

有限长度 LDPC 码一种速率兼容删余算法

牛和昊¹ 何元智²

(中国人民解放军理工大学通信工程学院 南京 210007)¹ (中国电子设备系统工程公司 北京 100141)²

摘要 提出一种 AWGN 信道下有限长度 RC-LDPC 码的删余算法,该算法对规则及非规则 LDPC 码均有效。该删余算法基于一系列准则,其中一个重要准则是某个候选删除节点的具有低的近似环外消息度(ACE)的短环的数量。仿真结果表明,ACE 对删余码的性能有很大的影响,该算法的性能比已有算法有进一步提高。

关键词 LDPC 码,速率兼容,Tanner 图,删余,有限长,近似环外消息度

中图分类号 TN911.22 **文献标识码** A

Rate-compatible Puncturing Algorithm for Finite-length LDPC Codes

NIU He-hao¹ HE Yuan-zhi²

(The College of Communication Engineering,PLA University of Science and Technology,Nanjing 210007,China)¹

(China Electronic Equipment Systems Engineering Company,Beijing 100141,China)²

Abstract This paper propose a rate-compatible puncturing scheme for finite-length low-density parity-check (LDPC) codes over the additive white Gaussian noise (AWGN) channel. The method can applicable to both regular and irregular LDPC code. The scheme selects bits to be punctured base on a sequence of criteria. An important selection criterion is the number of short cycles with low approximate cycle extrinsic message degree (ACE) in which a candidate bit node participates. Simulation results demonstrate that the ACE plays an important role in the performance of the codes, these results also show that the scheme is superior to the existing puncturing methods in a wide range of code rates.

Keywords Low-density parity-check (LDPC) codes, Rate-compatible, Tanner graph, Puncturing, Finite-length, Approximate cycle extrinsic message degree (ACE)

1 引言

无线通信信道通常具有时变特性,通信系统中纠错编码的码率应根据信道特性做灵活调整。速率兼容是一种有效的解决方案,该方式下收发端仅需一组编译码器便可实现全套码字的编译码,可降低系统的复杂度。低密度奇偶校验(low-density parity-check,LDPC)码在许多通信系统中得到了应用,速率兼容 LDPC(rate-compatible,RC-LDPC)码的研究和设计成为近年编码领域的热点问题。

文献[1]中,作者对 LDPC 码的速率兼容做了理论上的分析,用高斯近似估计法(Gaussian approximation,GA)推导出了删余度分布的密度进化公式。文献[2]中,作者提出了恢复树的概念,并给出了实现 RC-LDPC 码的通用算法,该算法可简称为分组和排序算法。文献[3-5]的方法与文献[2]的删余方法类似,可视为文献[2]中方法在某些条件下的改进。

本文提出一种新的删余算法,该算法对于规则及非规则 LDPC 码均适用。该删余算法基于一系列准则,其中一个重要准则是某个候选删除节点的具有低的近似环外消息度的短环的数量。本文第 2 节介绍 LDPC 码、Tanner 图及恢复树的概念;第 3 节解释算法的删余准则;第 4 节详细说明算法的执

行过程;第 5 节给出算法的仿真结果;最后是本文的结论。

2 LDPC 码、Tanner 图及恢复树

LDPC 码通常由其校验矩阵 H 定义, H 是 $M \times N$ 的稀疏矩阵, M 、 N 分别代表校验方程个数和码长度。校验矩阵可以用其二分图等效表示,该图也称作码字的 Tanner 图(Tanner Graph, TG),记作 $G=(V_b \cup V_c, E)$,其中 $V_b = \{v_1, \dots, v_n\}$ 及 $V_c = \{c_1, \dots, c_m\}$ 分别是变量节点和校验节点构成的集合, E 是边的集合,变量节点也称为比特节点。如果 $(v_j, c_i) \in E$,则节点 v_j 和 c_i 相连,所有和节点 w 相连的节点构成的集合称为 w 的邻居,记作 $N(w)$ 。两个变量节点如具有某个共同的相邻校验节点,则称为彼此的邻居。变量节点 v_j 的所有邻居变量节点构成的集合称为 v_j 的边界,定义为

$$B(v_j) = \{v: N(v) \cap N(v_j) \neq \emptyset\} \quad (1)$$

某个节点 w 的度数是该节点边的个数,记作 $d(w)$ 。对于 G 中的某个环 ξ ,近似环外消息度(approximate cycle extrinsic message degree, ACE) $ACE(\xi)$ 定义为

$$\sum_{v \in \xi} (d(v) - 2) \quad (2)$$

求和对象是 ξ 中的所有变量节点 v 。ACE 是一个环与图中其余部分连接程度的度量,可反映该环对迭代译码过程造

本文受国家自然科学基金重点项目(61231011)资助。

牛和昊(1988-),男,硕士生,主要研究方向为卫星通信、调制与编码,E-mail:zmjheniu@sina.com;何元智(1974-),女,博士,研究员,硕士生导师,主要研究方向为卫星通信。

成的影响, ACE 越小, 该环造成的伤害越大。

下面介绍恢复树。文献[2]中作者提出了某个比特节点 v 的恢复树 $T(v)$ 的概念, 此处简要叙述。考虑码母的 TG 中最浅的子图, 需满足下列条件: 1) 根节点为 v ; 2) 每个叶节点均为未删除的比特节点; 3) 该子图中每个校验节点的相邻比特节点均在该图中。恢复树是满足上述条件的子图中具有最小未删除节点数的子图。如果两个节点 w_1 和 w_2 通过 $T(v)$ 中的边相连接并且 w_1 距离 v 比 w_2 距离 v 近, 则称 w_1 是 w_2 的父节点, w_2 是 w_1 的子节点。如果树 $T(v)$ 的深度为 2, 即存在 v 的一个相邻校验节点, 其在 $T(v)$ 中的子节点均为非删除节点, 则 v 为 1 步可恢复 (one-step-recoverable, 1-SR) 节点。与此类似, 如果树 $T(v)$ 的深度为 $2m$, 则 v 为 m 步可恢复 (m -steps-recoverable, m -SR) 节点, 更详细分析见文献[2]。

3 我们的删余准则

文献[2-5]中的删余方法属于有意删余方法, 即基于一种算法选择要删除的比特, 有意删余的性能优于随机删余。文献[2]中的删余算法可描述为先删除尽可能多的 1-SR 节点, 然后删除尽可能多的 2-SR 节点, 以此增加。在给出我们的删余准则前, 需分析码母 TG 的某些特性, 这些特性与删余性能密切相关。

在删除过程的任何阶段, 我们用 P 表示 V_b 中的已删除子集, 用 $F(c)$ 表示与校验节点 c 相连的已删除的变量节点的数量, 记作 $F(c) = |\{v: v \in N(c) \cap P\}|$ 。

对于某个未删除的变量节点 v , 用 $H(v)$ 表示 v 的边界中的已删除节点的数量, 则 $H(v) = |B(v) \cap P|$ 。 $F(c)$ 的值越大, c 向其相连的变量节点提供可靠信息的机会越小。类似, $H(v)$ 的值越大, v 从其相连的校验节点中得到可靠信息的机会越小。

与比特节点的恢复树的定义类似, 此处定义校验节点 c 的恢复树 $T(c)$ 。码母的 TG 中的最浅的子图, 需满足下列条件: 1) 根节点为 c ; 2) 在叶子中含有未删除的变量节点; 3) 如果某个校验节点属于该子图, 则其所有变量节点的邻居也在该子图中, 图 1 是一例。下面的过程是修剪该子图的变量节点, 获得一个叶子数最少的 G 的子图, 便为 $T(c)$ 。图 2 演示了图 1 中子图的修剪过程, 共有两个步骤。第 1 步, 图中第 2 层与节点 v_3 和 v_5 相连的分支被剪除。第 2 步, 图中第 1 层与节点 v_2 相连的分支被剪除, 最终我们得到图 $T(c_1)$ 。

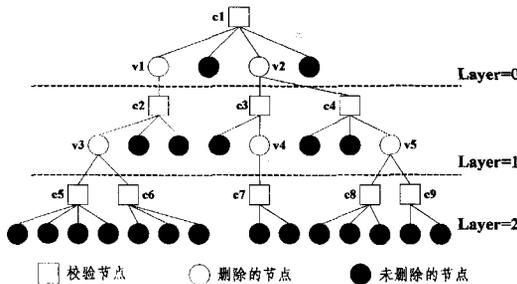


图 1 初始树的构建

我们用 $U(c)$ 表示 $T(c)$ 中未删除的变量节点数。如图 2 中的 $T(c_1)$ 其 $U(c_1) = 10$ 。 $U(c)$ 值越小, c 向其相连变量节点传递的消息的可靠性越高, 文献[2]推导了该问题的解析表达式, 此处不再赘述。我们用 $K(v)$ 表示变量节点 v 的所有相连校验节点 c 的 $T(c)$ 中未删除的变量节点数量的总和, 即

$$K(v) = \sum_{c \in N(v)} U(c) \quad (3)$$

$K(v)$ 的值越小, v 从其相连校验节点中得到的信息的可靠性越高。

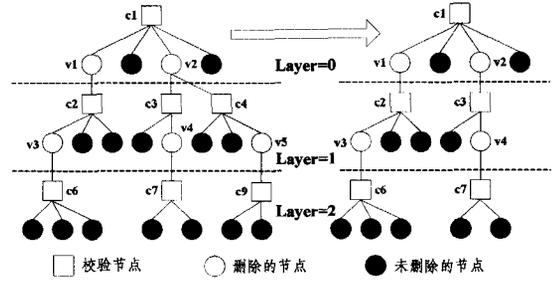


图 2 裁剪过程示意

短环会对 LDPC 码的迭代译码过程造成恶劣的影响, 因此删余中应尽量避免短环的出现。为了计算短环的影响, 我们提出变量节点 v 的 ACE 得分谱的概念。令 $C(l, \eta)$ 代表长度为 l 且 ACE 值为 η 的环的集合, $C_{ACE \leq \eta_{\max}}(l)$ 是满足 $\eta \leq \eta_{\max}$ 且长度为 l 的环的集合, $C_{ACE \leq \eta_{\max}}(l)$ 中包含变量节点 v 的环的个数称为变量节点 v 的 ACE 得分, 记作 $S_{\eta_{\max}}^v(l_{\max})$ 。

我们按照 l_{\max} 递增的顺序将 ACE 得分排列成 $\frac{l_{\max}}{2}$ 元组:

$$(S_{\eta_{\max}}^v(2), S_{\eta_{\max}}^v(4), \dots, S_{\eta_{\max}}^v(l_{\max})) \quad (4)$$

便得到变量节点 v 的 ACE 得分谱。ACE 得分谱在删余过程中有重要价值, 会影响删余码的性能, 下文还将做具体解释。

4 我们的删余算法

考虑一个码率 r_0 、码长 n_0 的 LDPC 码, 通过删除校验比特 V_b^c 获得一组 RC-LDPC 码, 码率满足 $r_m > \dots > r_1 > r_0$ 。为获得特定码率 r_k ($k=1, \dots, m$), 需删除的校验比特的数量为 $N_k = \lfloor n_0(r_k - r_0)/r_k \rfloor$ 。

我们的算法开始先删除 N_1 个校验比特, 获得码率 r_1 , 然后删除 $N_2 - N_1$ 个校验比特, 获得码率 r_2 , 直到获得 r_m 。该算法分为两个阶段进行。

第一阶段, 我们在所有具有最小 $F(c)$ 的校验节点中, 选择具有最小 $U(c)$ 的校验节点, 这些节点称作候选校验节点, 记作 CC 。所有未删除的并与 CC 相连的变量节点被选中, 称为候选变量节点, 记作 CV , 表达为如下集合:

$$CV = \{v: v \in N(c), \forall c \in CC\} \cap V_b^c \setminus P \quad (5)$$

第二阶段, 我们按照下列准则从 CV 中选择一个校验比特 v , 准则的优先级顺序如下: 1) 最小的 $H(v)$; 2) 最小的 $d(v)$; 3) 最小的 $K(v)$ 。如果具有相同的最小的 $H(v)$ 、 $d(v)$ 、 $K(v)$ 的 v 的数量大于 1, 我们则对每个 v 计算 $S_{\eta_{\max}}^v(l_{\max})$ 做进一步筛选。先选择有最小 $S_{\eta_{\max}}^v(4)$ 的 v , 如果数量大于 1, 我们选择有最小 $S_{\eta_{\max}}^v(6)$ 的 v , 以此类推。如果 ACE 得分谱全部计算完毕 v 的数量仍大于 1, 则随机选择一个。仿真结果表明, 为使 ACE 得分谱能准确反映删余性能需设置 $\eta_{\max} \leq 4$ 。算法的具体实现过程见下文, 其中 $C(r_k)$ ($k=0, \dots, m$) 代表码率为 r_k 的码字, UP_{set_k} 代表 $C(r_{k-1})$ 中未删除的校验比特的集合, P_k 代表从 $C(r_{k-1})$ 中获得 $C(r_k)$ 需删除的校验比特的数量。我们定义 $P_{set_k} = V_b^c \setminus UP_{set_k}$ 代表获得 $C(r_{k-1})$ 时所删除的校验比特的集合, 易知 $|P_{set_k}| = N_{k-1}$ 且 $P_k = N_k - N_{k-1}$ 。

算法的具体实现如下。

输入参数: 码字 $C(r_0)$ 的校验矩阵, 码率 r_1, \dots, r_m , 以及 η_{\max}, l_{\max} 。

- 1) 初始化, 设置 $k=1$ 。
- 2) 查找集合 $UPset_k$ 并且计算 P_k 。然后对所有的 $c \in V_c$, 计算 $F(c)$ 和 $U(c)$, 并且设置 $counter=0$ 。
- 3) 查找集合 $\Psi = \{c^* \in V_c; F(c^*) \leq F(c), \forall c \in V_c\}$, 然后查找集合 $CC = \{c^* \in \Psi; U(c^*) \leq U(c), \forall c \in \Psi\}$ 。
- 4) 查找集合 $CV = \{v; v \in N(c), \forall c \in CC\} \cap UPset_k$ 。
- 5) 查找集合 $\Gamma = \{v^* \in CV; H(v^*) \leq H(v), \forall v \in CV\}$, 如果 $|\Gamma|=1$ 则令 $v_p = \Gamma$, 并执行第 10) 步。
- 6) 查找集合 $\Delta = \{v^* \in \Gamma; d(v^*) \leq d(v), \forall v \in \Gamma\}$, 如果 $|\Delta|=1$ 则令 $v_p = \Delta$, 并执行第 10) 步。
- 7) 查找集合 $\Theta = \{v^* \in \Delta; K(v^*) \leq K(v), \forall v \in \Delta\}$, 如果 $|\Theta|=1$ 则令 $v_p = \Theta$, 并执行第 10) 步。
- 8) 令 $l=4$, 并且 $\Lambda = \Theta$;
 - A. 查找集合 $\Lambda = \{v^* \in \Lambda; S_{l_{max}}^*(l) \leq S_{l_{max}}^*(l), \forall v \in \Lambda\}$;
 - B. 如果 $|\Lambda|=1$ 则令 $v_p = \Lambda$, 并执行第 10) 步;
 - C. 如果 $l < l_{max}$ 则令 $l=l+2$, 并执行 8A) 步;
- 9) 在 Λ 中随机选择 v_p 。
- 10) 删除 v_p , $counter++$, 并且使 $UPset_k = UPset_k \setminus v_p$, $Pset_k = Pset_k \cup v_p$ 。
- 11) 如果 $counter < P_k$, 则对 $\forall c \in N(v_p)$ 设置 $F(c) = F(c) + 1$, 同样对 $\forall v \in B(v_p)$ 设置 $H(v) = H(v) + 1$ 并执行第 3) 步。否则, 如果 $k < m$, $k++$, 执行第 2) 步。
- 12) 结束。

5 仿真结果

本节给出算法性能的仿真结果, 仿真对象为码率 $r_0 = \frac{1}{2}$ 、 $n_0 = 1024$ 的规则及非规则 LDPC 码, 调制方式为二进制相移键控(binary phase shift keying, BPSK), 信道为加性高斯白噪声(additive white Gaussian noise, AWGN)信道。平均比特能量为 E_b , 噪声的单边功率谱密度为 N_0 。译码算法为置信传播(Belief propagation, BP)算法, 最大迭代次数 50, 比较对象为文献[2]的删余算法。

首先构造围长为 6 的(3, 6)规则 LDPC 码, 并用我们的算法获得码率为 0.6、0.7、0.8 的码。参数设置为 $l_{max} = 14$ 、 $\eta_{max} = 4$ 。此时对于 3 种码率, 通过计算 $H(v)$ 、 $d(v)$ 、 $K(v)$ 及 ACE 能确定的删除比特数量分别为(0, 0, 0, 170)、(2, 0, 6, 284)、(6, 0, 44, 334), 这表明了 ACE 得分谱在删余算法中的重要意义。该删余码的误帧率(frame error rate, FER)见图 3。对于所有码率, 我们算法的性能均优于文献[2]的算法。

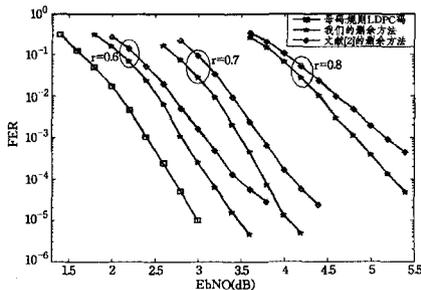


图 3 规则码的删余性能图

下面用渐进式边增长(progressive-edge-growth, PEG)算法构造非规则 LDPC 码, 我们用文献[3]中的最优度分布 $\lambda(x)$

$= 0.27236x + 0.23771x^2 + 0.07091x^3 + 0.41902x^9$, $\rho(x) = 0.66x^6 + 0.34x^7$ 进行构造, 该码的围长也为 6。参数设置为 $l_{max} = 22$ 、 $\eta_{max} = 2$ 。我们对母码进行删余获得码率为 0.6、0.7、0.8 的码, 此时 $H(v)$ 、 $d(v)$ 、 $K(v)$ 及 ACE 能确定的删除比特数分别为(0, 0, 1, 169)、(2, 1, 6, 283)、(2, 1, 28, 353), 再次证明了 ACE 得分谱的意义。该删余码的 FER 见图 4。与规则码相似, 我们算法的性能优于文献[2]的算法。

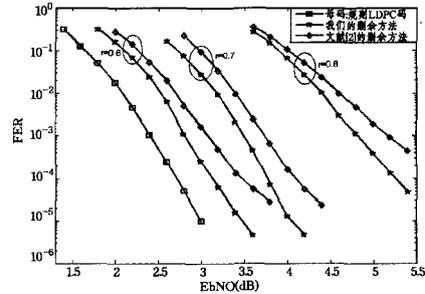


图 4 非规则码的删余性能图

结束语 RC-LDPC 码是近年编码领域的热点问题, 好的删余方法在工程应用中具有重要意义。本文提出一种 AWGN 信道条件下有限长度速率兼容 LDPC 码的删余方法, 该方法对规则及非规则 LDPC 码均有效。我们提出了 ACE 得分谱的概念, 并证明了 ACE 得分谱在删余中有重要的意义。仿真结果表明, 新算法在很宽的码率范围内均有良好的性能, 有很好的应用价值。

参考文献

- [1] Ha J, Kim J, McLaughlin S W. Rate-compatible puncturing of low-density parity-check codes [J]. IEEE Trans. Information Theory, 2004, 50(11): 2824-2836
- [2] Ha J, Kim J, Klinc D, et al. Rate-compatible punctured low-density parity-check codes with short block lengths [J]. IEEE Trans. Information Theory, 2006, 52(2): 728-738
- [3] Park H Y, Kim K S, Whang K C. Efficient puncturing method for rate-compatible low-density parity-check codes [J]. IEEE Trans. Wireless Comm, 2007, 6(11): 3914-3919
- [4] Vellambi B N, Fekri F. Finite length rate-compatible LDPC codes: a novel puncturing scheme [J]. IEEE Trans. Comm, 2009, 57(2): 297-301
- [5] El-khany M, Hou J, Bhushan N. Design of rate-compatible punctured LDPC codes for hybrid ARQ applications [J]. IEEE J. Sel. Areas Comm, 2009, 6(10): 965-973
- [6] Saeedi H, Banihashemi A H. Successive maximization for the systematic design of universally capacity approaching rate-compatible sequences of LDPC code ensembles over binary-input output-symmetric memoryless channels [J]. IEEE Trans. Comm, 2011, 59(11): 1807-1819
- [7] Tian T, Jones C, Villasenor J D, et al. Selective avoidance of cycles in irregular LDPC code construction [J]. IEEE Trans. Comm, 2004, 52(10): 1242-1248
- [8] Hu Y, Eleftheriou E, Arnold D M. Regular and irregular progressive edge growth Tanner graphs [J]. IEEE Trans. Information Theory, 2005, 51(6): 386-398