

不确定旅行商问题的鲁棒模型及其算法研究

柯良军 尚 可 冯祖仁

(西安交通大学机械制造与系统工程国家重点实验室 西安 710049)

摘 要 旅行商问题是一类重要的组合优化问题。针对不确定旅行商问题,采用区间数来描述其城市间的旅行时间。在鲁棒优化理论框架下,建立其模型。该模型的突出特点是其鲁棒性可调。提出了一类求解该模型的精确算法和蚁群算法。与精确算法相比较,结果表明了所提出的蚁群算法能在较短时间内求得最优或近优的解。最后,分析了模型的性能,结论表明,在不确定环境下,鲁棒解是有效的。

关键词 旅行商问题,鲁棒优化,精确算法

中图分类号 TP301.6 **文献标识码** A

Robust Model and Algorithms for the Uncertain Traveling Salesman Problem

KE Liang-jun SHANG Ke FENG Zu-ren

(State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract Traveling salesman problem is an important combinatorial optimization problem. The uncertain traveling salesman problem was considered. For each edge, an interval data was used to describe the uncertain travel time. In the framework of robust optimization, a model was developed. The prominent feature of this model is that the degree of conservativeness is adjustable. An exact algorithm and an ant colony optimization approach were proposed to deal with this model. Compared with the exact algorithm, the experimental results show that the proposed ant colony optimization approach can obtain optimal or near optimal solutions within very shorter time. Finally, the property of the model was studied. The results support that the robust solution is useful in the uncertain environment.

Keywords Traveling salesman problem, Robust optimization, Exact algorithm

1 引言

旅行商问题是一类经典的组合优化问题^[1]。它有许多表述形式,一般地,该问题是指在给定一组城市两两间旅行时间的情况下,寻找一条旅行时间最少的从起点出发,经过所有城市一次,最终回到起点的路径。这一问题固然能用来建模许多实际问题,但是在实际情况下,由于受到交通状况、天气等不确定因素的影响,城市间的旅行时间往往是不确定的。因此,有必要研究不确定旅行商问题。区间数是一种描述不确定数据的有效形式,它对数据的分布信息不需要过多地假设^[2]。本文采用区间数来刻画城市间的旅行时间,并研究这类旅行商问题的模型及其算法。

解决不确定优化问题主要有随机优化、模糊优化和鲁棒优化等理论与方法^[3-7]。其中,鲁棒优化有其突出的优势。它与随机优化和模糊优化不同,鲁棒优化对问题变量分布信息不做过多假设,而且模型简单、易于求解^[7],能较好地平衡优性与可靠性。随着 Ben-Tal 和 Nemirovski^[3-5]、El-Ghaoui^[6]以及 Bertsimas^[7]等人的开拓性研究,鲁棒优化理论与方法得到了长足发展。最近,文献^[1]在鲁棒优化框架下,基于最小变差准则,研究了不确定环境下的旅行商问题。不过,文献^[1]中的模型过于保守。为此,本文首先提出一类鲁棒性可调

的模型。

众所周知,确定性旅行商问题是一类 NP-hard 问题。可喜的是, Cook 及其合作者^[8]已经提出了高效的精确算法 Concorde,其能用于求解达到上万维的旅行商问题(即上万个城市的旅行商问题)。本文在 Concorde 算法的基础上,提出求解鲁棒模型的确定性算法,但是,实验表明,即使求解 100 维问题也需要大量的时间,因此,在一定程度上限制了该算法的应用范围。

基于以上考虑,本文还提出一类启发式算法。蚁群算法(ant colony optimization)^[9-11]通过模拟真实世界中蚁群的觅食行为,利用问题启发信息和信息素来指导搜索,是一类有效求解确定性旅行商问题等优化问题的智能优化算法。受此启发,建立一类求解鲁棒旅行商问题的蚁群算法。

本文的主要目的在于,在建立不确定旅行商问题的鲁棒模型的基础上,提出求解该模型的精确算法和蚁群算法,实验分析算法的性能,及所建立模型的性能。

2 问题描述

旅行商问题可以描述为一个图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{1, \dots, n\}$ 是顶点集,代表要访问的城市; $E = \{(i, j) \mid i, j \in V\}$ 是图形的边集。

本文受国家自然科学基金项目(60905044),教育部博士点基金项目(20090201120042)资助。

柯良军(1976-),男,博士,主要研究方向为优化理论及其应用、模式识别, E-mail: kelj163@163.com。

旅行商问题的优化目标为:给定 n 个城市和两两城市之间的旅行时间,要求确定一条旅行时间最少的哈密尔顿回路,即遍历所有城市仅一次的最优回路。在下文中,称遍历所有城市仅一次的回路为可行路径,旅行时间最小回路为最优解。

令 $w=(i-1)n+j(1 \leq i, j \leq n)$, 采用以下记号:

1) c_w : 点 i 和点 j 之间的旅行时间;

2) x_w : 如果经过边 (i, j) , 则 $x_w=1$, 否则 $x_w=0$ 。则旅行商问题的解 x 可表示为一个具有 n^2 个分量的向量 $(x_w)_{1 \leq w \leq n^2}$, 其中 $x_w \in \{0, 1\}$, $\sum_{w \in \{v \mid \text{mod}(v, n)=j\}} x_w = 1$, $\sum_{w \in \{v \mid \text{mod}(v-j, n)=0\}} x_w = 1$ 。后面两个等式表明, 每个点只能经历一次。记所有解的集合为 X 。

基于以上记号, 旅行商问题的数学模型为:

$$\min \sum_{w=1}^{n^2} c_w x_w \quad (1)$$

$$\text{s. t. } x=(x_w)_{1 \leq w \leq n^2} \in X$$

在不确定旅行商问题中, 将旅行时间用区间数 $\tilde{c}_w = [c_w - d_w, c_w + d_w]$ 来刻画, 其中 $d_w \geq 0$, 不失一般性, 假设 d_w 随着 w 增加而递减, 且当 $w=(i-1)n+i(1 \leq i \leq n)$ 时, $\tilde{c}_w=0$ 。利用文献[7]中的鲁棒准则, 记所建立模型的目标函数为:

$$R(x) = \sum_{w=1}^{n^2} (c_w - d_w) x_w + \max_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, n^2\}, |S| \leq \Gamma}} \sum_{w \in S} 2d_w x_w \quad (2)$$

相应地, 不确定旅行商问题的鲁棒模型如下:

$$\min R(x) \quad (3)$$

$$\text{s. t. } x=(x_w)_{1 \leq w \leq n^2} \in X$$

式中, $\Gamma(0 \leq \Gamma \leq n^2)$ 是一个参数, 它是取值范围在 0 到 n^2 之间的自然数, 反映了决策者的风险偏好等信息。如果 Γ 取值为 0, 则只考虑旅行时间最好的情形, 此时, 模型对不确定信息最敏感, 换言之, 当旅行时间变化时, 模型对应的最优解可能变成次优解, 甚至解的质量变得不可接受。随着 Γ 增加, 旅行时间不断变大, 模型逐渐对不确定信息的敏感程度降低, 得到的解也具有一定的可靠性。当 Γ 为 n^2 时, 旅行时间为最大可能值, 此时所得出的模型最保守。

虽然鲁棒模型较为复杂, 但是, 一方面可以将其转化成一系列确定性旅行商问题; 另一方面, 也可以用蚁群算法来直接求解。下面两节将详细研究求解模型(3)的算法。

3 精确算法

记 $T(l)(l \in \{1, \dots, n^2+1\})$ 是下式给出的一组确定性旅行商问题:

$$T(l) = 2\Gamma d_l + \min \left(\sum_{w=1}^{n^2} (c_w - d_w) x_w + \sum_{w=1}^l 2(d_w - d_l) x_w \right)$$

$$\text{s. t. } x=(x_w)_{1 \leq w \leq n^2} \in X \quad (4)$$

利用 Concorde 算法来求解 $T(l)$, 可得到其最优解, 记最优解为 $s(l)$, 对应目标函数值为 $T^*(l)$ 。

假设 $\{T^*(l)\}_{l=1}^{n^2+1}$ 在 $l=l^*$ 时取得最小值, 则依据文献[7]的结论, 可得出如下推论:

模型(3)的最优解为 $s(l^*)$, 且该模型的最优目标函数值即为 $T^*(l^*)$ 。

4 蚁群算法

蚁群算法是一类迭代式启发算法。在每次迭代过程中,

每个蚂蚁依据一定规则构造一个解, 并利用局部搜索改进该解, 最后利用解更新信息素。其基本流程如下:

初始化参数, 启发信息 η 和信息素 τ

$s_{gb} \leftarrow \text{Null}$

While(停止条件不满足)

$s_{ib} \leftarrow \text{Null}$

For $i=1$ to n_a (n_a 为蚂蚁数目)

构造解 s_i

应用局部搜索改进 s_i

End for

$s_{ib} = \arg \min(R(s_1), R(s_2), \dots, R(s_{n_a}))$

If $R(s_{ib}) < R(s_{gb})$

$s_{gb} \leftarrow s_{ib}$

End if

更新信息素

End while

4.1 信息素和启发信息的定义

旅行商问题可以表示为一个图, 其顶点就是原问题的顶点。任意边 (i, j) 都赋有一定量的信息素, 用于表征从一个顶点转移到下一个顶点的偏好。

假定一条(未完成)路径的最后一个点是 i , 对于未被选取的点 j , 启发信息用来表征一种先验的偏好。由于旅行商的优化目标是确定一条旅行时间最少的哈密尔顿回路, 因此蚂蚁偏好于那些旅行时间更少的点。在边 (i, j) 的旅行时间是区间数时, 其启发信息定义为:

$$\eta(i, j) = \frac{1}{c_w + d_w} \quad (5)$$

4.2 解的构造

在构造解的过程中, 蚂蚁相当于一个具有简单智能的决策者。它依概率构造一条可行路径。具体而言, 假设在第 k 构造步, 蚂蚁所在点为 u , 它按照以下决策规则概率地选择一个点:

$$p(v_{k+1} = v \mid \tau, v_k = u) = \begin{cases} \frac{\tau(u, v)^\alpha \cdot \eta(u, v)^\beta}{\sum_{w \in C_u} \tau(u, w)^\alpha \cdot \eta(u, w)^\beta}, & v \in C_u \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \quad (6)$$

式中, C_u 是可选择点集, v_k 表示第 k 步选取的点。 α 和 β 是参数, 它们控制信息素和启发信息的相对重要性。

4.3 信息素的更新

在每只蚂蚁都构造了一个解之后, 借鉴最大最小蚂蚁系统^[11]给出的规则来更新信息素。假设边 (u, v) 在第 l 代时信息素为 $\tau(u, v)^l$, 则其更新为:

$$\tau(u, v)^{l+1} = \rho \tau(u, v)^l + \Delta \tau(u, v)$$

如果 $\tau(u, v)^{l+1} < \tau_{\min}$, 那么 $\tau(u, v)^{l+1} = \tau_{\min}$

如果 $\tau(u, v)^{l+1} > \tau_{\max}$, 那么 $\tau(u, v)^{l+1} = \tau_{\max}$

其中, $\rho(0 \leq \rho \leq 1)$ 是参数, 如果 (u, v) 在 l 代被最优蚂蚁经过, 则 $\Delta \tau(u, v)$ 等于 $1/R(s_l)$; 否则, $\Delta \tau(u, v) = 0$ 。最优解 s_b 按照一定规则选取为当前最优解 s_{gb} 或者本次迭代获得的最优解 s_b 。 τ_{\min} 和 τ_{\max} 分别是信息素上、下界。利用信息素上、下界可以有效避免停滞, 有助于算法探索新区域。它们分别为:

$$\tau_{\max} = \frac{R(s_{\phi})}{1-\rho}$$

$$\tau_{\min} = \epsilon \tau_{\max}$$

其中, ϵ 是参数 ($0 \leq \epsilon \leq 1$)。

4.4 局部搜索

为改善算法性能,将 2-opt 应用于每个蚂蚁构造的解。其主要步骤为:从一条可行路径中选择两条不相邻的边,将该可行路径分成两段路径,然后将这两段路径的起点和终点交叉,得到新的可行路径。如果新可行路径的目标函数值变小,则替换原有的可行路径。

5 实验结果

本节给出精确性算法和蚁群算法的实验结果并对其进行比较。5.1 节描述算例产生方法。5.2 节给出 3 个算例的实验结果。这两个算法都在 Pentium(R) 4 CPU 3GHz、2GB 内存的计算机上测试。蚁群算法对每个算例测试 20 次。

5.1 算例说明

为使精确算法在 2 个小时内得到最优解,在 TSPLIB 中的 3 个算例 *eil51(51)*、*berlin52(52)*、*st70(70)* 的基础上产生 3 个随机测试算例(其中括号中是城市数目)。在每个算例中, d_w 是 0 到 $0.5c_w$ 之间的一个随机数,任意两点间旅行时间精确到小数点后两位有效数字。

3 个算例分别记为 *eil51R*、*berlin52R* 和 *st70R*。

5.2 实验分析

5.2.1 蚁群算法参数的选择

基于统计实验结果,参数设置如下:蚂蚁数目为 25, $\alpha=1$, $\beta=2$, $\rho=0.95$, $\epsilon=0.01$ 。在前 25 代,本次迭代得到的最优解 s_{ϕ} 用于信息素更新;以后每隔 3 代,全局最优解 s_{ϕ} 用于信息素更新。算法最大迭代次数设为 1000。实验表明,算法在这些参数下能搜索到较好的解。

5.2.2 结果分析

表 1 给出了 $\Gamma=5$ 时的实验结果,包括精确算法求得的结果、计算时间以及蚁群算法所得结果的平均值、最好值和计算时间。表 2 给出了 $\Gamma=35$ 时的实验结果。

表 1 在 $\Gamma=5$ 时,精确算法和蚁群算法的实验结果

算例	精确算法		蚁群算法		
	最优值	时间(秒)	最优值	均值	时间(秒)
<i>eil51R</i>	363.49	1608	363.49	363.49	2
<i>berlin52R</i>	6956.72	1654	6956.72	6956.72	2
<i>st70R</i>	570.42	2287	570.42	571.55	4

表 2 在 $\Gamma=35$ 时,精确算法和蚁群算法的实验结果

算例	精确算法		蚁群算法		
	最优值	时间(秒)	最优值	均值	时间(秒)
<i>eil51R</i>	515.31	1608	515.31	515.31	2
<i>berlin52R</i>	9276.30	1654	9276.30	9276.30	2
<i>st70R</i>	774.60	2287	774.60	775.17	4

从表 1 和表 2 可以看出,在 *eil51R* 和 *berlin52R* 算例上,蚁群算法每次都得到最好值;而在 *st70R* 算例上,蚁群算法能得到最优解,平均值与最优值相差小于 0.2%。这表明所提出的蚁群算法能得到很好的解。在计算时间方面,精确算法消耗的时间远远大于蚁群算法所消耗的时间。以 *st70R* 为例,精确算法消耗的时间是蚁群算法所消耗时间的 570 倍。

实验结果表明,精确算法的优势在于能在两小时内求解这些问题的最优解,而蚁群算法的优势在于能在较短的时间内得到很好的解。

下面分析 Γ 取不同值时模型的性能。为此,按照如下方式构造 N 个确定性旅行商问题:每条边的旅行时间随机选为 $[c_w - d_w, c_w + d_w]$ 中的一个值。这样,就得到不确定旅行商问题在不同场景的确定性旅行商问题。然后,利用 Concorde 算法求解这些问题,比较鲁棒模型对应的最优解与不同场景真实最优解的差异。为此,采用下式定义的平均差异来分析模型性质。

$$\text{平均差异} = \sum_{i=1}^N \frac{R(\Gamma, i) - T(i)}{N}$$

其中 $R(\Gamma, i)$ 为鲁棒模型对应于第 i ($1 \leq i \leq N$) 个场景下的目标函数值, $T(i)$ 为第 i 个场景下确定性旅行商问题最优目标函数值。实验中 $N=1000$ 。

考虑算例 *eil51R*,由实验结果发现 Γ 在 53 到 2602 之间取值时,鲁棒模型(3)对应的解都相同。为此,仅考虑 Γ 取值在 0 到 53 范围之间的变化情形。图 1 给出了在不同 Γ 下的平均差异结果。

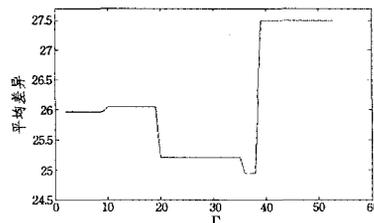


图 1 在算例 *eil51R* 上平均差异随 Γ 变化的实验结果

由图可见, Γ 取值较大(如 $\Gamma \geq 40$)或较小(如 $\Gamma \leq 5$)时,平均差异较大。这表明在随机场景下,鲁棒模型得到的解质量较差;而当 Γ 取值为 36 时,平均差异最小,模型对应的解最好(以平均差异为指标)。

图 2 给出了在 *Berlin52R* 上的实验结果。由图可见, Γ 取值较小(如 $\Gamma \leq 3$)时,平均差异较大,这表明在随机场景下,鲁棒模型得到的解质量较差;当 Γ 取值为 6 时,平均差异最小,模型对应的解最好(以平均差异为指标)。

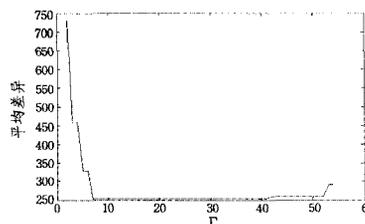


图 2 在算例 *berlin52R* 上平均差异随 Γ 变化的实验结果

图 3 给出了在 *st70R* 上的实验结果。在 Γ 取值为 2 时,平均差异最小。

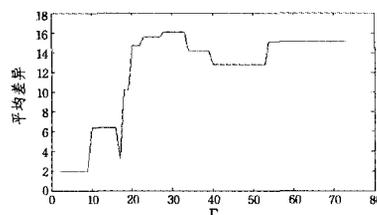


图 3 在算例 *st70R* 上平均差异随 Γ 变化的实验结果

可见,选取合适的 Γ 能使平均差异最小。由上图发现, Γ 取值不宜过大。

结束语 在建立不确定旅行商问题鲁棒模型的基础上,提出一类基于 Concorde 的精确性算法以及求解该问题的蚁群算法。实验表明, Concorde 消耗时间长,但是能找到最优解,而蚁群算法能在较短时间内找到高质量的解。最后,针对不同 Γ 值,分析了鲁棒模型对应的解与随机场景下最优解的差异。结果表明,在不确定环境下求解鲁棒模型均能得到具有很好性能的解。在后续的研究中,将进一步提高精确算法的计算效率,通过理论分析鲁棒模型对应解的质量,为选取 Γ 提供指导。

参 考 文 献

- [1] Montemanni R, Barta J, Mastrolilli M, et al. The robust traveling salesman problem with interval data[J]. Transportation Science, 2007, 41(3): 366-381
- [2] 张英俊, 马培军, 苏小红, 等. 属性权重不确定条件下的区间直觉模糊多属性决策[J]. 自动化学报, 2012, 38(2): 220-228
- [3] Ben-Tal A, Goryashko A, Guslitzer E, A Nemirovski. Adjustable robust solutions of uncertain linear programs[J]. Mathematical

- Programming, 2004, 99: 351-376
- [4] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust convex optimization [J]. Mathematics of Operations Research, 1998, 23(4): 769-805
- [5] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions to uncertain programs[J]. Operations Research Letters, 1999, 25: 1-13
- [6] El-Ghaoui L, Oustry F, Lebret H. Robust solutions to uncertain semidefinite programs[J]. SIAM Journal on Optimization, 1998, 9(1): 33-52
- [7] Bertsimas D, Sim M. The price of robustness[J]. Operations Research, 2004, 52(1): 35-53
- [8] Applegate D L, Bixby R E, Chvátal V, et al. The traveling salesman problem: A computational study[J]. Princeton University Press, 2006
- [9] Dorigo M, Gambardella L M. Ant colony system: A cooperative learning approach to the travelling salesman problem[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1997, 1(1): 53-66
- [10] Dorigo M, Stützle T. Ant colony optimization [M]. MA: MIT Press, 2004
- [11] Stützle T, Hoos H H. Max-min ant system[J]. Future Generation Computer Systems, 2000, 16: 889-914

(上接第 213 页)

结束语 物联网与云计算在军事上的应用目前尚处于起步阶段,标准、技术、运行模式以及配套机制等还远没有成熟。

首先是标准化问题。物联网是一个国家工程甚至是世界工程,需要标准化的数据库、标准化的软硬件和数据接口、互联互通的网络平台、统一的物体身份标识和编码系统,才能让遍布世界每个角落的物体接入网络,被世界识别、掌握和控制。各类协议标准如何统一则是一个十分漫长的过程,这正足限制物联网发展的关键因素之一。

其次是信息安全问题。在未来的物联网中,装备将随时随地地连接到网络上,并及时地被感知,在这种环境中如何确保信息安全,防止军事信息被窃取,将是物联网在军事领域推进过程中需要突破的重大障碍之一。物联网在很多场合都需要无线传输,而攻破任何无线系统是件轻而易举的事情,但目前类似“安全壳”(SecureShell)和“安全槽层”(SecureSocketLayer)的基础安全技术还在试验当中。黑客会利用射频识别技术来查询装备并获取数据,甚至了解到装备的具体位置。同时,物联网规模庞大,作为世界范围内军事要素智能互联的重要平台,一旦遭到破坏,对于视保密为生命的军队来讲,将是致命的打击,其不但会影响物联网本身的运行,而且会危及国家安全,甚至引发连锁反应,出现世界范围内的系统瘫痪,使军队陷入一片混乱。

最后还有资金和成本问题。实现物联网在军事领域的广泛应用,首先必须在相关装备上嵌入电子标签等存储体,并要安装多种读取设备和庞大的信息处理系统,这必将导致大量军费的投入。在成本尚未大幅降低和各方利益机制及运作模

式尚未成型的背景下,物联网的发展也受到一定的限制。

参 考 文 献

- [1] 王庆波,等. 虚拟化与云计算[M]. 北京:电子工业出版社, 2010
- [2] 陈全, 邓倩妮. 云计算及其关键技术[J]. 技术计算机应用, 2009, 9(9): 2562-2567
- [3] 陈康, 郑纬民. 云计算: 系统实例与研究现状[J]. 软件学报, 2009, 20(5): 1337-1348
- [4] 范杰, 彭舰, 黎红友. 基于蚁群算法的云计算需求弹性算法[J]. 计算机应用, 2011, 31(增刊 1): 1-3
- [5] 方国伟. 云计算环境下的应用架构设计[J]. 程序员, 2011(3): 109-112
- [6] 孙利民, 沈杰, 朱红松. 从云计算到海计算: 论物联网的体系结构[J]. 中兴通讯技术, 2011, 17(1): 3-7
- [7] Li Yan-xiao, et al. Research on Wireless Sensor Network Security[C]//International Conference on Computational Intelligence and Security. 2010
- [8] Li Yan-xiao, et al. Energy Efficient and Reliable Target Monitoring in the Tactical Battlefield[C]//International Conference on Electronic Commerce, Web Application and Communication. 2011
- [9] 王可, 叶旭鸣. 同一片“云”下的军需与民用[J]. 军民两用技术与产品, 2010(10): 3-5
- [10] 物联网. 云计算及智慧城市[EB/OL]. <http://www.foxitsoftware.com>.
- [11] Varia J. Cloud architectures-Amazon Web services [EB/OL]. <http://acmbangalore.org/events/monthly-talk/may-2008-cloud-architectures-amazon-web-services.html>, 2009-03-01