

# 一种基于多尺度几何分析下的图像去噪算法研究

王 梅 侯振杰 吕国玲 张建华

(内蒙古农业大学计算机与信息工程学院 呼和浩特 010020)

**摘 要** 图像的边缘和轮廓包含图像的重要特征信息,当图像中数据混有噪声的时候,对边缘的检测比较困难。在多尺度几何分析理论的基础上,提出了一种基于尺度因子与 Contourlet 变换的图像去噪算法。实验表明,该算法对高斯白噪声污染的图像去噪具有很好的效果,不仅可以提高处理图像的信噪比,图像的视觉效果也明显改善。

**关键词** 多尺度几何分析,Contourlet 变换,尺度因子,图像去噪

中图分类号 TP391 文献标识码 A

## Method for Image Denoising Based on Multiscale Geometric Analysis

WANG Mei HOU Zhen-jie LV Guo-ling ZHANG Jian-hua

(College of Computer and Information Engineering, Inner Mongolia Agricultural University, Hohhot 010020, China)

**Abstract** The edge and outline of image are very useful in the pattern recognition. But there are much difficulties if the signals are polluted by noise. We first introduced the multiscale geometric analysis theory, and then proposed a method for image denoising on scale factor and contourlet transform. Experiments show that the performance of the proposed method is obviously superior to other methods both in vision and in SNR.

**Keywords** Multiscale geometric analysis, Contourlet transform, Scale factor, Image denoising

### 1 引言

在过去的十几年中,小波变换在图像去噪领域得到了广泛的应用是由于其具有良好的空域和频域的局域性。随着应用的推广研究的深入,小波分析在高维情况下存在缺陷,在高维并不能充分利用数据结构本身的几何特征,不是最优的表示方式。如在二维图像中,由于边缘是主要特征,因此小波无法认识边缘的连续性。另外,由一维小波张量生成的可分离小波只能抓住有限的方向,但不能对含线或面奇异的高维函数“最优地”表示。发展多尺度几何分析(MGA)正是用来解决传统小波的这些不足,目前提出的多尺度几何分析方法主要有:Candes 于 1998 年提出的脊波(ridgelet)理论,后来 Candes 又提出了单尺度脊波变换<sup>[1]</sup>。1999 年,Candes 和 Donoho 提出由脊波理论衍生出 Curvelet 变换<sup>[2]</sup>;2002 年,Do 和 Vetterli 提出 Contourlet 变换<sup>[3]</sup>。人们还提出了其他许多具有很好的理论稀疏性的表示方法,如 bandelets、wedgelets 和 platelets 等<sup>[4,5]</sup>。

### 2 多尺度几何分析理论

在过去的十几年间,小波变换在图像压缩、估计和分割等应用中达到了很好的效果,虽然取得了极大成功,但小波变换在处理图像边界时却具有一定缺陷。一般情况下,一幅图像主要由被平滑轮廓线分割的平滑、各向同性区域组成。小波变换虽然可以成功捕捉信号的点奇异性,但对线奇异性则有点力不从心,甚至对图像中最简单的几何结构都不能很好地

捕捉。事实上,小波变换对逐段平滑图像并不是系数表示的,而是用很多小波基函数来精确构造一条边缘(如图 1(a)所示)。简单地说,小波变换对灰度正则性容易建模,但对几何正则性不能准确建模<sup>[6]</sup>。于是有两条方案选择:一条方案是研究更为复杂的小波模型,放弃树结构等模型的简单性和计算有效性,另一条则是研究可以用简单模型描述的新的表示方法。近年来,第二种方法成为研究计算调和和分析领域的热点,图 1(b)给出了我们所希望的变换形式,也即充分利用图像的几何正则性,基函数的支撑区间应该表现为“长方形”,以达到用最少的系数逼近奇异曲线的目的<sup>[7]</sup>。

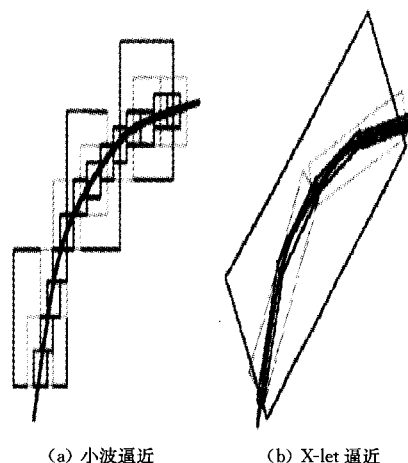


图 1 小波和多尺度几何分析逼近效果图

当前,提出的多尺度分析方法有:ridgelet、Curvelet、单尺

本文受国家自然科学基金项目(61063021)资助。

王 梅(1984-),女,硕士,主要研究方向为图形图像处理、机器视觉,E-mail:wangmei5156@163.com;侯振杰(1973-),男,教授,主要研究方向为图形图像处理、机器视觉。

度脊波变换、Contourlet、bandelet、wedgelet 和 platelet 等。发展多尺度几何分析的目的是检测、表示、处理某些高维空间数据,这些空间的主要特点是:其中数据的某些重要特征集中体现在其低维子集中(如曲线、面等)。例如,二维图像的主要特征可以由边缘所刻画;三维图像中的重要特征又体现为丝状物和管状物。在稀疏表示方面多尺度几何分析比小波分析有了很大提高,多尺度几何发展的目的和动力正是要发展一种新的函数表示方法,在高维情况下,其能充分利用函数自身的信息,对某些特定的函数类达到最优逼近。

### 3 基于多尺度分析的图像去噪算法

依据多尺度几何分析理论,本文提出了一种去噪算法。详细算法描述如下:首先,对图像进行多尺度 Contourlet 变换。Contourlet 变换是一种“真正的”图像二维表示方法,继承了 Curvelet 变换的各向异性的关系,也称之为塔式方向滤波器组(PDFB),Contourlet 基的支撑区间具有随着尺度的变化而长宽比变化的“长方形”结构。Contourlet 变换将多尺度分解和方向分解分开进行,先由 Laplacian 塔式变换(LP)实现多尺度分解,对图像进行多尺度分解来“捕获”点奇异,然后由方向滤波器(DFB)实现多方向分解,把分布在同方向上的点奇异合称为一个系数。由于两个步骤各自独立,因此可以在每层上实现不同方向的分解,变换的最终结果与用线段的基结构来逼近原图像相似。塔式方向滤波器组(PDFB)对图像进行多尺度分解,对低频成分进行下采样,对高频成分采用方向滤波器,如此迭代得到 Contourlet 变换,其不同尺度上有不同方向数目的分解。图 2 所示为塔型滤波器组及其频域剖分。在塔式结构的第  $j$  层,图像的 PDFB 分解总的效果相当于基函数具有以下支撑区间:

$$\begin{aligned} \text{width} &\approx 2^j \\ \text{length} &\approx 2^j \cdot 2^{j_0 - j/2} = 2^{j_0} 2^{j/2} \end{aligned} \quad (1)$$

即支撑区间类似于 Curvelet 变换的各向异性尺度关系。图 3 显示了满足各向异性尺度关系的 Contourlet 变换的一种尺度框架。

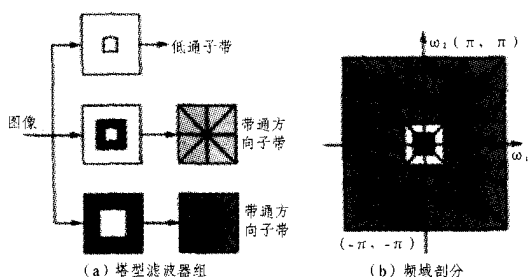


图 2 塔型滤波器组及其频域剖分

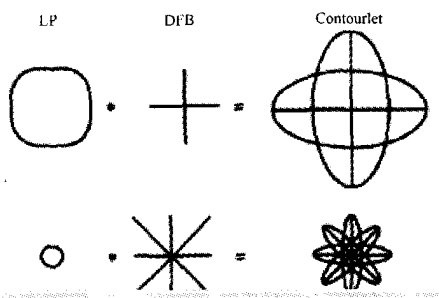


图 3 Contourlet 变换尺度关系

**定理 1** 设  $g \in W^s(\mathbb{R}^2)$ , 且  $f(x) = g(x)1_{x_2 \leq \Gamma(x_1)}$ , 其中曲线  $\Gamma$  二阶可导, 则 Contourlet 变换对于函数  $f$  的非线性逼近误差为<sup>[8]</sup>:

$$\epsilon_n[M] = \|f - f_M\|^2 \leq CM^{-2} (\log M)^3 \quad (2)$$

其次,是对多尺度 Contourlet 变换系数进行阈值操作。去噪的方法很多,阈值去噪<sup>[9]</sup>方法由于简单有效,因此应用十分广泛,在阈值去噪中,重要的是关于阈值的选取,阈值的选取对去噪效果有着重要的影响,文中阈值是由变换系数域的噪声标准差确定的,即

$$T = \sqrt{2\sigma^2 \log N} \quad (3)$$

式中,  $T$  为全局阈值,  $N$  为样本大小,  $\sigma^2$  是噪声方差。全局阈值不具有自适应性,另外在实际应用中高斯噪声标准差只能通过中值估计方法近似估计:

$$\sigma = \frac{\text{Median}(|w_{ij}|)}{0.6745} \quad (4)$$

式中,  $w_{ij}$  为 Contourlet 变换域欲处理的系数, 0.6745 为经验值。分解层数为 3 层, 每层方向数分解为 [0 4 5]。经过多次测试发现, Laplacian 塔式滤波器(LP)和方向滤波器(PFB)分别选择“db5”小波和“pkva”方向滤波器, “db5”小波是小波的一种, 不具有对称性, 没有明确的表达式; “pkva”是方向滤波器的一种。Po 研究了图像经 Contourlet 变换后系数间的关系<sup>[10]</sup>, Contourlet 变换系数间的分布与小波变换情形相似, 式(5)表示 Contourlet 变换后的当前层和父层间系数的关系<sup>[11]</sup>。

$$P(X) = \frac{3}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{\sqrt{3}}{\sigma_X} \sqrt{X_1^2 + X_2^2}\right] \quad (5)$$

式中,  $X_1, X_2$  分别为当前层和父层系数,  $\sigma_X$  为当前方差。

小波变换是正交的, 子带图像的噪声方差保持不变, 但是 Contourlet 变换不再是正交变换, 所以变换后子带图像的噪声方差不再等于图像噪声, 以矩阵  $F$  表示 Contourlet 变换对应的矩阵结构有<sup>[11]</sup>:

$$Fy = Fx + Fn \quad (6)$$

有结论:

$$Fn \sim N(0, FF^T) \quad (7)$$

本实验中用图片的高斯截断函数作为对比图。高斯曲面阈值方法是将高斯滤波后的图像作为阈值面对原图像进行分割的一种方法<sup>[12]</sup>, 其可以很好地抵制灰度不均和噪声对图像的影响。二维高斯截断函数为:

$$p(x, y) = Ae^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\sigma^2}}, y \leq ax + b \quad (8)$$

高斯函数的表面图

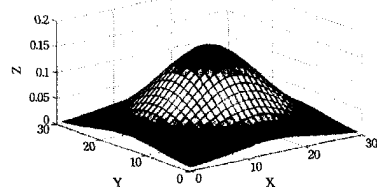


图 4 二维高斯函数的表面图

在概率中, 以此函数为基础的高斯分布形式为:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (9)$$

式中,  $x_0$  为均值,  $\sigma^2$  为方差, 它反映了高斯分布的离散程度,

就高斯曲线而言,象征着曲线的宽度。其曲面形状如图4所示,由于图像可以看作是一个离散的数据矩阵,因此对图像平滑通常都采用函数模板对图像进行卷积处理。

然后对处理后的阈值系数进行 Contourlet 的逆变换得到去噪后的图像。

#### 4 实验结果与讨论

在图像处理中,去噪的目标是最小化均方误差(MSE),通常利用归一化均方误差(MSE)和信噪比(SNR)作为去噪效果的评价指标。归一化均方误差定义公式如下:

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \| I(i,j) - K(i,j) \|^2 \quad (10)$$

式中,  $m, n$  为图像大小。

图像的信噪比公式如下:

$$SNR = 10 \times \log_{10}((2^n - 1)^2 / MSE) \quad (11)$$

式中,  $n$  为每个采样值的比特数。

本实验中用图片的高斯截断函数作为对比图,对高斯函数中尺度因子的改变不仅影响图像的大小而且影响去噪效果。在相同噪声的情况下,对高斯截断函数图的去噪效果更好,但是尺度因子必须在一定范围内,这种去噪才能保持一定的效果,如果尺度因子超出范围,这种去噪就会失去应有的效果。

采用大小为  $512 \times 512$  像素的灰度 lena 图像作为测试图,对图像加均值为零的不同强度(不同的标准差  $s$ ) 的白噪声 (NOISE)。在实验中分解层数均为 3 层,实验采用 SNR 作为客观评价指标。图 5 所示是标准差为 20 的去噪效果图,图 6 所示是标准差为 0.2 的高斯截断函数去噪图。表 1、表 2 所列是相应的数据。

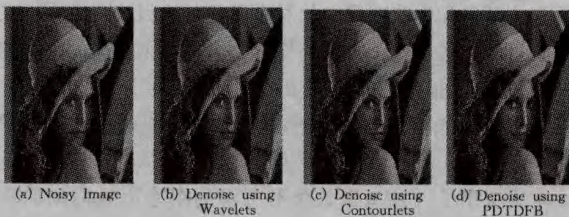


图 5 lena 图像的多尺度去噪效果图

表 1 3 种多尺度去噪方法的恢复图像 SNR 值(db)( $\sigma$  为标准差)

| $\sigma$ | noise | wavelets | contourlets | PDTDFB |
|----------|-------|----------|-------------|--------|
| 5        | 19.30 | 20.98    | 20.55       | 21.99  |
| 10       | 13.28 | 17.71    | 17.86       | 19.54  |
| 20       | 7.26  | 14.33    | 15.04       | 16.80  |
| 30       | 3.74  | 12.23    | 13.32       | 15.09  |

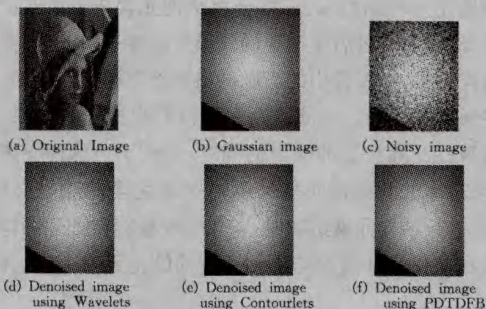


图 6 3 种多尺度去噪方法对高斯截断函数图像的去噪效果图

表 2 3 种多尺度去噪方法对高斯截断函数的恢复图像 SNR 值 (db)( $\sigma$  为标准差)

| $\sigma$ | noise | wavelets | contourlets | PDTDFB |
|----------|-------|----------|-------------|--------|
| 0.05     | 13.93 | 25.91    | 27.44       | 30.76  |
| 0.10     | 7.91  | 20.55    | 22.22       | 26.43  |
| 0.15     | 4.38  | 17.32    | 19.33       | 23.70  |
| 0.20     | 1.88  | 15.10    | 16.99       | 21.62  |

lena 图是纹理信息比较丰富的图像。从上面数据可以看出,在这种纹理信息比较丰富的图像去噪中,Contourlets、PDTDFB 与 wavelets 相比其 SNR 值得到了提高。

通过实验和数据可知,与灰度 lena 图像相比,对 lena 高斯截断函数图像的去噪效果更好,而且只需在很小的标准差的情况下,信噪比就有了明显提高。

**结束语** 本文研究了多尺度变换的一些性质以及多尺度变换对图像的去噪;在去噪中,将灰度图像转化为高斯截断函数图像。实验结果表明,对高斯截断函数的去噪不仅提高了 SNR 值,而且视觉效果更好,特别适用于处理纹理信息丰富的图像。

#### 参考文献

- [1] Candes E J. Monoscale Ridgelet for representation of images with edges[R]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 1999
- [2] Candes E J, Donoho D J. Curvelets[R]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 1999
- [3] Do M N, Vetterli M. Contourlets A directional Multiresolution image representation[A]// Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing[C]. Rochester, 2002, 1: 357-360
- [4] Pennec E L, Mallat S. Sparse geometric image representations with bandelets[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(14): 423-438
- [5] Romberg J, Wakin M, Baraniuk R. Multiscale wedgelet image analysis fast decomposition and modeling[A]// IEEE International Conference on Image Processing[C]. Rochester, 2002, 3: 585-588
- [6] Romberg J, Wakin M, Baraniuk R. Multiscale geometric image processing[A]// Processings of SPIE Conference on Visual Communications and Image Processing[C]. Lugano Switzerland, 2003, 5150: 1265-1272
- [7] Po D D-Y, Do M N. Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform[A]// IEEE Workshop on Statistical Signal Processing[C]. St Louis M O, USA, 2003: 262-265
- [8] Do M N, Vetterli M. Contourlets: a computational framework for directional multiresolution image representation[J]. IEEE Trans. on Image Proc. , 2003
- [9] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81(3): 425-455
- [10] Po D D Y, Do M N. Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform [J]. IEEE Transactions on Image Processing 2006, 15(6): 1610-1620
- [11] 程光权, 成礼智. 基于冗余 Contourlet 变换的图像相关法去噪[J]. 中国图象图形学报, 2008, 13(9): 1678-1682
- [12] 朱虹, 许朝晖, 周健. 基于 PCR 凝胶成像的信息自动提取[J]. 中国图象图形学报(A 版), 2002, 7(12): 1285-1290