

小数的最佳分数表示算法研究

薛丹 李顺东 杨宸

(陕西师范大学计算机科学学院 西安 710062)

摘要 在科学与工程计算中无理数的表示与运算是一个非常棘手的问题。如果能够用整数表示无理数,将给科学与工程计算带来极大的方便。要实现无理数的整数化表示,第一步要做的是实现无理数的有理化表示。利用连分数作为桥梁,首先将无理数转化为连分数,然后根据计算精度的要求生成最简分数表示,从而实现无理数的最佳有理逼近。最后给出了一些常用常数在不同计算精度要求下的最佳有理逼近,其对科学计算有一定的指导意义。

关键词 连分数,有理化,渐进分数,有理逼近,精确度

Research on Best Fraction of Decimal

XUE Dan LI Shun-dong YANG Chen

(School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract In scientific computing, irrational operation is considerably intractable. Transform irrational into integer will greatly convenient in scientific computing. To achieve integer representation to irrational, the first step is to achieve rational representation to irrational. We first transform irrational into continued fraction by utilizing continued fractions technique. Secondly, it is possible and reasonable to choose the most concise expression of the fraction according to the accuracy demand, so that we can achieve the rational approximation of irrational number. A list of the simplest form and the approximation error of some commonly used computing constants under various accuracy requirements is given, which has guiding significance for scientific computing.

Keywords Continued fraction, Rationalization, Progressive score, Rational approximation, Accuracy

1 引言

在计算机诞生之前,计算任务基本上都是依靠人脑借助于纸和笔,用手工方式进行的,在这样的计算环境中整数的运算和分数、小数的运算没有本质差别,其间的差别仅仅是分数当作除法运算,小数只考虑一个小数点。自计算机诞生以来,计算环境发生了根本的变化,所有的科学与工程计算不再由手工完成,而是改由计算机来完成。对于整数,只要将最高位设定为符号位,就可以借助自然数来表达所有整数,这使得计算机完成整数的表示与计算比完成实数的表示与计算有明显的优势^[1,2]。

在科学计算与工程计算中所遇到的数主要是有理数或者无理数(无限不循环小数),而无理数的表示与计算对于计算机来说都是非常棘手的问题。计算机的浮点数表示方法只能表示有限位的小数,所以无法直接表示一个完整的无理数^[3]。如何解决科学计算与工程计算中的无理数计算问题一直是困扰计算科学的一个重要理论问题。国家自然科学基金委员会已经连续6年将“实数的整数化表示理论与算法”列为“迫切需要从信息与数学两个领域的角度进行研究的交叉类项目”的第一位^[4-9]。

本文以连分数作为桥梁,分析了小数转化为最佳分数的一些算法。对于科学计算与工程计算中经常遇到的常数如

$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 和自然对数的底 e 等分析了各种有理逼近的理论误差和实际误差,给出了它们在不同计算精度要求下的最佳有理逼近。这对研究实数的整数化表示具有理论意义。

2 连分数与实数

连分数是无理数的一种表示方法。无理数的连分数表示是无限连分数,连分数可以根据精度要求方便地转化成分数,而且转化后的分数是最简分数。因此连分数成为研究无理数的一个重要工具^[10,11]。下面我们简要地回顾一下连分数及其基本性质。

2.1 连分数的概念

设 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 是实数,并且 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 大于零。形如

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

的表达式称为有限的连分数。由于连分数完全写出比较麻烦,因此通常人们更习惯用符号 $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ 来表示上述定义中的有限连分数^[12,13]。

设 $0 \leq k \leq n$, 那么有限连分数 $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ 称为原有限连分数的第 k 个渐进分数。当原连分数中 a_n 的 $n \rightarrow \infty$ 时,

我们把相应的表达式称为无限连分数,即表达式简记为 $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ 。同样地,对任意 $k \geq 0$,有限连分数称为是无限连分数的第 k 个渐进分数^[12]。

2.2 连分数的性质^[13, 14]

1. 有理数的连分数是有限简单连分数而且是唯一的。
2. 无理数的连分数是无限简单连分数而且是唯一的。

根据连分数的定义与性质可以看出运用连分数进行无理数有理化逼近的可行性。从连分数的表示方式可以看出其最大的优点就是通过在表达式的不同位置进行截断可以得到对应实数的各个渐进分数,这使得我们在实际应用中根据要求的精确度不同,可以比较方便地求出其对应的渐进分数。

2.3 最佳分数

一般意义上说,用有限连分数 $\langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle$ 来逼近原来的无理数,选择的 k 越大,逼近的性能越好,误差就越小。从这个意义上说不存在所谓的最佳逼近。但是 k 取得越大,相应的计算量就越大,计算复杂性就越高。实际的科学计算与工程计算对有理数的选择都不是越精确越好,而是在满足一定精度的前提下,计算量越小越好。因此我们所说的最佳分数是指满足计算精度要求的前提下 k 最小的连分数,一般意义上说,用有限连分数 $\langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle$ 所导出的最简分数就是无理数的最佳逼近分数。

2.4 小数转化成连分数

超越数都可以分解成一个整数和一个纯小数之和,在这里,我们只考虑大于0、小于1的纯小数,我们通过逐步逼近的数学思想使小数转化为分数。通过 format, setMaximumFractionDigits(50)来设定输入的小数的最大位数为50,那么系统会对显示的多余的小数位进行四舍五入。在这里,我们假定要找的分数与原小数误差小于 $d=0.001$ 。对任意的一个纯小数 c ,可以考虑以下步骤进行展开。

```
if (i<=1000)
    if(j<=1000)
        for(i=0;i<=1000;i++)
            for(j=0;j<=1000;j++)
                p1=(double)((a-j)/(b-i))
                p2=(double)((a-j)/(b-i-1))
                p3=(double)(c-p1)
                p4=(double)(p2-c)
                if(p1<=c&& p2>=c&& (p3<d || p4<d))
                    if(p3<p4)
                        count++
                        m=a-j
                        n=b-i
                        s[count]=p1
                    i++
```

在这个程序设计中,我们将小数转化为分数时,使用嵌入冒泡算法,其基本思想是:依次比较相邻的两个数,将较小的数放在前面,将较大的数放在后面。冒泡排序算法主要有以下两个优点:程序复杂度相对较低,代码容易写出;原序列中相同元素的相对顺序仍然保持到排序后的序列,具有稳定性。

2.5 连分数与渐进分数的误差^[14, 15]

下面主要关注的是无理数转换成连分数时,所对应的渐进连分数与无理数实际值的绝对误差:

设 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 是一个无限整数列, $a_j \geq 1, j \geq 1$ 。定义整

数列 h_n 与 k_n :

$$\begin{cases} h_{-2}=0, h_{-1}=1, k_{-2}=0, k_{-1}=1 \\ h_n=a_n h_{n-1} + h_{n-2}, k_n=a_n k_{n-1} + k_{n-2}, n \geq 0 \end{cases}$$

显然

$$h_0=a_0, h_1=a_1 a_0 + 1$$

$1=k_0 \leq a_1=k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots, k_n \rightarrow +\infty$ 。那么,有限简单连分 $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \rangle (n \geq 0)$ 的值是分数。

$r^{(n)} = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle = h_n / k_n, (h_n, k_n) = 1, n \geq 0$,由此可得有限简单连分数 $\langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle, \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-2} \rangle$ 与 $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$ 渐进分数的绝对误差为:

$$h_n k_{n-1} - h_{n-1} k_n = (-1)^{n+1}, n \geq 1$$

$$h_n k_{n-2} - h_{n-2} k_n = (-1)^{n+1} a_n, n \geq 0$$

$$r^n - r_{n-1} = (-1)^{n+1} (k_n k_{n-1})^{-1}, n \geq 1$$

$$r^n - r_{n-2} = (-1)^n a_n (k_n k_{n-2})^{-1}, n \geq 2$$

我们要解决的问题是给定一个无理数 A ,如何确定其渐进连分数 $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$,使得 $|A - \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle|$ 满足计算精度的要求。

3 转化结果

根据前面的分析,有理数的连分数是有限连分数,无理数的连分数是无限连分数,但是在实际应用中,当遇到无理数时,往往需要计算其最佳逼近近似值,也即将无理数转化为与之逼近的有理数^[16]。这一部分将给出一些常用物理常数的近似分数以及这些分数与实际物理常数的绝对误差,以便在科学计算中根据精度要求确定最佳的渐进分数。

3.1 圆周率 π

以圆周率 π 为例, $\pi=3.14159265358979323846264338327950288419716939937510\dots$,相对应的连分数为 $\langle 3, 7, 15, 1, 7, \dots \rangle$,当取 $n=1, 2, 3, 4, 5$ 时的渐进分数为:

$$3, 22/7, 333/106, 355/113, 2818/897, \dots$$

其中的 $333/106$ 就是通常所说的疏率,与 3.14159265358979323846 的绝对误差为 -8.32×10^{-5} ; $355/113$ 就是通常的密率,与 3.14159265358979323846 的绝对误差为 2.67×10^{-7} 。表1是圆周率 π 的各个渐进分数与误差的分析。

表1 圆周率 π 的误差分析

π 的渐进分数	绝对误差	实际误差	精确度
3	3/7	0.14159265.....	$14/10^2$
22/7	-1/742	0.00126449.....	$13/10^4$
333/106	1/11978	0.00008322.....	$8/10^5$
355/113	-1/101361	0.00000027.....	$3/10^7$

根据2.5节中连分数与渐进分数误差的计算公式,可以得到圆周率 π 相邻两个连分数的绝对误差值,计算结果如表1所列。

3.2 一些常数的近似分数与误差

通过上文的算法分析,列出一些计算领域中常用到的一些实数的渐进分数与精确度分析,如表2、表3所列。

表2 一些常用常数的连分数

圆周率 π	$\langle 3, 7, 15, 1, 7, \dots \rangle$	自然对数的底 e	$\langle 2, 1, 2, 1, 1, 4, \dots \rangle$
$\sqrt{2}$	$\langle 1, 2, 2, 2, 2, \dots \rangle$	$\sqrt{3}$	$\langle 1, 1, 2, 1, 2, 1, \dots \rangle$
万有引力常数 G	$\langle 6, 1, 2, 18, 2, 2 \rangle$	重力加速度 g	$\langle 9, 1, 4, 5, 1, 4, 2 \rangle$
普朗克常数 h	$\langle 6, 1, 1, 1, 2, 14, 4 \rangle$	基本电荷 e	$\langle 1, 1, 1, 1, 1, 17, 1 \rangle$

(下转第360页)

参考文献

- [1] 曹春杰,杨红娃,王巍. 针对IEEE 802.11 CSMA/CA的RTS-CTS攻击[J]. 通信对抗, 2009, 4(4): 32-35
- [2] Gupta V, Krishnamurthy S, Faloutsos M. Denial of service attacks at the MAC layer in wireless Ad Hoc networks[A]// MILCOM[C]. 2002, 2: 1118-1123
- [3] Zhou Y, Wu D, Nettles S M. On MAC layer denial of service attacks in IEEE 802.11 ad hoc networks: analysis and counter measures[J]. International Journal of Wireless and Mobile Computing, 2006, 1(3/4): 268-275
- [4] Gu Q, Liu P, Chu C H. Defense against packet injection attacks in unreliable Ad Hoc networks[A]// IEEE Global Telecommunications Conference[C]. 2005, 3
- [5] Ray S, Starobinski D. On false blocking in RTS/CTS based multihop wireless networks[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2007, 56(2): 849-862
- [6] Acharya, Thunte M D. Intelligent jamming attacks, counterattacks and(counter)2 attacks in 802.11b Wireless Networks[A]// OPNETWORK-2005 Conference[C]. 2005
- [7] 叶进, 李伶强. 基于保护流的MANET网MAC层DoS攻击及

防御[J]. 计算机科学, 2011, 38(4): 118-121

- [8] Karamad E, Ashtiani F. A modified 802.11-based MAC scheme to assure fair access for vehicle-to-roadside communications[J]. Computer Communications, 2008, 1: 2898-2906
- [9] Jian Y, Zhang M, Chen SG. Achieving MAC layer fairness in CSMA/CA networks[J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2011, 19(5): 1472-1484
- [10] Xu Kai-xin, Gerla M, Bae S. How effective is the IEEE 802.11 RTS/CTS handshake in Ad Hoc networks[A]// IEEE GLOBECOM[C]. 2002, 1: 72-76
- [11] Li Z F, Gupta A K, Nandi S. FMAC/CSR: a fair MAC protocol for wireless Ad-hoc networks[OL]. <http://www.ntu.edu.sg/home5/pg03802331/papers/fmaccsr%20final.pdf>
- [12] Heusse M, Rousseau F, Guillier R, et al. Idle sense: An optimal access method for high throughput and fairness in rate diverse wireless LANs[J]. ACM SIGCOMM, 2005, 35(4): 121-132
- [13] Grunenberger Y, Heusse M, Rousseau F, et al. Experience with an implementation of the idle sense wireless access method[A]// ACM CoNEXT[C]. 2007, 24
- [14] Tanenbaum A S. Computer networks[M]. Beijing: Prentice-Hall International, Inc., 1997

(上接第355页)

表3 一些常用常数的连分数的精确度分析

精度要求	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
π								
最佳逼近	3	$\frac{22}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{333}{106}$	$\frac{333}{106}$	$\frac{355}{113}$	$\frac{355}{113}$	$\frac{355}{113}$
e								
最佳逼近	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{106}{39}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{1264}{465}$	$\frac{2721}{1001}$	$\frac{2721}{1001}$
$\sqrt{2}$								
最佳逼近	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{1393}{985}$	$\frac{3363}{2378}$
$\sqrt{3}$								
最佳逼近	2	$\frac{7}{4}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{71}{41}$	$\frac{265}{153}$	$\frac{989}{571}$	$\frac{3691}{2131}$	$\frac{5042}{2911}$
普朗克常数								
最佳逼近	$\frac{13}{2}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{53}{8}$	$\frac{762}{115}$	$\frac{762}{115}$	$\frac{3101}{468}$	—	—
基本电荷								
最佳逼近	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{141}{88}$	$\frac{149}{93}$	$\frac{598}{367}$	—	—
万有引力常数								
最佳逼近	7	$\frac{367}{55}$	$\frac{367}{55}$	$\frac{367}{55}$	$\frac{754}{113}$	$\frac{1875}{281}$	—	—

注: 表3中的无理数都是通过保留小数点后50位来进行分析的, 其中物理领域中的万有引力常数 $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$, 重力加速度 $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$, 普朗克常数 $h = 6.6260755 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{S}$, 基本电荷 $e = 1.60217733 \times 10^{-19} \text{ C}$, 在分析中, 只考虑小数部分。因篇幅问题, 表中只分析每个实数的前几个渐近分数的精确度。

结束语 本文通过对小数有理化的整体研究与分析, 给出了一些常用的数学、物理与工程计算常数的连分数表示和各个渐进连分数的误差, 这样就可以根据计算精度的要求确定最佳渐进分数。我们将进一步研究如何在这些渐进分数表示的基础上设计一种分数的整数化表示的最终实现实数的整数化表示。

参考文献

- [1] Gianantonio P D. Real Number Computability and Domain Theo-

ry[J]. Information and computation, 1996(127): 11-25

- [2] Wiedmer E. Computing with infinite objects, Theoret[J]. Comput. Sci., 1980(10): 133-155
- [3] Wu Zheng-peng, Wang Da-yuan, Qiu Ro-bin, et al. Dynamic Simulation for Hotel Service Industry Based on Continued Fraction[C]// ICSSI. 2010
- [4] <http://www.nsfc.gov.cn/nsfc/cen/xmzn/2013xmzn/01/01sl/001.html>
- [5] <http://www.nsfc.gov.cn/nsfc/cen/xmzn/2012xmzn/01/06xx/001.html>, 2012
- [6] <http://www.nsfc.gov.cn/nsfc/cen/xmzn/2011xmzn/01/06xx/001.html>, 2011
- [7] <http://www.nsfc.gov.cn/nsfc/cen/xmzn/2010xmzn/01/06xx/001.html>, 2010
- [8] <http://www.nsfc.gov.cn/nsfc/cen/xmzn/2009xmzn/01/06xx/001.html>, 2009
- [9] <http://www.nsfc.gov.cn/nsfc/cen/xmzn/2008xmzn/01ms/06xx/001.html>, 2008
- [10] Rosen K H. 初等数论及其应用(第5版)[M]. 夏鸿刚, 译. 北京: 机械工业出版社, 2009
- [11] Strassen V. The computational complexity of continued fractions [C]// Proceeding SYMSAC '81 Proceedings of the fourth ACM symposium on Symbolic and algebraic computation. NY: ACM Press, 1981, 51-67
- [12] 王丹华, 杨海文, 刘咏梅. 初等数论[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2008
- [13] 潘承洞, 潘承彪. 简明数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2005
- [14] Silverman J H. 数论概论(第3版)[M]. 孙智伟, 吴克俭, 卢青林, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2008
- [15] 何光. 实数的连分数展开及程序设计[J]. 重庆文理学院学报, 2012, 1(31)
- [16] Vuillemin J. Exact Real Computer Arithmetic with Continued fractions[J]. IEEE Transaction on computers, 1990, 39(8): 1087-1105