,[\frac{10}{16},\frac{12}{16}],\varnothing,[\frac{7}{10},\frac{8}{10}])$

$DIS(C_8,C_{12})=(\varnothing,\varnothing,[\frac{20}{100},\frac{30}{100}],\varnothing)$

$DIS(C_9,C_{12})=(\varnothing,[\frac{14}{16},\frac{15}{16}],\varnothing,[\frac{4}{10},\frac{6}{10}])$

$DIS(C_{11},C_{13})=(\varnothing,[\frac{10}{16},\frac{12}{16}],\varnothing,\varnothing)$

$DIS(C_{12},C_{13})=([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],\varnothing,\varnothing,\varnothing)$

通过上面的辨识属性值向量可知该形式背景条件属性上存在 3 个约简属性区间向量：

$B_1=([\frac{2}{6},\frac{3}{6}]\cup[\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{9}{16},\frac{15}{16}],[\frac{20}{100},\frac{30}{100}],\varnothing)$

$B_2=([\frac{2}{6},\frac{3}{6}]\cup[\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{9}{16},\frac{12}{16}],[\frac{20}{100},\frac{30}{100}]\cup[\frac{40}{100},\frac{90}{100}],[\frac{4}{10},\frac{6}{10}])$

$B_3=([\frac{2}{6},\frac{3}{6}]\cup[\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{9}{16},\frac{12}{16}],[\frac{20}{100},\frac{30}{100}],[\frac{4}{10},\frac{6}{10}])$

利用 B_1 对条件属性下的形式背景进行约简，其结果如

表 3 所列。

表 3　利用 B_1 约简后的形式背景 (U,A,T_{B_1})

	a	b	c	d
1	$\left[\frac{2}{6},\frac{3}{6}\right]$	$\left[\frac{9}{16},\frac{13}{16}\right]$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\left[\frac{2}{6},\frac{3}{6}\right]\cup\left[\frac{4}{6},\frac{5}{6}\right]$	$\left[\frac{14}{16},\frac{15}{16}\right]$	$\left[\frac{20}{100},\frac{30}{100}\right]$	$\emptyset$
3	$\left[\frac{4}{6},\frac{5}{6}\right]$	$\left[\frac{9}{16},\frac{12}{16}\right]$	$\left[\frac{20}{100},\frac{30}{100}\right]$	$\emptyset$
4	$\left[\frac{4}{6},\frac{5}{6}\right]$	$\left[\frac{10}{16},\frac{15}{16}\right]$	$\emptyset$	$\emptyset$

根据定义 10，d 为绝对不必要属性。把此约简后的形式背景记为 $(U,A-\{d\},E)$，E 为 U 和 $A-\{d\}$ 之间的关系集，即 $E=\{f_k:U\times(A-\{d\})\rightarrow[\delta,\lambda]\mid(a_k\in A-\{D\})\}$。

按照定义 7 和定义 8，同样可从表 3 得到 14 个区间概念：

$$(1,E_1)=(1,([\frac{2}{6},\frac{3}{6}],[\frac{9}{16},\frac{13}{16}],\emptyset))$$

$$(2,E_2)=(2,([\frac{2}{6},\frac{3}{6}]\cup[\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{14}{16},\frac{15}{16}],[\frac{20}{100},\frac{30}{100}]))$$

$$(3,E_3)=(3,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{9}{16},\frac{12}{16}],[\frac{20}{100},\frac{30}{100}]))$$

$$(4,E_4)=(4,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{10}{16},\frac{15}{16}],\emptyset))$$

$$(12,E_{12})=(12,([\frac{2}{6},\frac{3}{6}],\emptyset,\emptyset))$$

$$(13,E_{13})=(13,(\emptyset,[\frac{9}{16},\frac{12}{16}],\emptyset))$$

$$(14,E_{14})=(14,(\emptyset,[\frac{10}{16},\frac{13}{16}],\emptyset))$$

$$(34,E_{34})=(34,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{10}{16},\frac{12}{16}],\emptyset))$$

$$(23,E_{23})=(23,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],\emptyset,[\frac{20}{100},\frac{30}{100}]))$$

$$(24,E_{24})=(24,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{14}{16},\frac{15}{16}],\emptyset))$$

$$(134,E_{134})=(134,(\emptyset,[\frac{10}{16},\frac{12}{16}],\emptyset))$$

$$(234,E_{234})=(234,([\frac{4}{6},\frac{5}{6}],\emptyset,\emptyset))$$

$$(U,E_U)=(1234,(\emptyset,\emptyset,\cdots,\emptyset))$$

$$(\emptyset,E_0)=(\emptyset,([\frac{2}{6},\frac{3}{6}]\cup[\frac{4}{6},\frac{5}{6}],[\frac{9}{16},\frac{15}{16}],[\frac{20}{100},\frac{30}{100}]))$$

利用 B_1 约简后的这 14 个条件上的区间概念形成的区间概念格如图 3 所示。

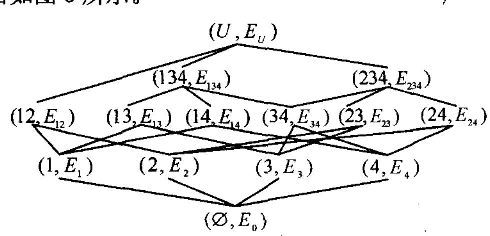

图 3　$L(U,D,E)$

容易看出图 1 和图 3 两个概念格是同构的，即原协调的区间值决策形式背景的条件属性上的概念格与约简后条件属性上的概念格是同构的。因此区间值决策形式背景的属性值向量约简并未改变原形式背景中隐含的知识，反而使得原形式背景在属性和属性区间值两个方面得到简化，从而使区间值决策形式背景的知识获取变得简单。

设 (U,A,F,C,G) 是区间值决策形式背景，当 $A=C,F=G$ 时，此背景是一般的区间值形式背景，即区间值形式背景是本文的一个特例。

结束语　通常对属性值是区间数的形式背景处理是先将其转化为经典的形式背景，然后挖掘其中的知识，这样容易丢失数据的有效性。本文定义了区间值决策形式背景，通过讨论条件形式背景与决策形式背景概念格之间的关系，研究了区间值决策形式背景的协调性，进一步研究了区间值决策形式背景的属性值向量约简，使得原背景从属性和属性区间值两个方面得到简化。

参 考 文 献

[1] Wille R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts[M]. Rival, Ordered sets. Reidel, Dordrecht-Boston, 1982: 445-470

[2] Ganter B, Wille R. Formal Concept Analysis[M]. Berlin: Mathematical Foundations Springer, 1999

[3] Gely A, Medina R, Nourine L. Representing lattices using many-valued relations[J]. Information Sciences, 2009, 179: 2729-2739

[4] Boucher-Ruan P, Bridge D. Collaborative Recommending Using Formal Concept Analysis[J]. Knowledge-Based System, 2006, 19(5): 309-315

[5] 吴江，黄登仁. 区间数排列方法研究综述[J]. 系统工程，2004，22：1-4

[6] 李大东. 区间数的排序和它的一些运用[D]. 成都：西南交通大学，2004

[7] Burusco A, Fuentes-Gonzalez R. The study of the interval-valued contexts[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 121: 439-452

[8] 周文. 区间形式概念分析[D]. 上海：上海大学，2007

[9] Moore R E, Biebaum F. Methods and Applications of Interval Analysis[M]. Philadelphial: Moore, 1979

[10] 吴克生，魏玲. 基于区间值形式背景的属性约简[C]//信息科学与技术中心论坛. 2010: 4978-4981

[11] Zhang W X, Wei L, Qi J J. Attribute Reduction Theory and Approach to Concept Lattice[J]. Science China, Series F: Information Sciences, 2005, 48(6): 713-726

[12] Wei L, Qi J J, Zhang W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science China Series F: Information Sciences, 2008, 51(7): 910-923

[13] 张文修，仇国芳. 基于粗糙集的不确定决策[M]. 北京：清华大学出版社，2006：202-213

[14] 张文修，梁怡，吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京：科学出版社，2003：22-47