对称张量空间下高阶正则化的图像恢复模型

刘孝艳[1,2] 冯象初[2]
（西安石油大学理学院 西安 710065）[1] （西安电子科技大学理学院数学科学系 西安 710071）[2]

摘 要 为降低ROF模型的阶梯效应和高阶正则化方法对边缘的模糊，在对称张量空间中用二阶对称梯度构造正则项建立了新的图像去噪模型，并通过分析新模型的性质，给出了一种有效的原始-对偶算法。一方面，二阶对称梯度高于一阶导数的特性可以有效地降低阶梯效应；另一方面，二阶对称梯度模低于二阶导数模的特性能有效地保持图像的边缘等细节特征。数值仿真实验表明，新模型达到了理论分析的效果，新算法运算快捷、稳定。

关键词 图像恢复，张量空间，二阶对称梯度
中图法分类号 TN911 **文献标识码** A

High-order Regularization Model for Image Denoising in Symmetric Tensor Space

LIU Xiao-yan[1,2] FENG Xiang-chu[2]
(Department of Mathematics, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China)[1]
(Department of Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China)[2]

Abstract In order to integrative deal with staircasing effect of ROF model and over-smoothing of high-order regularization, a new model for image denoising was proposed by using second-order symmetric gradient to construct the regularization term in the symmetric tensor space. By analyzing the properties of new model, an efficient primal-dual algorithm is introduced. The new model can effectively reduce the staircase effect because the second-order symmetric gradient is higher than first derivative. Meanwhile, it can maintain the edge because the norm of second-order symmetric gradient is smaller than the norm of Hessian matrix. Both theoretical analysis and simulated results show that the new algorithm has a high converge speed and stability.

Keywords Image restoration, Tensor space, Second-order symmetric gradient

1 引言

图像去噪是图像处理中的基本问题之一，其目的就是从降质图像中恢复出原干净图，即求原图在某种最优意义下的估计值。一个好的去噪方法应该在去除噪声的同时能较好地保持图像的细节信息。传统的去噪方法，如中值滤波、高斯滤波等，主要是通过滤除图像的高频成分达到去除噪声的目的，因此，这些方法不可避免地会丢失图像的一些细节信息，使恢复图像的细节看起来比较模糊。

近年来，变分方法在数字图像处理中得到了广泛应用[1-11]，其中全变差模型(Rudin, Osher, Fatemi, ROF模型)[1]是比较典型的代表。目前，ROF模型因其具有良好的保边性能而备受关注，但是该模型在图像恢复过程中会出现阶梯效应。为此，Lysaker等人提出了利用二阶微分构造正则项[4](Lysaker, Lundervold, Tai, LLT模型)，有效地克服了阶梯效应。这是因为对于灰度渐变的区域，二阶微分不会把图像变成几个灰度值不同的色块，而是将它平滑成一个灰度渐变的区域，在这块区域内梯度恒定。但二阶微分会将图像的边缘变得模糊。为了发挥一、二阶微分各自的优点，学者们提出了一些混合模型[9-11]，但其计算量比较大。

张量是刻画图像局部或全局结构信息的有效工具[12]，本文将噪声图像放入0阶对称张量空间，利用二阶对称梯度构造正则项，建立了高阶正则化去噪模型。一方面，二阶对称梯度高于一阶导数，从而，新模型可以像LLT模型一样，有效地降低阶梯效应；另一方面，二阶对称梯度模低于二阶导数的模，正则性低于LLT模型，从而能有效地保持图像的边缘等细节特征。并且，在该模型中正则项只有二阶对称梯度一项，所以其计算量低于能达到类似效果的既含有一阶导数又含有二阶导数的混合模型[9-11]。另外，本文给出了新模型的原始-对偶算法，计算快捷。仿真试验结果表明，新模型在去噪过程中能有效地保护图像的边缘等细节特征，在视觉上达到了比较满意的效果。

2 相关工作

2.1 相关正则化模型

从数学的角度来讲，图像去噪是一个不适定的线性逆问题。其数学模型为

$$f=u+n \tag{1}$$

本文受国家自然科学基金(61271294,61105011,61101208)，西安石油大学青年创新基金资助。
刘孝艳(1978－)，女，博士生，讲师，主要研究方向为小波分析及变分、偏微分方程在图像处理中的应用，E-mail：liuxiaoyan@xsyu.edu.cn。

式中，f,u,n 分别为噪声图像、原图像和加性噪声。对于该不适定问题，一般可通过正则化方法来求解：

$$\min_u \frac{1}{2}\int_\Omega (u-f)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda R(u) \tag{2}$$

式中，λ 为正则化参数。式(2)的第一项为数据忠诚项，第二项为正则项。

ROF 模型[1]取式(2)的正则项 $R(u)$ 为

$$R_{TV}(u)=\int_\Omega |\nabla u|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

该正则项的引入，使 ROF 模型能有效地保护图像的边缘，但也因为该正则项的引入需要假设图像是由分片常数区域构成，使得式(2)的解亦为某个分片常函数，产生了阶梯效应。

为降低阶梯效应，学者们提出用高阶微分算子构造正则项的方法[2-9]，其中 LLT 模型应用最为广泛，该模型取式(2)中的正则项 $R(u)$ 为

$$R_H=\int_\Omega \phi(|\Delta u|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

其中 $\phi(|\Delta u|)$ 的取法有如下两种[4]：

$$\phi_1(|\Delta u|)=\sqrt{|u_{xx}|^2+|u_{yy}|^2} \tag{5}$$

$$\phi_2(|\Delta u|)=\phi_2(|\nabla^2 u|)=\sqrt{u_{xx}^2+u_{xy}^2+u_{yx}^2+u_{yy}^2} \tag{6}$$

式(6)具有旋转不变性，其对应了文献[3]提出的基于四阶偏微分方程的图像去噪方法。

以 LLT 模型为代表的高阶微分正则化模型[2-8]在降低 ROF 模型的阶梯效应方面取得了较好的效果。这是因为二阶微分比一阶微分更适合刻画图像的震荡性。并且对于灰度渐变的区域，二阶微分不会像一阶微分那样把图像变成几个灰度值不同的色块，而是将它平滑成一个灰度渐变的区域，在这块区域内梯度恒定，所以与 ROF 模型相比，LLT 模型具有更好的视觉效果。但该模型演化图像的边缘比 ROF 模型快，所以经常在图像的边缘处引起模糊现象。

2.2 张量空间及其运算

为了方便本文模型的建立，本节将张量空间的一些相关运算[12]作简单的介绍。

设 $\xi,\eta\in T^k(R^d)$（$T^k(R^d)$ 为 R^d 内的 k 阶张量空间），我们定义张量积、内积和对称化算子 s 分别为

$$\begin{aligned}\zeta&=(\xi\otimes\eta)(a_1,\cdots,a_{k+l})\\&=\xi(a_1,\cdots,a_k)\eta(a_{k+1},\cdots,a_{k+l})\end{aligned} \tag{7}$$

$$\xi\cdot\eta=\sum_{p\in\{1,\cdots,d\}^k}\xi(e_{p_1},\cdots,e_{p_k})\eta(e_{p_1},\cdots,e_{p_k}) \tag{8}$$

$$(s\xi)(a_1,\cdots,a_k)=\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}\xi(a_{\pi(1)},\cdots,a_{\pi(k)}) \tag{9}$$

式中，S_k 表示$\{1,\cdots,k\}$的置换群。

定理 1 k 阶张量 $\xi\in T^k(R^d)$ 的对称化是向 k 阶对称张量空间 $Sym^k(R^d)$ 做正交投影。

证明：设任意的 $\xi\in T^k(R^d)$，$\eta\in Sym^k(R^d)$，则有

$$\begin{aligned}s\xi\cdot\eta&=\frac{\sum_{\pi\in S_k}\sum_{p\in\{1,\cdots,d\}^k}\xi(e_{p_{\pi(1)}},\cdots,e_{p_{\pi(k)}})\eta(e_{p_1},\cdots,e_{p_k})}{k!}\\&=\frac{1}{k!}\sum_{p\in\{1,\cdots,d\}^k}\xi(e_{p_1},\cdots,e_{p_k})\sum_{\pi\in S_k}\eta(e_{p_{\pi(1)}},\cdots,e_{p_{\pi(k)}})\\&=\xi\cdot\eta\end{aligned}$$

即 $(\xi-s\xi)\cdot\eta=0$，所以，$\xi-s\xi\perp Sym^k(R^d)$。

定理 1 得证。

定义 1 设 $\xi\in Sym^{k+l}(R^d)$，则有 ξ 的 l 阶 F 导数为

$$\begin{aligned}&(\nabla^l\otimes\xi)(x)(a_1,\cdots,a_{k+l})\\&=(D^l\xi(x)(a_1,\cdots,a_l))(a_{l+1},\cdots,a_{k+l})\end{aligned} \tag{10}$$

并定义 ξ 的 l 阶对称化导数为：

$$\varepsilon^l(\xi)=s(\nabla^l\otimes\xi)=(s(\nabla\otimes))^l\xi \tag{11}$$

这里 $D^l\xi:\Omega\to\mathscr{L}^l(R^d,Sym^k(R^d))$ 表示 ξ 的 l 阶 F 微分，式(11)中第二个等式利用了定理 1。

3 本文模型及其算法

张量能有效地刻画图像局部和全局的结构信息，已广泛地应用于图像处理[13-15]。为此，本文在对称张量空间建立新的高阶正则化模型。

(1)模型建立

由前面的分析我们知道，LLT 模型采用式(6)，即 Hessian 矩阵的 F 范数作为正则项，相比于 ROF 模型，其能有效地抑制阶梯效应。但该模型会使图像的边缘变得模糊。为了能在降低阶梯效应的同时有效地保护边缘，本文将观测图像 u(标量函数)看成 0 阶对称张量，即 $u\in Sym^0(R^2)$，将 LLT 模型修改为

$$\min_{u\in W^{2,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega)}\frac{\lambda}{2}\|u-f\|_2^2+\alpha\int_\Omega|\varepsilon^2(u)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{12}$$

式中，λ 为正则化参数，$\alpha>0$，$\varepsilon^2(u)$ 为由定义 1 计算出的二阶对称化梯度，其表达式为

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(u)&=\varepsilon(\varepsilon(u))\overset{\omega=\varepsilon(u)}{=}\varepsilon(\omega)=\frac{\nabla\omega^{\mathrm{T}}+\nabla\omega}{2}\\&=\begin{pmatrix}u_{xx} & \frac{1}{2}(u_{xy}+u_{yx})\\ \frac{1}{2}(u_{xy}+u_{yx}) & u_{yy}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{13}$$

由定义 1 可知 $\varepsilon^2(u)$ 为二阶对称张量，其范数 $|\varepsilon^2(u)|$ 可由式(8)所定义的内积导出，表达式为

$$\begin{aligned}|\varepsilon^2(u)|&=\sqrt{\varepsilon^2(u)\cdot\varepsilon^2(u)}\\&=\sqrt{u_{xx}^2+0.5(u_{xy}+u_{yx})^2+u_{yy}^2}\end{aligned} \tag{14}$$

命题 1 设 $|\varepsilon^2(u)|$ 和 $|\nabla^2(u)|$ 分别为图像 u 的二阶对称化梯度和 Hessian 阵的 F 范数，则 $\int_\Omega|\varepsilon^2(u)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的正则性弱于 $\int_\Omega|\nabla^2(u)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

证明：由 $2u_{xy}u_{yx}\leqslant u_{xy}^2+u_{yx}^2$（只有当 $u_{xy}=u_{yx}$ 时，等号才成立），可得

$$\frac{1}{2}(u_{xy}+u_{yx})^2\leqslant u_{xy}^2+u_{yx}^2$$

于是有如下不等式成立：

$$\sqrt{u_{xx}^2+0.5(u_{xy}+u_{yx})^2+u_{yy}^2}\leqslant\sqrt{u_{xx}^2+u_{xy}^2+u_{yx}^2+u_{yy}^2}$$

故有不等式

$$\int_\Omega|\varepsilon^2(u)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\int_\Omega|\nabla^2(u)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{15}$$

成立，命题 1 得证。

实际上，图像函数并非连续函数，所以 $u_{xy}\neq u_{yx}$，从而式(15)的等号不成立，这也就意味着模型式(12)的正则性一定比 LLT 模型的弱，它不会像 LLT 模型一样模糊图像的边缘。并且，二阶对称张量具有旋转不变、主方向互相垂直等特性，能将图像的结构信息从噪声中区别出来加以保护。所以模型式(12)能在去噪的同时，有效地保留图像的边缘等细节信息。

其次，由式(13)的计算过程可知，$\varepsilon^2(u)$ 的元素为图像 u 的二阶微分，所以模型式(12)能像 LLT 模型一样降低 ROF 模型的阶梯效应。

另外，如前面所述，一些混合模型[9-11]也同时具备保护边缘和降低阶梯效应的优点，但计算量比模型(12)要大。如最近提出的 2 阶总广义变分模型(total generalized variation, TGV)[11]，表达式为

$$\min_{\substack{u\in BV(\Omega)\cap L^2(\Omega)\\ \omega\in BD(\Omega)}}\frac{\lambda}{2}\|u-f\|_2^2+\alpha_1\int_\Omega|\nabla u-\omega|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\alpha_0\int_\Omega|\varepsilon(\omega)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{16}$$

式中，$\omega=(\omega_1,\omega_2)^{\mathrm{T}}$ 属于向量域 $BD(\Omega)$。

模型(16)可以看成是对模型(12)的一种分裂，即

$$\min_{u\in W^{2,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega)}\frac{\lambda}{2}\|u-f\|_2^2+\alpha\int_\Omega|\varepsilon(w)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\text{s. t. } w=\varepsilon(u)$$

显然，这样得到的解是模型式(12)的一种松弛解。

总之，对于模型式(12)，一方面，二阶对称张量高于一阶导数的特性可以有效地降低阶梯效应；另一方面，二阶对称张量模低于二阶导数模的特性能有效地保持图像的边缘等细节特征，所以其能在保护边缘和降低阶梯效应两方面同时达到比较理想的状态。并且新模型没有添加额外的控制项，如一阶微分，从而计算量比目前流行的混合模型要小。本文第 4 节的实验结果也说明了新模型在噪声去除、边缘等细节保护方面都是有效的，并且收敛速度快。

(2)模型的原始-对偶算法

原始-对偶算法[16]是由 Chambolle 最近提出的一种非常有效的迭代算法，它不仅能够应对不同的问题，而且数值实现简单。为此，本文利用原始-对偶算法求解新模型。

设 $\varepsilon^2(u)=T(u)$，根据 Legendre-Fenchel 变换，可推得模型式(12)的对偶形式为

$$\min_{u\in W^{1,2}(\Omega)}\max_{q\in Q}\langle T(u),q\rangle+\frac{\lambda}{2}\|f-u\|_2^2 \tag{17}$$

式中，$Q=\{q=\begin{pmatrix}q_{11}&q_{12}\\q_{21}&q_{22}\end{pmatrix}\nabla\mid\|q\|_\infty\leqslant\alpha\}$。

由式(17)可得求解模型(12)的原始-对偶算法。

本文算法

初始化数据：

$\mathrm{u}^0=\mathrm{f},\bar{\mathrm{u}}^0=0,\mathrm{q}^0=0,\delta,\tau,\lambda,\alpha>0,\mathrm{k}=0.$

迭代求解：

$\mathrm{q}^{k+1}=\mathrm{proj}_Q(\mathrm{q}^k+\delta(\mathrm{T}(\bar{\mathrm{u}}^k)))$

$\mathrm{u}^{k+1}=(\mathrm{I}+\tau\partial\mathrm{G})^{-1}(\mathrm{u}^k-\tau\mathrm{T}^*(\mathrm{q}^{k+1}))$

$\quad=\dfrac{\mathrm{u}^k-\tau\mathrm{T}^*(\mathrm{q}^{k+1})+\tau\lambda\mathrm{f}}{1+\tau\lambda}$

$\bar{\mathrm{u}}^{k+1}=2\mathrm{u}^{k+1}-\mathrm{u}^k$

$\mathrm{k}\leftarrow\mathrm{k}+1$

这里 $\mathrm{q}^{k+1}=\mathrm{proj}_Q(\mathrm{q}^k+\delta\mathrm{T}(\bar{\mathrm{u}}^k))$

$$=\frac{\mathrm{q}^k+\delta\mathrm{T}(\bar{\mathrm{u}}^k)}{\max(1,\dfrac{|\mathrm{q}^k+\delta\mathrm{T}(\bar{\mathrm{u}}^k)|}{\alpha})}$$

4 数值实验及结果分析

本节对两幅加有均值为 0、方差为 20 的高斯白噪声的图像进行仿真实验。并将新算法与文献[4,11]的方法进行比较(其中文献[4]的正则项取为式(6))。本文将从视觉效果和定量指标两个方面对图像质量进行比较。采用的定量指标有信噪比(SNR)和结构相似性指标(SSIM)[17]，其定义分别为：

$$SNR=10\log_{10}\left[\frac{\int_\Omega(X-\bar{X})^2\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega(X-Y)^2\,\mathrm{d}x}\right]$$

$$SSIM(X,Y)=\frac{1}{\Omega}\sum_{(X_j,Y_j)\in\Omega}\frac{4\mu_{X_j}\mu_{Y_j}\sigma_{X_j,Y_j}}{(\mu_{X_j}^2+\mu_{Y_j}^2)(\sigma_{X_j}^2+\sigma_{Y_j}^2)}$$

式中，X,Y 分别为恢复图像和参考图像，$\bar{X}$ 为 X 的均值，μ_{X_j}，σ_{X_j}，σ_{X_j,Y_j} 分别为图像的第 j 个局部块的均值、方差和协方差。另外，实验中我们采用前后向差分格式进行数值离散。

实验 1　对细节丰富的 Lena 图进行实验。LLT 模型中的时间步长为 $\tau=0.125$，正则化参数 $\lambda=0.325$；2 阶 TGV 模型的最优参数为 $\tau=0.02,\delta=0.1,\alpha_1=5,\alpha_0=10,\lambda=0.2$；本文算法的最优参数为 $\tau=0.02,\alpha=10,\delta=1,\lambda=0.2$。图 1 (d)、(e)、(f)分别是 LLT 模型、2 阶 TGV 模型和本文模型恢复结果的部分截取放大图。可以看出本文方法与 LLT 模型相比可以在去除噪声的同时有效地保留了细节部分；与 2 阶 TGV 去噪模型基本相当，但本文方法恢复的图像在光滑区域没有出现亮点，使得在弱边界(如嘴唇)处看上去更光滑，更忠实于原图。

(a) 原图　(b) 噪声图

(c) 噪声图的部分截取图　(d) LLT模型

(e) 2阶TGV模型　(f) 本文模型

图 1　各种模型的去噪效果图效果对比图

实验 2　对有纹理结构的 Barbra 图进行实验。LLT 模型中时间步长为 $\tau=0.2$，正则化参数 $\lambda=0.02$；2 阶 TGV 模型的最优参数为 $\tau=0.02,\delta=0.1,\alpha_1=5,\alpha_0=10,\lambda=0.2$。本文模型的最优参数为 $\tau=0.02,\alpha=10,\delta=0.2,\lambda=0.5$。图 2(d)、(e)、(f)分别是 LLT 模型、TGV 模型和本文模型恢复的最优效果的部分截取放大图。可以看出图 2(d)的纹理和边界都变得模糊。图 2(e)的纹理较好，但眼周被模糊了，并且鼻梁处出现了分片现象。而在图 2(f)中眼周没有变模糊，鼻梁处没有出现分片现象，并且纹理保持得也较好。这说明本文模型能较好地保持纹理结构和图像的弱边缘信息。

(a) 原图　(b) 噪声图　(c) 噪声图的部分截取图　(d) LLT模型　(e) 2阶TGV模型　(f) 本文模型

图 2　各种模型的去噪效果对比图

表 1 为各种模型对 Lena、Barbara 图的 SNR、MSSIM 及 CPU 时间的比较结果。

表 1　实验 SNR、MSSIM 及 CPU 时间比较
(较好的结果用黑体标出)

实验图像	对比参数	实验模型		
		LLT 模型	2 阶 TGV 模型	本文模型
Lena (512×512)	SNR	16.22	16.52	**16.90**
	SSIM	0.825	0.842	**0.845**
	时间(s)	21.16	23.74	**14.93**
Barbara (512×512)	SNR	10.87	12.05	**12.38**
	SSIM	0.703	0.753	**0.763**
	时间(s)	30.79	24.39	**14.99**

结束语　本文利用对称张量场的优点，构造了新的高阶正则化图像恢复模型。新模型利用二阶对称梯度构造正则项。该正则项由于是由二阶微分算子构造，因此能像其它二阶正则化模型一样降低阶梯效应。同时，二阶对称梯度的 F 范数比 Hessian 阵的小，从而有效地保护了图像的边缘细节，使恢复出的图像在视觉上更忠实于原图。并且文中就新模型给出的原始-对偶算法，计算方便、快捷。

参 考 文 献

[1] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1-4): 259-268

[2] Chan T, Marquina A, Mulet P. High-order total variation-based image restoration[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2000, 22(2): 503-516

[3] You Y L, Kaveh M. Fourth-order partial differential equations for noise removal[J]. IEEE Transactions on image processing, 2000, 9(10): 1723-1730

[4] Lysaker M, Lundervold A, Tai X C. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time[J]. IEEE Transactions on image processing, 2003, 12(12): 1579-1590

[5] Lysaker M, Tai X C. Iterative image restoration combining total variation minimization and a second-order functional[J]. International Journal of Computer Vision, 2006, 66(1): 5-18

[6] Dogan Z, Lefkimmiatis S, Bourquard A, et al. A second-order extension of TV regularization for image deblurring[C]// IEEE 18th International Conference on Image Processing. 2011: 705-708

[7] Lefkimmiatis S, Bourquard A, Unser M. Hessian-Based Norm Regularization for Image restoration with Biomedical applications[J]. IEEE Transactions on image processing, 2012, 21(3): 983-995

[8] 李晓宁，龚家强，幸浩洋. 一种双正则项各向异性扩散的纹理去噪模型研究[J]. 计算机科学，2013，40(6)：295-299

[9] Bredies K, Kunisch K, Pock T. Total generalized variation[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2010, 3(3): 492-526

[10] 罗志宏，冯国灿. 一种新变分方法在图像分割中的应用[J]. 计算机科学，2011，38(12)：263-265，283

[11] Knoll F, Bredies K, Pock T, et al. Second order total generalized variation (TGV) for MRI[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2011, 65(2): 480-491

[12] Sharafutdinov V A. Integral geometry of tensor fields [M]. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1994: 81-93

[13] 宋伟杰，崔俊芝，叶正麟，等. 二阶对称张量场可视化的一种新模式[J]. 计算机工程与应用，2011，47(6)：1-4

[14] Zhang P, Liu F, Gao L, et al. Adaptive filtering for medical image based on tensor field[C]// International Conference on Computer Design and Applications (ICCDA). Qinhuangdao, 2010, 1: 25-27

[15] Chambolle A, Pock T. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2010, 40(1): 120-145

[16] Wang Zhou, Bovik A C. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transactions on image processing, 2004, 13(4): 1-14