

# 求解多目标优化问题的新遗传算法

韩丽霞

(中国矿业大学计算机学院 徐州 221116)

**摘要** 给出了求解多目标优化问题的一种新解法。定义了多目标优化问题的非劣方向,设计了方向杂交算子和简单的变异算子。标准算例的计算机仿真结果表明,新算法可以快速地找到一组范围广、分布均匀且数量充足的 Pareto 最优解。

**关键词** 多目标优化,遗传算法,Pareto 最优解,全局收敛

**中图分类号** TP391.9 **文献标识码** A

## Novel Genetic Algorithm for Multi-objective Optimization Problem

HAN Li-xia

(School of Computer Science and Technology, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

**Abstract** For multi-objective optimization problems(MOP), a new algorithm was proposed. The nondominated direction was firstly defined. Then, a new crossover operator and a mutation operator were presented based on the definition. Finally, the computer simulations on benchmark problems demonstrate that the proposed algorithm is effective and can find high quality solution set in terms of convergence, diversity, and the distribution of the obtained Pareto optimal solutions.

**Keywords** Multi-objective optimization, Genetic algorithm(GA), Pareto optimal solution, Global convergence

## 1 引言

在生产调度、人工智能、经济活动、城市运输、数据挖掘、网络通信等诸多优化领域,常常会遇到许多复杂的具有多目标属性的优化问题,将现实中这些具有多个目标的问题抽象成数学模型,就是多目标优化问题(Multi-objective Optimization Problem,简记为 MOP)<sup>[1-9]</sup>。通常情况下,多目标优化问题中待优化的各个目标之间不是独立存在的,它们往往耦合在一起且处于相互竞争的状态,一个目标的改善往往会导致其它目标的恶化,因此,多目标优化问题往往不存在一个能够使得多个目标同时达到最优的解,而只存在一个 Pareto 最优解集。同时,各目标之间的不可公度性也使得多目标优化问题的求解变得十分困难。

传统的多目标优化方法<sup>[1]</sup>是将各个子目标聚合成一个带正系数的单目标函数,然后利用数学规划工具求解转化后的单目标优化问题。同时,这些算法均是以单点搜索为特征的串行算法,一次运行只能得到一个解,无法利用 Pareto 最优概念对解进行评价。因此,为了获得 Pareto 最优解集,需要多次运行该算法。由于各次优化过程相互独立,往往得到的结果很不一致,令决策者很难有效地作出决策,并且运行的巨大时间开销也降低了求解问题的效率。

自 20 世纪 80 年代以来,仿生优化算法<sup>[4-9]</sup>不断涌现,如遗传算法、粒子群算法、蚁群算法等,它们的出现为那些传统的优化方法难以处理的复杂优化问题带来了新的契机和希望,成为一个引人注目的研究热点。Schaffer 于 1984 年提出

了基于向量评估的遗传算法<sup>[2]</sup>(VEGA),开创了用遗传算法处理多目标优化问题的先河。它把全部个体均分为若干子配对的库,并分配一个子目标函数,每个子库独立演化、混合,但是这种算法易产生个别子目标函数的极端最优解,使算法过早收敛;Horn 和 Nafoliotis 等于 1993 年提出了基于小生境技术的 Pareto 最优解遗传算法<sup>[3]</sup>(NPGA);Srinivas 于 1995 年将非支配排序的概念引入到多目标优化领域,提出了求解多目标优化问题的非支配排序遗传算法<sup>[4]</sup>(NSGA),取得了较好的效果,然而 NSGA 算法的计算复杂度较高,且缺乏精英策略,在处理高维、多模态等问题时,难以得到满意的结果。

遗传算法抽象于生物体的进化过程,可为群体中个体的遗传操作(杂交、变异、选择)实现遗传和选择机制,并建立一个迭代过程。它是对整个群体进行的遗传操作,而多目标优化问题的 Pareto 最优解一般是一个集合,因而采用遗传算法求解多目标优化问题具有天然的合理性,可以为决策者提供选择的良好依据。

鉴于传统优化算法迭代的思想,定义了多目标优化问题的非劣方向,并据此设计了方向杂交算子,以加快算法的收敛速度。用标准的 Benchmark 函数对算法的性能进行测试,并将结果与以往算法的结果进行比较,结果表明新算法是一种非常有竞争力的算法。

## 2 多目标优化问题基本概念

不失一般性地,考虑如下的无约束多目标优化问题(UMOP-unconstrained MOP):

本文受国家自然科学基金项目(60873099)资助。

韩丽霞(1980-),博士,讲师,主要研究方向为仿生优化算法、复杂性分析。

$$\min_{x \in D} f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \quad (1)$$

式中,  $x \in R^n$  为  $n$  维决策向量,  $D = [L, U] = \{x \in R^n \mid l_i \leq x_i \leq u_i, i=1, 2, \dots, n\}$  为目标函数的可行域,  $f_i(x) (i=1, 2, \dots, m)$  为多目标优化问题的第  $i$  个待优化的目标函数,  $f(x): R^n \rightarrow R^m$  是目标向量函数,  $m(m \geq 2)$  为待优化目标函数的数量。

**定义 1** 一个向量  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$  称为非劣于 (Dominates, 简记为  $<$ ) 另一个向量  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$ , 当且仅当对于  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , 都有  $u_i \leq v_i$ , 且至少存在一个指标  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  使得  $u_i < v_i$ , 记作  $u < v$ 。

**定义 2** 一个点  $x \in D$  称为多目标优化问题(1)的非劣解 (或 Pareto 最优解), 当且仅当不存在点  $y \in D$  使得  $f(y) < f(x)$ 。

**定义 3** 多目标优化问题(1)的所有 Pareto 最优解构成其在决策空间  $D$  上的 Pareto 最优解集, 记作  $p^{nuc}$ 。

**定义 4** 多目标优化问题(1)的所有 Pareto 最优解通过目标函数  $f(x)$  映射在目标空间  $R^m$  中的像构成其 Pareto 前沿面 (Pareto Front), 记作  $F^{nuc}$ 。

### 3 新的遗传算子

#### 3.1 非劣方向

**定义 5** 设  $D \subseteq R^n, x \in D, d \in R^n$  且  $d \neq 0$ , 若存在  $\delta > 0$ , 使得

$$x + \lambda d \in D, \forall \lambda \in (0, \delta)$$

则称  $d$  为集合  $D$  在点  $x$  处的可行方向。

**定义 6** 设  $h(x): R^n \rightarrow R$  的连续函数,  $x \in R^n, d$  是  $n$  维非零向量, 如果存在  $\delta > 0$ , 使得

$$h(x + \lambda d) < h(x), \forall \lambda \in (0, \delta)$$

则称  $d$  为  $h(x)$  在  $x$  处的下降方向。

**定理 1** 设  $h(x): R^n \rightarrow R$  的连续函数,  $x \in R^n$ , 且  $h(x)$  在点  $x$  处可微, 如果存在非零向量  $d \in R^n$ , 使得  $-\nabla h(x)^T d > 0$ , 则  $d$  是  $h(x)$  在  $x$  处的下降方向; 而当  $-\nabla h(x)^T d < 0$  时, 则  $d$  是  $h(x)$  在  $x$  处的上升方向。

这个定理说明, 与  $h(x)$  在  $x$  处的负梯度方向交成锐角的任何方向都是  $h(x)$  在  $x$  处的下降方向; 相反, 与  $h(x)$  在  $x$  处的负梯度方向交成钝角的任何方向都是  $h(x)$  在  $x$  处的上升方向。

鉴于单目标优化问题的下降方向, 提出了多目标优化问题的非劣方向, 定义如下。

**定义 7** 设多目标优化问题(1)的目标函数  $f(x)$  是  $R^n$  上的连续函数,  $x \in D, d \in R^n$  且  $d \neq 0$ , 如果存在  $a > 0$ , 使得

$$f(x + ad) < f(x)$$

则称方向  $d$  为函数  $f(x)$  在点  $x$  处的非劣方向。

若方向  $d$  既是  $D$  在  $x$  处的可行方向, 又是多目标函数在  $x$  处的非劣方向, 则称  $d$  为  $f$  在  $x$  处关于  $D$  的可行非劣方向。由此可知, 沿着非劣可行方向  $d$ , 必然能找到一个点  $\bar{x} = x + ad \in D$ , 使得  $f(\bar{x}) < f(x)$ , 即沿着方向  $d$ , 能找到使某个或多个目标函数值  $f_i(x) (i \in \{1, 2, \dots, m\})$  下降的点。特殊地, 若多目标优化函数  $f(x)$  在点  $x$  处不存在非劣可行方向  $d$ , 则  $x$  是多目标优化问题(1)的 Pareto 最优解。

#### 3.2 方向杂交算子

基于非劣方向和定理 1, 提出了方向杂交算子, 以引导从个体有利的方向进行搜索。设  $x$  和  $y$  是参加杂交的两个父代个体, 杂交的步骤如下:

1) 若  $f(y) < f(x)$ , 则方向  $d = (y - x)$  为非劣方向;

2) 若满足  $f(x) < f(y)$ , 则方向  $d = -(y - x)$  为非劣方向;

3) 若父代个体  $x$  和  $y$  互不支配, 即  $f(x) < > f(y)$ , 则产生一个随机数  $r \in (0, 1)$ 。当  $r < 0.5$ , 令方向  $d = (y - x)$ ; 当  $r \geq 0.5$  时, 令  $d = -(y - x)$ ;

4) 随机产生  $s (s \geq 2)$  个可行方向  $d_1, d_2, \dots, d_s$ , 其中  $d_i (i = 1, 2, \dots, s)$  与方向  $d$  成锐角;

5) 沿着搜索方向  $d_1, d_2, \dots, d_s$  进行步长为  $R$  的线性搜索, 得到  $s$  个个体  $x^1, x^2, \dots, x^s$ , 基于 Pareto 解的概念从中选取最好的可行个体作为杂交的后代  $\bar{x}$ ; 若  $x^1, x^2, \dots, x^s$  均为不可行解, 令  $R = R/2$ , 转 5)。

交换  $x$  和  $y$  的位置, 产生另外一个杂交的后代个体  $\bar{y}$ 。图 1 给出了杂交算子的图示 (其中  $s = 5$ )。

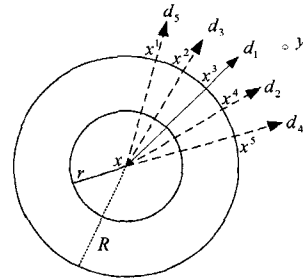


图 1 杂交算子示意图

#### 3.3 变异算子

设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  是参加变异的后代个体, 对其每个分量  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 随机产生一个随机数  $r \in (0, 1)$ , 则:

$$x'_i = \begin{cases} x_i - \lambda(x_i - l_i), & r < 0.5 \text{ 或 } x_i = u_i \\ x_i + \lambda(u_i - x_i), & r \geq 0.5 \text{ 或 } x_i = l_i \end{cases}$$

式中,  $\lambda \in (0, 1)$  为随机数。对每个分量个体  $x_i$  进行如上的操作, 得到的个体  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$  为变异产生的新的后代个体。

**算法 1** (NMOGA- Novel GA for Multi-objective Optimization Problem)

- Step1 (初始化) 给定合适的种群规模  $N$ , 杂交概率  $p_c$  和变异概率  $p_m$ , 最大进化代数  $T_{max}$ 。从可行域  $D$  中均匀产生  $N$  个个体作为初始种群  $X(0)$ , 同时将  $X(0)$  中的非劣解存入一个临时解集  $p^{(0)}$  中, 令进化代数  $t = 0$ ;
- Step2 (杂交) 以杂交概率  $p_c$  从种群  $X(t)$  中选择参加杂交的父代个体, 并将个体两两配对, 按照方向杂交算子进行杂交产生其后代, 由杂交产生的所有后代组成的集合记为  $O_1$ ;
- Step3 (变异) 以变异概率  $p_m$  从  $X(t)$  中选择参加变异的父代个体, 对被选出的每个个体  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 用变异算子产生变异后代  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$ 。这些后代的集合记为  $O_2$ ;
- Step4 (选择) 从  $X(t) \cup p^{(t)} \cup O_1 \cup O_2$  中选取非劣的个体替换  $p^{(t)}$  中的个体生成新的临时解集  $p^{(t+1)}$ , 从  $X(t) \cup p^{(t)} \cup O_1 \cup O_2$  随机选择  $N$  个个体作为下一代种群  $X(t+1)$ , 令  $t = t + 1$ ;
- Step5 (终止条件) 若达到最大进化代数  $T_{max}$ , 则算法停止, 输出  $p^{(t)}$ ; 否则, 转 Step2。

### 4 数值实验

为了验证 NMOGA 算法的有效性, 对文献[5]中 5 个常用的高维多目标测试函数  $T_1, T_2, T_3, T_4$  和  $T_6$  进行了仿真实验。

为了减少随机性对算法性能的影响, 对 5 个标准的测试

函数分别独立运行了 20 次,将本文算法(记为 NMOGA)和以往的 6 种算法(VEGA 算法<sup>[2]</sup>、NPGA 算法<sup>[3]</sup>、NSGA 算法<sup>[4]</sup>、FFGA 算法<sup>[5]</sup>、RAND 算法<sup>[5]</sup>、HLGA 算法<sup>[6]</sup>)所得结果(选自 <http://www.tik.ee.ethz.ch/~zitzler/testdata.html>)进行比较。图 2—图 6 给出了 7 种算法在一次运行后求得的 Pareto 最优解集在目标函数空间中的位置(Pareto front)。VEGA 算法、NPGA 算法、NSGA 算法、FFGA 算法、RAND 算法、HLGA 算法和 NMOGA 算法的结果分别用 +, ∇, □, \*, ☆, ×, ○ 表示。

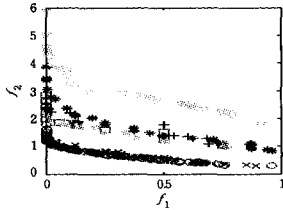


图 2 各种算法对  $T_1$  求得的 Pareto 前沿面

从图 2—图 6 可以直观地看出,算法 NMOGA 求得的 Pareto 前沿面位于其它 6 种算法的下方且分布比较均匀,说明 NMOGA 算法可以找到更好逼近真正 Pareto 前沿面且分布均匀的一组非劣解。NMOGA 算法对多目标优化问题的 5 个测试函数均表现出较好的求解性能,找到了较多的非劣解,其次是 FFGA 算法和 NSGA 算法,NPGA 算法的性能最差。对测试函数 UMOP4,除 NMOGA 算法外,其它 6 种算法得到的结果都不是很理想,因为该函数在搜索空间有  $21^9$  个不同的局部 Pareto 最优域,而只有一个全局 Pareto 最优域,算法很容易陷入不同的局部最优域,NMOGA 算法得到的结果能够较好地逼近真实的 Pareto 最优域,显示出算法的有效性,可以为决策者提供良好的优选方案。

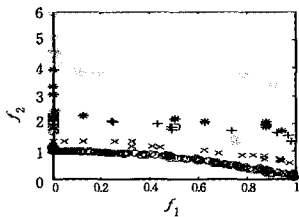


图 3 各种算法对  $T_2$  求得的 Pareto 前沿面

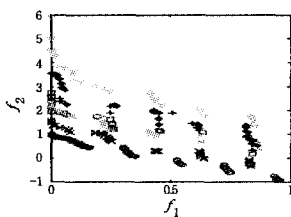


图 4 各种算法对  $T_3$  求得的 Pareto 前沿面

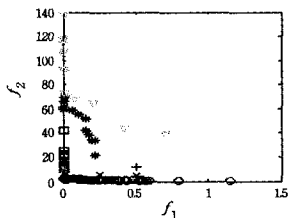


图 5 各种算法对  $T_4$  求得的 Pareto 前沿面

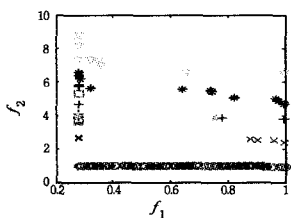


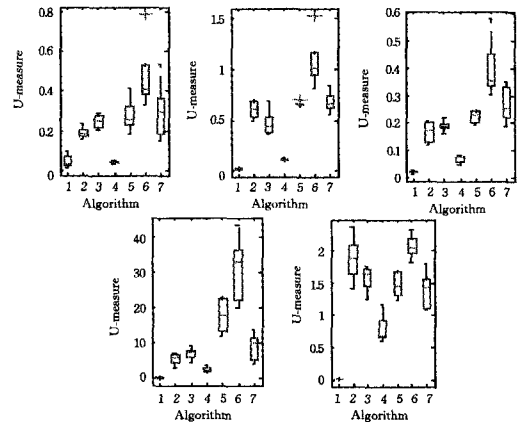
图 6 各种算法对  $T_5$  求得的 Pareto 前沿面

为了有效地验证算法的性能,引入多目标优化算法中常用的两个指标函数:C-measure<sup>[125]</sup>和 U-measure<sup>[12]</sup>。

C-measure 是 Deb 教授 1999 年提出的用于比较两种多目标优化算法求得的最优解集的优劣程度的一种度量方法。 $C(\psi, \varphi)$  的值越大越好,说明算法 A 比算法 B 更好。从图 2—图 6 可以直观地看出,本文 NMOGA 算法求得的 Pareto 最优解在目标空间中的 Pareto 前沿面完全覆盖 VEGA 算法、NPGA

算法、NSGA 算法、FFGA 算法、RAND 算法和 HLGA 算法的前沿面,即  $C(p^{NMOGA}, p^i) = 1$  (其中  $p^{NMOGA}$  为 NMOGA 算法求得的 Pareto 最优解集,  $p^i (i=1, 2, \dots, 6)$  分别为 VEGA 算法、NPGA 算法、NSGA 算法、FFGA 算法、RAND 算法和 HLGA 算法求得的 Pareto 最优解集)。这表明,本文算法 NMOGA 对不同的测试函数求得的 Pareto 最优解的质量比其它 6 种算法所得的结果好,能更好地逼近多目标优化问题的真正的 Pareto 前沿面。

U-measure<sup>[13]</sup> 是 2003 年提出的用于评价多目标优化算法求得的 Pareto 最优解在目标空间的分布均匀性和宽广性的一种度量方法。从图 7 统计的 U-measure 度量可以看出, NMOGA 算法对 5 个不同的测试函数求得的 Pareto 最优解的 U-measure 值比其它两种算法求得的结果小,这表明算法 NMOGA 对不同的函数求得的 Pareto 最优解在 Pareto 前沿面上的分布比其它 6 种算法所得的 Pareto 最优解分布更均匀、更宽广。



其中对第  $i (i=1, 2, \dots, 5)$  个图表示 7 种算法对第  $i$  个 UMOP 问题所得的 U-measure 值。

图 7 算法 VEGA 算法、NPGA 算法、NSGA 算法、FFGA 算法、RAND 算法、HLGA 算法和 NMOGA 所得的 U-measure 值

综合 C-measure 和 U-measure 的结果,不难发现, NMOGA 算法对不同的测试函数可以求得更逼近真正 Pareto 前沿面、分布更均匀、覆盖面积更宽广的一组 Pareto 最优解,是求解多目标优化问题的一种有竞争力的自然启发的优化算法

**结束语** 多目标优化问题各目标之间的竞争和不可公度性使得多目标优化问题的求解十分困难。基于 Pareto 的概念,提出了多目标优化问题的非劣可行方向,它可以保证沿着该非劣可行方向必然能找到比当前解不差的解。

### 参考文献

- [1] Fourman M P. Compactation of symbolic layout using Gas [C]// Proceeding of the First International Conference on Genetic Algorithms and Their Application. Lawrence Erlbaum, 1985; 141-153
- [2] Schaffer J D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms [C]// Proceeding of the First International Conference on Genetic Algorithms and Their Application. Lawrence Erlbaum, 1985; 93-100
- [3] Horn J, Nafpliotis N, Goldberg D E. A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization [C]// Proceeding of the ICEC International Conference. 1994; 82-87

(下转第 95 页)

$$-Au^i) - \frac{u^{k+1}}{\delta}$$

令

$$g^k = p^{k+1} + \frac{u^{k+1}}{\delta} = p^k - A^+(Au^k - g) - \frac{u^k}{\delta} = \sum_{i=0}^k A^+(g - Au^i), \forall k \quad (19)$$

则式(17)可以简化为

$$\begin{aligned} u^{k+1} &\leftarrow \operatorname{argmin}_{u \in R^n} \{ \mu J(u) - \langle p^k, u \rangle + \langle A^+(Au^k - g), u \rangle + \frac{1}{2\delta} \|u - u^k\|^2 \} \\ &\leftarrow \operatorname{argmin}_{u \in R^n} \{ \mu J(u) + \frac{1}{2\delta} \|u - \delta(p^k - A^+(Au^k - g)) + \frac{u^k}{\delta}\|^2 \} \\ &\leftarrow \operatorname{argmin}_{u \in R^n} \{ \mu J(u) + \frac{1}{2\delta} \|u - \delta g^k\|^2 \} \end{aligned} \quad (20)$$

针对  $J(u) = \|u\|_1$ , 式(20)的解为  $\delta T_\mu(g^k)$ , 因此由式(19)和式(20)可以获得下面的迭代公式即  $A^+$  线性 Bregman 迭代

$$\begin{cases} u^{k+1} \leftarrow \delta T_\mu(g^k) \\ g^{k+1} \leftarrow g^k + A^+(g - Au^{k+1}) \end{cases} \quad (21)$$

### 3.2 两种 $A^+$ 线性 Bregman 迭代的等价性

**定理 3** 对任意矩阵  $A$ , 求解问题式(3)的迭代式(9)等价于迭代式(21)。

证明: 首先由式(21)及  $u^0 = g^0 = 0$ , 我们有  $g^1 = g^0 + A^+(g - Au^0) = A^+g$ ,  $u^1 = \delta T_\mu(g^1)$ ;  $g^2 = g^1 + A^+(g - Au^1) = A^+(2g - Au^1)$ ,  $u^2 = \delta T_\mu(g^2)$ ;  $g^3 = g^2 + A^+(g - Au^2) = A^+(3g - Au^1 - Au^2)$ ,  $u^3 = \delta T_\mu(g^3)$ ;  $\dots$ ;  $g^{k+1} = g^k + A^+(g - Au^k) = A^+[(k+1)g - \sum_{i=1}^k Au^i]$ ,  $u^{k+1} = \delta T_\mu(g^{k+1})$ ;  $\dots$ 。

令  $v^{k+1} = (k+1)g - \sum_{i=1}^k Au^i$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ , 则  $g^{k+1} = A^+v^{k+1}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ , 因此  $v^{k+1} = (kg - \sum_{i=1}^{k-1} Au^i) + (g - Au^k) = v^k + (g - Au^k)$

$u^{k+1} = \delta T_\mu(A^+v^{k+1})$ , 即为式(9)。

另一方面, 在式(9)第一式的两端同乘以  $A^+$  得到  $A^+v^{k+1} = A^+v^k + A^+(g - Au^k)$

令  $A^+v^{k+1} = g^{k+1}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  即可得到式(21)。

**结束语** 本文提出一种求解非满秩稀疏最小二乘问题的新 Bregman 迭代正则化方法, 它可以用于非满秩稀疏信号重构问题的求解。它由于仅仅需要矩阵向量乘积和压缩算子的计算, 使得新的算法很容易实现。同时文中还给出了新方法 with  $A^+$  线性 Bregman 迭代的等价定理。

### 参考文献

- [1] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM J. Sci. Comput, 1998, 20: 33-61
- [2] Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, 52: 489-509
- [3] Donoho D L. Compressed Sensing[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, 52: 1289-1306
- [4] Hale E, Yin W, Zhang Y. A Fixed-Point Continuation Method for L1-Regularization with Application to Compressed Sensing[R]. CAAM Technical Report tr07-07. Rice University, Houston, TX, 2007
- [5] Yin W, Osher S, Goldfarb D, et al. Bregman iterative algorithms for  $\ell_1$ -Regularization with Application to Compressed Sensing[J]. SIAM J. Imaging Sciences, 2008, 1: 143-168
- [6] Cai J F, Chan R H, Shen Z. Linearized Bregman iterations for compressed sensing[J]. Math. Comp., 2009, 78(267): 1515-1536
- [7] Cai J F, Osher S, Shen S W. Linearized Bregman Iteration for Frame-Based Image Deblurring[J]. SIAM J. Imaging Sciences, 2009, 2(1): 226-252
- [8] 张慧, 成礼智.  $A^+$  线性 Bregman 迭代算法[J]. 计算数学, 2010, 32(1): 97-104
- [9] Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized inverses: Theory and Applications(2nd ed)[M]. New York, NY: Springer, 2003: 35-130
- [10] Osher S, Mao Y, Dong B, et al. Fast Linearized Bregman Iteration for Compressed Sensing and Sparse Denoising[R]. Report 08-37, UCLA. CAM, 2008: 1-18
- [11] Donoho D L. Denoising by softthresholding[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1995, 3: 613-627
- [9] Leung Y W, Wang Y P. A quality measure for multi-objective programming[J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics-Part A: Systems and Human, 2003, 33(2): 337-343
- [10] Van Veldhuizen D A. Multiobjective evolutionary algorithms: classification, analysis, and new innovations[M]. Doctoral Dissertation, Graduate School of Engineering of the Air Force Institute of Technology, WPAFB, OH, USA, August 1999: 22-24
- [11] 王宇平, 焦永昌, 张福顺. 解多目标优化的均匀正交遗传算法[J]. 系统工程学报, 2003, 18(6): 481-486
- [12] Deb K. Multi-objective genetic algorithms: Problem difficulties and construction of test problems[J]. Evolutionary Computation, 1999, 7(3): 205-230
- [13] Leung Y W, Wang Y P. A quality measure for multi-objective programming[J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics-Part A: System and Human, 2003, 33(2): 337-343

(上接第 66 页)

- [4] Srinivas N, Deb K. Multiobjective Function optimization using nondominated sorting genetic algorithm[J]. Evolutionary Computation, 1995, 2(2): 221-248
- [5] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results[J]. Evolutionary Computation, 2000, 8(2): 1-24
- [6] Hajela P, Lin C Y. Genetic search strategies in multicriterion optimal design[J]. Structure Optimization, 1992, 4: 99-107
- [7] Deb K. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197
- [8] Deb K. Multi-objective genetic algorithms: Problem difficulties and construction of test problems[J]. Evolutionary Computation, 1999, 7(3): 205-230