第44卷 第9期
2017年9月

计 算 机 科 学
COMPUTER SCIENCE

Vol. 44 No. 9
Sep. 2017

不协调区间值决策系统的分布约简

张 楠 许 鑫 童向荣 高学义 姜丽丽
(烟台大学计算机与控制工程学院 烟台 264005)

摘 要 知识约简可以保持决策系统中的分类特征不变,是粗糙集理论的重要研究内容之一。分布约简保持约简前后决策系统中各规则的置信度不发生改变。为了给区间值决策系统的论域分类提供合理的度量标准,引入了区间值相似率。通过将Pawlak决策系统中的等价关系扩展到区间值决策系统中的相容关系,提出了区间值决策系统的分布约简目标。针对该目标给出了相应差别矩阵的计算方法,并与现有区间值决策系统的广义决策约简计算方法进行了分析比较。最后,通过人工数据集的实验验证了相关结论的有效性。

关键词 知识约简,区间值决策系统,分布约简,相容关系

中图法分类号 TP391 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.09.016

Distribution Reduction in Inconsistent Interval-valued Decision Systems

ZHANG Nan XU Xin TONG Xiang-rong GAO Xue-yi JIANG Li-li
(School of Computer and Control Engineering, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract Different classification features in decision systems can be kept by knowledge reduction which is one of the hottest issues in rough set theory. The confidence level is unchanged because of distribution reduction in decision systems. For providing the measure criterion for universe classification in interval-valued decision systems, the similarity coefficient was introduced in this paper. To extend the equivalence relation in Pawlak decision systems to the tolerance relation in interval-valued decision systems, we proposed the concept of distribution reduction in inconsistent interval-valued decision systems. Aiming at the proposed concept, we provided the computational method of corresponding discernibility matrix. We also discussed the relation of distribution reduction and generalized decision reduction in interval-valued decision systems. Finally, experiments show that the novel method is effective.

Keywords Knowledge reduction, Interval-valued decision systems, Distribution reduction, Tolerance relation

1 引言

分布约简可以保持决策系统在知识约简前后各规则的置信度不发生改变,是粗糙集知识约简[1-7]的重要研究内容之一。许多学者在分布约简方面进行了深入的研究,并取得了一定的科研成果。苗夺谦等[8]于1997年提出了基于互信息的属性重要度,并给出了相应的启发式属性约简算法,该算法可以保持决策表中规则置信度在约简前后不发生改变;张文修等[9]提出了决策系统中的最大分布约简,并系统地分析了最大分布约简、分配约简、分布约简和近似约简的关系;Slezak[10]于2004年研究了分布式系统中的粗糙贝叶斯模型(Rough Bayesian Model, RBM),给出了粗糙近似的概率分布描述;徐伟华等[11-12]提出了基于优势关系的不协调信息系统分布约简与最大分布约简,研究了两者之间的关系并给出了建立不协调目标信息系统的分布和最大分布约简的计算方法;Du等[13]于2014年提出了粗糙分布约简,并给出了相应的计算方法;Zhang等[14]提出了区间值信息系统中的自反关系,给出了一种基于自反关系的知识约简方法,通过该方法可以保持置信度大于(等于)某阈值的规则在约简前后不发生改变。

本文提出了区间值决策系统的分布约简目标;针对该目标给出了相应差别矩阵的计算方法,并与现有区间值决策系统的广义决策约简计算方法进行了分析比较;最后通过人工数据集的实验验证了相关结论的有效性。

2 不协调区间值决策系统

2.1 不协调区间值决策系统的α-相容关系

四元组$(U, AT\cup D, V, f)$为区间值决策系统[3]。$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_{|U|}\}$是非空有限对象集合,$AT=\{a_1, a_2, \cdots,$

到稿日期:2016-07-12 返修日期:2016-09-28 本文受国家自然科学基金(61403329,61572418,61502410,61572419),山东省自然科学基金(ZR2013FQ020,ZR2015PF010,ZR2013FM011,ZR2016FM42),山东省高等学校科技计划项目(J15LN09),烟台大学研究生科技创新基金(01058)资助。

张 楠(1979-),男,博士,讲师,硕士生导师,CCF会员,主要研究方向为粗糙集、认知信息学与人工智能,E-mail:zhangnan0851@163.com;**许 鑫**(1991-),男,硕士生,CCF学生会员,主要研究方向为粗糙集、模式识别与人工智能;**童向荣**(1975-),男,博士,教授,硕士生导师,CCF会员,主要研究方向为多Agent系统、数据挖掘。

$a_{|AT|}\}$是非空有限条件属性集,$D=\{d\}$是决策属性集;$V=\bigcup_{a_k \in AT} V_{\{a_k\}}$,$V_{\{a_k\}}$表示属性 a_k 的值域;$f:U\times AT\to V$ 是一个信息函数,它指定论域 U 中的对象 u_i 在属性 a_k 上的区间属性值,即对 $\forall u_i\in U, a_k\in AT$,有 $f(u_i,a_k)=a_k(u_i)=[l_i^k,u_i^k]$。

给出一个区间值决策系统(见表 1),论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_{12}\}$;$AT=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$是条件属性的集合;条件属性值是区间型数据,如 $u_2(a_1)=[1.03,2.01]$,决策属性值是单值型数据,如 $d(u_2)=1$。

表 1　区间值决策系统

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	d
u_1	[1.01,2.00]	[1.01,2.01]	[2.01,3.03]	[2.99,4.00]	[4.00,5.02]	1
u_2	[1.03,2.01]	[2.03,3.00]	[3.03,4.05]	[3.98,5.02]	[5.03,6.00]	1
u_3	[1.00,2.02]	[2.03,3.05]	[3.02,4.00]	[4.00,4.99]	[4.99,6.00]	1
u_4	[1.01,2.00]	[1.01,2.04]	[2.02,3.01]	[1.97,3.02]	[2.97,4.01]	1
u_5	[1.01,2.04]	[1.00,2.03]	[2.02,4.01]	[2.01,4.00]	[3.00,4.02]	2
u_6	[1.00,2.02]	[1.00,2.02]	[3.04,4.00]	[3.03,4.01]	[3.00,4.00]	1
u_7	[1.04,2.01]	[0.99,2.01]	[2.05,3.07]	[3.04,4.02]	[4.00,502]	2
u_8	[1.03,2.05]	[2.07,3.01]	[3.01,4.04]	[3.00,3.99]	[4.05,4.99]	4
u_9	[1.01,2.03]	[2.05,3.05]	[2.02,4.04]	[2.01,4.00]	[3.99,4.96]	3
u_{10}	[1.00,2.05]	[2.02,3.02]	[2.01,3.04]	[1.99,2.99]	[3.99,4.95]	4
u_{11}	[1.01,2.04]	[3.02,4.00]	[4.01,5.03]	[5.07,6.01]	[4.99,6.00]	4
u_{12}	[0.99,2.00]	[3.00,4.01]	[4.04,4.99]	[5.00,6.00]	[4.95,5.99]	3

为了对区间值进行合理的分类,本文引入了区间值相似率的概念。这里采用 Jaccard 相似率,定义如下:

定义 1　对于 $\forall u_i\in U, a_k\in AT$,区间数$[l_i^k,u_i^k]$与$[l_j^k,u_j^k]$的 Jaccard 相似率[2]为:

$$\alpha_{ij}^k=\frac{|[l_i^k,u_i^k]\cap[l_j^k,u_j^k]|}{|[l_i^k,u_i^k]\cup[l_j^k,u_j^k]|}$$

由 Jaccard 相似率的定义,有如下性质:

1)当 $\alpha_{ij}^k=0$ 时,区间 $a_k(u_i)$和 $a_k(u_j)$相离;

2)当 $0<\alpha_{ij}^k<1$ 时,区间 $a_k(u_i)$和 $a_k(u_j)$相交非空;

3)当 $\alpha_{ij}^k=1$ 时,区间 $a_k(u_i)$和 $a_k(u_j)$是相同的。

定义 2　设区间值决策系统 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$,对于 $\forall a_k\in AT$,α-相容关系[3]为:

$$T_{\{a_k\}}^{\alpha}=\{(u_i,u_j)\in U\times U\mid \alpha_{ij}^k\geqslant\alpha\}$$

其中,α_{ij}^k表示对象 u_i 和对象 u_j 关于第 k 个条件属性 a_k 的相似程度。类似地,定义区间值决策系统关于集合 $B\subseteq AT$ 的 α-相容关系[3]如下:

$$T_B^{\alpha}=\{(u_i,u_j)\in U\times U\mid \alpha_{ij}^k\geqslant\alpha, a_k\in B\}$$

对于任意的 T_B^{α},满足如下性质。

1)自反性:对于 $\forall u_i\in U$,有$(u_i,u_i)\in T_B^{\alpha}$;

2)对称性:对于 $\forall u_i,u_j\in U$ 且 $\forall (u_i,u_j)\in T_B^{\alpha}$,有$(u_j,u_i)\in T_B^{\alpha}$;

3)不一定满足传递性:对于 $\forall u_i,u_m,u_j\in U$,若$(u_i,u_m)\in T_B^{\alpha}$ 且$(u_m,u_j)\in T_B^{\alpha}$,则$(u_i,u_j)\in T_B^{\alpha}$ 不一定成立。

若 $T_{\{a_k\}}^{\alpha}$是关于条件属性 $a_k\in AT$ 的 α-相容关系,则有如下关系[3]:

$$T_{AT}^{\alpha}=\bigcap_{a_k\in AT}T_{\{a_k\}}^{\alpha}$$

通过引入区间值的相似率与 α-相容关系,可以将满足相似度要求的不同区间值进行合理分类。

定义 3　设 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$是区间值决策系统,$B\subseteq AT$,$\alpha\in[0,1]$,则关于属性 B 的 α-相容类[3]为:

$$S_B^{\alpha}(u_i)=\{u_j\in U;(u_i,u_j)\in T_B^{\alpha}\}$$

$S_B^{\alpha}(u_i)$的集合构成对论域 U 的覆盖,即:

$$S^{\alpha}(B)=\{S_B^{\alpha}(u_1),S_B^{\alpha}(u_2),\cdots,S_B^{\alpha}(u_{|U|})\}$$

例 1　设 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$是区间值决策系统(见表 1),令 $\alpha=0.5$,$T_{AT}^{0.5}$对应的相似率布尔矩阵如下:

$$T_{AT}^{0.5}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

则有:$S^{0.5}(AT)=\{S_{AT}^{0.5}(u_1),S_{AT}^{0.5}(u_2),\cdots,S_{AT}^{0.5}(u_{12})\}$。

其中,$S_{AT}^{0.5}(u_1)=\{u_1,u_7\}$,$S_{AT}^{0.5}(u_2)=\{u_2,u_3\}$,$S_{AT}^{0.5}(u_3)=\{u_2,u_3\}$,$S_{AT}^{0.5}(u_4)=\{u_4,u_5\}$,$S_{AT}^{0.5}(u_5)=\{u_4,u_5,u_6\}$,$S_{AT}^{0.5}(u_6)=\{u_5,u_6\}$,$S_{AT}^{0.5}(u_7)=\{u_1,u_7\}$,$S_{AT}^{0.5}(u_8)=\{u_8,u_9\}$,$S_{AT}^{0.5}(u_9)=\{u_8,u_9,u_{10}\}$,$S_{AT}^{0.5}(u_{10})=\{u_9,u_{10}\}$,$S_{AT}^{0.5}(u_{11})=\{u_{11},u_{12}\}$,$S_{AT}^{0.5}(u_{12})=\{u_{11},u_{12}\}$。

定义 4　区间值决策表 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$,$\forall u_i,u_j\in U(i\neq j)$,若$(u_i,u_j)\in T_B^{\alpha}$,均满足 $f(u_i,d)=f(u_j,d)$,则称 $u_i\in U$ 为关于条件属性集 $B\subseteq AT$ 的 α-协调对象;否则,称 u_i 为关于条件属性 B 的 α-不协调对象。

定义 5　区间值决策表 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$,对于 $\forall u_i\in U$,若 u_i 均为关于条件属性$B\subseteq AT$ 的协调对象,那么 ζ 为协调区间值决策表,否则为不协调区间值决策表。

2.2　区间值决策系统的粗糙近似

文献[5]定义了区间值决策系统的粗糙上下近似。

定义6 区间值决策系统 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$，对于 $\forall B\subseteq AT,D_i\in U/IND(\{d\})$，对于任意的 $u_i\in U$，决策属性 $D=\{d\}$ 关于属性集 B 的粗糙上近似和下近似[5]为：

$$\overline{Apr_B^\alpha}(D)=\bigcup_{i=1}^{|U|}\{u_i\in U\mid S_B^\alpha(u_i)\cap D_i\neq\emptyset\}$$

$$\underline{Apr_B^\alpha}(D)=\bigcup_{i=1}^{|U|}\{u_i\in U\mid S_B^\alpha(u_i)\subseteq D_i\}$$

类似于经典粗糙集中的近似精度，对区间值决策系统的近似精度描述如下。

定义7 设 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$ 是区间值决策系统，对于任意的 $D_i\in U/IND(\{d\}),B\subseteq AT$，关于条件属性 B 的区间值决策系统的近似分类精度 $\mu_B^\alpha(D)$ 为：

$$\mu_B^\alpha(D)=\frac{|\bigcup_{i=1}^{|U|}\{u_i\in U\mid S_B^\alpha(u_i)\subseteq D_i\}|}{|\bigcup_{i=1}^{|U|}\{u_i\in U\mid S_B^\alpha(u_i)\cap D_i\neq\emptyset\}|}$$

例2 设 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$ 是区间值决策系统（见表1），令 $\alpha=0.5,D_1=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_6\}$，则决策属性 D_1 关于属性集 AT 的上下近似分别为：

$$\overline{Apr_{AT}^{0.5}}(D_1)=\{u_i\in U\mid S_{AT}^{0.5}(u_i)\cap D_1\neq\emptyset\}$$
$$=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\}$$

$$\underline{Apr_{AT}^{0.5}}(D_1)=\{u_i\in U\mid S_{AT}^{0.5}(u_i)\subseteq D_1\}$$
$$=\{u_2,u_3\}$$

则有：$\mu_{AT}^{0.5}(D_1)=\frac{|\{u_2,u_3\}|}{|\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\}|}=\frac{2}{7}$。

3 不协调区间值决策系统的分布约简

首先，给出区间值决策系统的概率分布如下。

定义8 设在区间值决策系统 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$ 上 $x\in U,B\subseteq AT$，记 $U/IND(\{d\})=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$，其中 $r=|U/IND(\{d\})|$，则有如下概率分布：

$$\mu_B^\alpha(x)=(\frac{|D_1\cap S_B^\alpha(x)|}{|S_B^\alpha(x)|},\frac{|D_2\cap S_B^\alpha(x)|}{|S_B^\alpha(x)|},\cdots,\frac{|D_r\cap S_B^\alpha(x)|}{|S_B^\alpha(x)|})$$

设 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$ 是不协调区间值决策系统，$B\subseteq AT$，若 $\forall x\in U$ 都有 $\mu_B^\alpha(x)=\mu_{AT}^\alpha(x)$，则称 B 是 ζ 中关于相容关系 T_{AT}^α 的分布相对协调集，简称分布协调集。进而，若 B 的任何真子集都不是分布协调集，则称 B 是 ζ 中关于相容关系 T_{AT}^α 的分布相对约简，简称分布约简。

定义9 设 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$ 是不协调区间值决策系统，$B\subseteq AT$，对于 $\forall x\in U$，若属性子集 B 满足如下条件：

1) $\mu_B^\alpha(x)=\mu_{AT}^\alpha(x)$；

2) 不存在任何 $C\subset B$，满足条件 $\mu_C^\alpha(x)=\mu_{AT}^\alpha(x)$。

则称属性子集 B 为区间值决策系统 ζ 的基于 α-相容类的分布约简。ζ 中所有约简的集合，记作 $red^\alpha(AT\cup D)$；所有约简的交集称为核属性集，记作 $core^\alpha(AT\cup D)$。

定理1 设 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$ 是区间值决策系统，对于任意的 $B\subseteq AT$，则 B 是分布协调集当且仅当若 $\forall(u_i,u_j)\in U\times U$，若 $\mu_{AT}^\alpha(u_i)\neq\mu_{AT}^\alpha(u_j)$，则有 $S_B^\alpha(u_i)\neq S_B^\alpha(u_j)$。

证明：(充分性)设 B 是 $\zeta=(U,AT,V\cup\{d\},f)$ 上的分布协调集，对于 $\forall(u_i,u_j)\in U\times U$，假设 $S_B^\alpha(u_i)=S_B^\alpha(u_j)$，可以得到 $u_i,u_j\in T_B^\alpha$，即 $\mu_B^\alpha(u_i)=\mu_B^\alpha(u_j)$，又 $\mu_B^\alpha(u_i)=\mu_{AT}^\alpha(u_i)$，$\mu_B^\alpha(u_j)=\mu_{AT}^\alpha(u_j)$，可得 $\mu_{AT}^\alpha(u_i)=\mu_{AT}^\alpha(u_j)$，与已知条件矛盾，故对于 $\forall(u_i,u_j)\in U\times U$，当 $\mu_{AT}^\alpha(u_i)\neq\mu_{AT}^\alpha(u_j)$ 时，$S_B^\alpha(u_i)\neq S_B^\alpha(u_j)$。

(必要性)对于 $\forall(u_i,u_j)\in U\times U$，若 $S_B^\alpha(u_i)=S_B^\alpha(u_j)$，则 $\mu_{AT}^\alpha(u_i)=\mu_{AT}^\alpha(u_j)$，设共有 r 个决策值，对于 $\forall k\leqslant r$，有 $\frac{|D_k\cap S_{AT}^\alpha(u_i)|}{|S_{AT}^\alpha(u_i)|}=\frac{|D_k\cap S_{AT}^\alpha(u_j)|}{|S_{AT}^\alpha(u_j)|}$。又 $B\subseteq AT$，则 $S_{AT}^\alpha(u_j)\subseteq S_B^\alpha(u_j)$，可得 $S_{AT}^\alpha(u_j)\subseteq S_B^\alpha(u_i)$，记 $J(S_B^\alpha(u_i))=\{S_{AT}^\alpha(u_j),S_{AT}^\alpha(u_j)\subseteq S_B^\alpha(u_i)\}$，$J(S_B^\alpha(u_i))$ 构成了 $S_B^\alpha(u_i)$ 的覆盖，则有：

$$\frac{|D_k\cap S_B^\alpha(u_i)|}{|S_B^\alpha(u_i)|}$$
$$=\frac{\sum(|D_k\cap S_{AT}^\alpha(u_j)|),S_{AT}^\alpha(u_j)\in J(S_B^\alpha(u_i))}{|S_B^\alpha(u_i)|}$$
$$=\sum(\frac{|D_k\cap S_{AT}^\alpha(u_j)|}{|S_{AT}^\alpha(u_j)|}\cdot\frac{|S_{AT}^\alpha(u_j)|}{|S_B^\alpha(u_i)|}),S_{AT}^\alpha(u_j)\in J(S_B^\alpha(u_i))$$
$$=\sum(\frac{|D_k\cap S_{AT}^\alpha(u_i)|}{|S_{AT}^\alpha(u_i)|}\cdot\frac{|S_{AT}^\alpha(u_j)|}{|S_B^\alpha(u_i)|}),S_{AT}^\alpha(u_j)\in J(S_B^\alpha(u_i))$$
$$=\frac{|D_k\cap S_{AT}^\alpha(u_i)|}{|S_{AT}^\alpha(u_i)|}$$

因此 $\mu_{AT}^\alpha(u_i)=\mu_B^\alpha(u_i)$，故 B 是分布协调集。定理得证。

定义10 设 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$ 是不相容区间值决策系统，差别矩阵定义如下：

$$DM=(c_{ij}^\alpha)_{n\times n}=\begin{bmatrix}c_{11}^\alpha & c_{12}^\alpha & \cdots & c_{1n}^\alpha\\ c_{21}^\alpha & c_{22}^\alpha & \cdots & c_{2n}^\alpha\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1}^\alpha & c_{n2}^\alpha & \cdots & c_{nn}^\alpha\end{bmatrix}$$

其中，c_{ij}^α 的定义如下，对于 $\forall(u_i,u_j)\in U\times U$，有：

$$c_{ij}^\alpha=\begin{cases}\{a_k\in AT,\alpha_{ij}^k<\alpha\}, & \mu_{AT}^\alpha(u_i)\neq\mu_{AT}^\alpha(u_j)\\ \emptyset, & \text{其他}\end{cases}$$

定理2 设 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$ 是区间值决策系统，$B\subseteq AT$，则 B 是分布协调集当且仅当对于 $\forall(u_i,u_j)\in U\times U$，$\mu_{AT}^\alpha(u_i)\neq\mu_{AT}^\alpha(u_j)$，都有 $c_{ij}^\alpha\cap B\neq\emptyset$。

证明：(充分性)若 B 是分布协调集，假设 $\exists c_{ij}^\alpha\cap B\neq\emptyset$，则必 $\exists S_{AT}^\alpha(u_i),S_{AT}^\alpha(u_j)$，满足 $\mu_{AT}^\alpha(u_i)\neq\mu_{AT}^\alpha(u_j)$，通过定理1可知，$S_B^\alpha(u_i)\neq S_B^\alpha(u_j)$，于是必 $\exists a_k\in B$，使得 $\alpha_{ij}^k<\alpha$，故 $\exists a_k\in c_{ij}^\alpha$，因此 $c_{ij}^\alpha\cap B\neq\emptyset$。

(必要性)若 $\exists(u_i,u_j)\in U\times U$ 满足 $\mu_{AT}^\alpha(u_i)\neq\mu_{AT}^\alpha(u_j)$，且 $\forall c_{ij}^\alpha\cap B=\emptyset$，则对于 $\forall a_k\in B$，必有 $a_k\notin c_{ij}^\alpha$，即 $\alpha_{ij}^k\geqslant\alpha$，从而，$u_i,u_j\in T_B^\alpha$。设 u_i,u_j 相对应的 α-相容类为 $S_B^\alpha(u_i)$，$S_B^\alpha(u_j)$，可得 $S_B^\alpha(u_i)=S_B^\alpha(u_j)$，由定理1可得 B 不是分布协调集。定理得证。

定义11 设 $\zeta=(U,AT\cup\{d\},V,f)$ 是区间值决策系统，c_{ij}^α 为对象 u_i,u_j 所对应的相容类之间的差别属性，则有如下差别函数：

$$\varphi^\alpha(AT)=\wedge(\vee c_{ij}^\alpha)。$$

定理 3　设 $\zeta=(U,AT,V,f)$ 是区间值信息系统，若 $B\subseteq AT$ 是 ζ 的分布约简，当且仅当 B 为差别函数 $\varphi^{\alpha}(AT)=\wedge(\vee c_{ij}^{\alpha})$ 的一个素蕴涵。

证明：(充分性)假设 ω 是 $\varphi^{\alpha}(AT)$ 的一个素蕴涵，则一定有 $\exists c_{ij}^{\alpha}\cap\omega\neq\emptyset$，再由定理 2 可知 ω 是分布约简。

(必要性)不妨设 $\varphi^{\alpha}(AT)=\vee\omega$，在 ω 中去掉一个元素形成 ω'，则必存在 $S_{AT}^{\alpha}(u_i)$，$S_{AT}^{\alpha}(u_j)$，满足 $\mu_{AT}^{\alpha}(u_i)\neq\mu_{AT}^{\alpha}(u_j)$，从而使得 $c_{ij}^{\alpha}\cap\omega'=\emptyset$，因此 ω' 不是分布协调集，故 ω 是一个分布约简。

由于差别函数公式中包含了所有的满足 $\mu_{AT}^{\alpha}(u_i)\neq\mu_{AT}^{\alpha}(u_j)$ 的 $S_{AT}^{\alpha}(u_i)$ 和 $S_{AT}^{\alpha}(u_j)$，因此不存在其他分布约简。

该定理给出了求区间值决策系统在 α-相容关系下所有分布保持约简的方法。

例 3　表 1 所列的区间值决策系统 $\zeta=(U,AT\cup D,V,f)$ 上，$\alpha=0.5$，则有：

$\varphi^{0.5}(AT)=\wedge(\vee c_{ij}^{\alpha})=(a_2\wedge a_5)$

$red^{0.5}(AT\cup D)=\{a_2,a_5\}$

$core^{0.5}(AT\cup D)=\{a_2,a_5\}$

4　两种约简间关系的分析

文献[3]对区间值决策系统的广义决策保持约简做了详细的介绍，这里给出其基本的定义。

定义 12　设区间值决策系统 $\zeta=(U,AT\cup D,V,f)$，有 $f_d(u_j)=d(u_j)$，对于 $\forall B\subseteq AT$，关于 $u_i\in U$ 的 α-广义决策函数如下：

$\partial_B^{\alpha}(u_i)=\{f_d(u_j),u_j\in S_B^{\alpha}(u_i)\}$

则定义属性子集 B 的 α-广义决策函数如下：

$\partial^{\alpha}(B)=\{\partial_B^{\alpha}(u_i),u_i\in U\}$

定义 13　设区间值决策系统 $\zeta=(U,AT\cup D,V,f)$，对于 $\forall B\subseteq AT$，若 B 满足以下两个条件：

1) $\partial^{\alpha}(B)=\partial^{\alpha}(AT)$；

2) 不存在任何 $C\subset B$，满足条件：$\partial^{\alpha}(C)=\partial^{\alpha}(AT)$。

则 $B\subseteq AT$ 为 ζ 的 α-广义决策保持约简[3]。ζ 中所有约简的集合，记为 $red_{GEN}^{\alpha}(AT\cup D)$；所有约简的交集称为核属性集，记为 $core_{GEN}^{\alpha}(AT\cup D)$。

定义 14　设区间值决策系统 $\zeta=(U,AT\cup D,V,f)$，若 $\forall B\subseteq AT$，有：

$$M_{GEN}^{\alpha}(u_i,u_j)=\begin{cases}\{a_k\in AT,\alpha_{ij}^{k}<\alpha\}, & d(u_j)\notin\partial_{AT}^{\alpha}(u_i)\\ \emptyset, & \text{其他}\end{cases}$$

则称 $M_{GEN}^{\alpha}(u_i,u_j)$ 为对象 u_i 与对象 u_j 的 α-广义决策保持约简的差别属性集，$DM_{GEN}^{\alpha}=(M_{GEN}^{\alpha}(u_i,u_j))$ 为区间值决策系统 ζ 的 α-广义决策保持差别矩阵。

定理 4　设区间值决策系统 $\zeta=(U,AT\cup D,V,f)$，若 $B\subseteq AT$ 是 α-广义决策保持约简，当且仅当 B 是差别函数：

$$\varphi_{GEN}^{\alpha}(AT)=\bigwedge_{(u_i,u_j)\in U\times\{u_m\in U,d(u_m)\notin\partial_{AT}^{\alpha}(u_i)\}}\vee\alpha(u_i,u_j)$$

的一个素蕴涵。其中，$\alpha(u_i,u_j)=\{a\in AT;\alpha_{ij}^{k}<\alpha\}$。

证明：略。

例 4　在表 1 所列的区间值决策系统 $\zeta=(U,AT\cup D,V,f)$ 上，$\alpha=0.5$，则有：

$$\varphi_{GEN}^{0.5}(AT)=\bigwedge_{u_i,u_j\in U\times\{u_m\in U,d(u_m)\notin\partial_{AT}^{\alpha}(u_i)\}}\vee\alpha(u_i,u_j)=(a_2\wedge a_4)\vee(a_2\wedge a_5)$$

$red_{GEN}^{0.5}(AT\cup D)=\{\{a_2,a_4\},\{a_2,a_5\}\}$

$core_{GEN}^{0.5}(AT\cup D)=\{a_2\}$

本文提出的区间值决策系统的分布约简保证了在约简前后 α-相容类在决策上的概率分布不变，对比 α-广义决策保持约简，给出约简关系的定理。

定理 5　设 $\zeta=(U,AT\cup D,V,f)$ 是区间值决策系统，$U/IND(\{d\})=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$，其中 $r=|U/IND(\{d\})|$，$D_i\in\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$，且 D_i 是决策属性 $\{d\}$ 划分的决策等价类。若 $B\subseteq AT$ 是一个分布约简，则 B 必保持广义决策不变；反之，则不成立。

证明：(充分性)若 $\exists B\subseteq AT$ 是分布约简，则根据分布约简的定义，对于 $\forall x\in U$，必有 $\mu_{AT}^{\alpha}(x)=\mu_B^{\alpha}(x)$。又因为 $\mu_B^{\alpha}(x)=(\frac{|D_1\cap S_B^{\alpha}(x)|}{|S_B^{\alpha}(x)|},\frac{|D_2\cap S_B^{\alpha}(x)|}{|S_B^{\alpha}(x)|},\cdots,\frac{|D_r\cap S_B^{\alpha}(x)|}{|S_B^{\alpha}(x)|})$，即对于 $\forall D_i\in\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$，都有 $\frac{|D_i\cap S_B^{\alpha}(x)|}{|S_B^{\alpha}(x)|}=\frac{|D_i\cap S_{AT}^{\alpha}(x)|}{|S_{AT}^{\alpha}(x)|}$。此处分两种情况：1)若 $D_i\cap S_B^{\alpha}(x)\neq\emptyset$，表示 $S_B^{\alpha}(x)$ 与决策等价类 D_i 有交集，即 $S_B^{\alpha}(x)$ 可以导出决策 $f(x_i,d)$。由定义 12 可得，所有满足条件 $D_i\cap S_B^{\alpha}(x)\neq\emptyset$ 的 d 的集合，是区间值决策系统 ζ 关于对象 u_i 的 α-广义决策函数。2)若 $D_i\cap S_B^{\alpha}(x)=\emptyset$，即表示 $S_B^{\alpha}(x)$ 不能导出决策 $f(x_i,d)$，在广义决策保持约简中不予考虑。由此可得 B 必保持广义决策不变。

(必要性)若 $\exists B\subseteq AT$ 是广义决策保持约简，由定义 13 可得 $\partial^{\alpha}(B)=\partial^{\alpha}(AT)$，即对于 $\forall x\in U$，必有 $\partial_B^{\alpha}(x)=\partial_{AT}^{\alpha}(x)$。由定义 12 可知，$\partial_B^{\alpha}(x)$ 表示 $S_B^{\alpha}(x)$ 能导出的决策值的集合，又 $\forall D_i\in\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$，若 $D_i\cap S_B^{\alpha}(x)\neq\emptyset$，则说明 $S_B^{\alpha}(x)$ 可以导出决策 $f(x_i,d)$。从而广义决策函数可以表示为所有满足 $D_i\cap S_B^{\alpha}(x)\neq\emptyset$ 的 d 的集合，该条件并不能满足 $\frac{|D_i\cap S_B^{\alpha}(x)|}{|S_B^{\alpha}(x)|}=\frac{|D_i\cap S_{AT}^{\alpha}(x)|}{|S_{AT}^{\alpha}(x)|}$，故 B 不能保持概率分布不变。

5　实验验证

为了验证约简算法及算法间关系的准确性，对本文所述的两种算法进行实验验证。实验设备：Dell OptiPlex 7010 Mini Tower；操作系统：Windows 7 旗舰版 64 位 SP1；CPU：Intel i5-3470；内存：4GB DDR3。

实验采用 Matlab 语言编写程序，所用到的区间值决策系统数据集为人工数据集，如表 2 所列。α 取值分别为 0.4，0.5，0.6，0.7 和 0.8，分布约简的结果如表 3 所列；α-广义决策保持约简的结果如表 4 所列。从实验数据可以看出，在不同阈值的情况下，分布约简的结果可以保持 α-广义决策约简前后不变。

表2 人工数据集

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	d
u_1	[2.112,3.533]	[1.591,2.941]	[2.572,3.833]	[3.831,5.080]	[4.615,5.777]	1
u_2	[2.050,3.641]	[2.400,3.766]	[3.057,4.280]	[3.077,3.628]	[5.295,6.172]	1
u_3	[2.110,3.480]	[2.333,3.761]	[3.126,4.335]	[3.072,3.671]	[5.241,6.294]	1
u_4	[2.171,3.549]	[1.553,2.783]	[2.557,3.870]	[2.726,3.860]	[3.232,4.421]	1
u_5	[2.109,4.447]	[1.508,2.786]	[2.569,4.335]	[2.743,5.141]	[3.227,4.451]	2
u_6	[3.069,4.381]	[1.575,2.907]	[3.148,4.256]	[3.799,5.106]	[3.132,4.282]	1
u_7	[2.023,3.424]	[1.542,2.865]	[2.527,3.859]	[3.903,5.129]	[4.558,5.642]	2
u_8	[3.138,4.464]	[2.419,3.707]	[3.189,4.305]	[3.884,5.100]	[4.586,5.754]	4
u_9	[2.067,4.491]	[2.364,3.729]	[2.545,4.327]	[2.715,5.071]	[4.533,5.663]	3
u_{10}	[2.113,3.524]	[2.413,3.731]	[2.576,3.859]	[2.713,3.860]	[4.556,5.679]	4
u_{11}	[2.209,3.457]	[3.358,4.824]	[4.830,5.001]	[5.073,5.830]	[5.174,6.177]	4
u_{12}	[2.093,3.527]	[3.359,4.743]	[4.842,5.122]	[5.035,5.858]	[5.166,6.162]	3
u_{13}	[2.105,3.548]	[1.628,2.971]	[2.511,3.776]	[3.861,5.107]	[4.664,5.701]	1
u_{14}	[2.091,3.624]	[2.425,3.768]	[3.092,4.269]	[3.064,3.592]	[5.220,6.220]	1
u_{15}	[2.183,3.540]	[2.334,3.787]	[3.154,4.391]	[3.064,3.658]	[5.240,6.292]	1
u_{16}	[2.098,3.519]	[1.621,2.794]	[2.573,3.898]	[2.674,3.824]	[3.259,4.421]	1
u_{17}	[2.099,4.482]	[1.561,2.844]	[2.570,4.311]	[2.681,5.079]	[3.213,4.412]	2
u_{18}	[3.032,4.327]	[1.550,2.900]	[3.144,4.269]	[3.878,5.054]	[3.165,4.231]	1
u_{19}	[2.067,3.415]	[1.524,2.916]	[2.561,3.804]	[3.811,5.155]	[4.549,5.691]	2
u_{20}	[3.075,4.509]	[2.459,3.715]	[3.094,4.313]	[3.895,5.143]	[4.625,5.693]	4
u_{21}	[2.090,4.493]	[2.432,3.750]	[2.586,4.278]	[2.748,5.157]	[4.586,5.676]	3
u_{22}	[2.101,3.542]	[2.403,3.680]	[2.549,3.889]	[2.751,3.810]	[4.519,5.709]	4
u_{23}	[2.209,3.466]	[3.365,4.818]	[4.847,5.018]	[5.148,5.826]	[5.173,6.144]	4
u_{24}	[2.174,3.494]	[3.396,4.754]	[4.784,5.083]	[5.063,5.886]	[5.223,6.111]	3
u_{25}	[2.130,3.605]	[1.630,2.893]	[2.583,3.816]	[3.834,5.046]	[4.613,5.767]	1
u_{26}	[2.140,3.633]	[2.330,3.737]	[3.071,4.254]	[3.025,3.632]	[5.311,6.215]	1
u_{27}	[2.153,3.473]	[2.314,3.764]	[3.110,4.369]	[3.132,3.633]	[5.285,6.235]	1
u_{28}	[2.156,3.574]	[1.578,2.768]	[2.575,3.908]	[2.659,3.794]	[3.252,4.350]	1
u_{29}	[2.110,4.459]	[1.534,2.791]	[2.579,4.285]	[2.749,5.112]	[3.237,4.456]	2
u_{30}	[3.085,4.346]	[1.550,2.919]	[3.131,4.221]	[3.851,5.059]	[3.141,4.320]	1
u_{31}	[2.038,3.400]	[1.506,2.916]	[2.550,3.838]	[3.859,5.151]	[4.542,5.683]	2
u_{32}	[3.096,4.463]	[2.371,3.702]	[3.107,4.257]	[3.813,5.149]	[4.607,5.734]	4
u_{33}	[2.153,4.529]	[2.443,3.667]	[2.528,4.267]	[2.659,5.080]	[4.629,5.642]	3
u_{34}	[2.184,3.608]	[2.477,3.744]	[2.550,3.853]	[2.710,3.847]	[4.572,5.697]	4
u_{35}	[2.183,3.405]	[3.354,4.777]	[4.832,5.056]	[5.063,5.827]	[5.216,6.167]	4
u_{36}	[2.158,3.441]	[3.371,4.690]	[4.840,5.070]	[5.055,5.888]	[5.178,6.200]	3
u_{37}	[2.073,3.591]	[1.628,2.917]	[2.547,3.799]	[3.837,5.040]	[4.612,5.734]	1
u_{38}	[2.132,3.638]	[2.370,3.752]	[3.050,4.315]	[3.090,3.645]	[5.298,6.207]	1
u_{39}	[2.112,3.483]	[2.335,3.741]	[3.103,4.365]	[3.062,3.677]	[5.218,6.294]	1
u_{40}	[2.109,3.557]	[1.642,2.762]	[2.592,3.828]	[2.707,3.822]	[3.258,4.352]	1
u_{41}	[2.114,4.517]	[1.519,2.786]	[2.494,4.342]	[2.749,5.113]	[3.244,4.482]	2
u_{42}	[3.112,4.379]	[1.528,2.932]	[3.087,4.301]	[3.869,5.030]	[3.140,4.235]	1
u_{43}	[2.057,3.355]	[1.494,2.912]	[2.575,3.837]	[3.894,5.140]	[4.567,5.651]	2
u_{44}	[3.088,4.450]	[2.411,3.697]	[3.188,4.271]	[3.840,5.077]	[4.627,5.680]	4
u_{45}	[2.095,4.466]	[2.433,3.721]	[2.609,4.334]	[2.727,5.089]	[4.615,5.710]	3
u_{46}	[2.183,3.505]	[2.440,3.673]	[2.561,3.917]	[2.685,3.784]	[4.510,5.712]	4
u_{47}	[2.175,3.443]	[3.355,4.823]	[4.870,5.006]	[5.064,5.785]	[5.232,6.102]	4
u_{48}	[2.128,3.456]	[3.390,4.705]	[4.823,5.077]	[5.073,5.836]	[5.170,6.156]	3
u_{49}	[2.064,3.520]	[1.583,2.973]	[2.516,3.811]	[3.797,5.029]	[4.620,5.762]	1
u_{50}	[2.089,3.710]	[2.384,3.812]	[3.058,4.282]	[3.034,3.564]	[5.293,6.196]	1
u_{51}	[2.175,3.537]	[2.364,3.733]	[3.089,4.383]	[3.126,3.639]	[5.191,6.248]	1
u_{52}	[2.124,3.541]	[1.618,2.841]	[2.632,3.830]	[2.721,3.794]	[3.304,4.364]	1
u_{53}	[2.099,4.505]	[1.530,2.818]	[2.560,4.336]	[2.750,5.125]	[3.207,4.450]	2
u_{54}	[3.095,4.390]	[1.519,2.922]	[3.128,4.226]	[3.824,5.037]	[3.118,4.316]	1
u_{55}	[2.021,3.414]	[1.507,2.841]	[2.568,3.809]	[3.840,5.135]	[4.522,5.686]	2
u_{56}	[3.100,4.504]	[2.444,3.735]	[3.112,4.309]	[3.803,5.095]	[4.599,5.717]	4
u_{57}	[2.137,4.504]	[2.389,3.747]	[2.587,4.303]	[2.719,5.147]	[4.605,5.668]	3
u_{58}	[2.171,3.530]	[2.400,3.692]	[2.514,3.839]	[2.724,3.868]	[4.594,5.728]	4
u_{59}	[2.163,3.458]	[3.404,4.829]	[4.834,5.010]	[5.077,5.785]	[5.224,6.162]	4
u_{60}	[2.121,3.493]	[3.415,4.700]	[4.821,5.118]	[5.072,5.809]	[5.184,6.204]	3

表3 分布约简结果

a	约简结果	$core^a(A1)$	$\lvert read^a(A1)\rvert$
0.8	$\{a_2,a_3,a_4\}\{a_2,a_3,a_5\}\{a_3,a_4,a_5\}$	$\{a_3\}$	3
0.7	$\{a_2,a_3,a_4\}\{a_3,a_4,a_5\}\{a_1,a_2,a_3,a_5\}$	$\{a_3\}$	3
0.6	$\{a_2,a_3,a_4\}\{a_3,a_4,a_5\}$	$\{a_3,a_4\}$	2
0.5	$\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$	$\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$	1
0.4	$\{a_2,a_5\}$	$\{a_2,a_5\}$	1

表4 广义决策保持约简结果

a	约简结果	$core^a_{GEN}(A1)$	$\lvert read^a_{GEN}(A1)\rvert$
0.8	$\{a_2,a_3,a_4\}\{a_2,a_3,a_5\}\{a_3,a_4,a_5\}$	$\{a_3\}$	3
0.7	$\{a_2,a_3,a_4\}\{a_3,a_4,a_5\}\{a_1,a_2,a_3,a_5\}$	$\{a_3\}$	3
0.6	$\{a_1,a_2,a_4\}\{a_2,a_3,a_5\}\{a_2,a_4,a_5\}\{a_3,a_4,a_5\}$	$\{a_4\}$	5
0.5	$\{a_2,a_4,a_5\}$	$\{a_2,a_4,a_5\}$	1
0.4	$\{a_2,a_5\}$	$\{a_2,a_5\}$	1

（下转第104页）

[13] KOMU B N,MZYECE M,DJOUANI K. Spin-based verification of authentication protocols in WiMAX networks[C]//2012 Vehicular Technology Conference(VTC Fall). IEEE,2012:1-5.
[14] FENG J. Formal analysis and verification of SPIN protocol[D]. Guizhou:Guizhou University,2009. (in Chinese)
冯杰. 基于SPIN的协议的形式化分析和验证[D]. 贵州:贵州大学,2009.
[15] 古天龙,蔡国永. 网络协议的形式化分析与设计[M]. 北京:电子工业出版社,2003:37-80.
[16] 吴哲辉. Petri网导论[M]. 北京:机械工业出版社,2006:10-30.
[17] 原菊梅. Petri网建模及其智能分析方法[M]. 北京:国防工业出版社,2011:39-122.
[18] HOLZMANN G J. The spin model checker:primer and reference manual[M]. New Jersey:Addison-Wesley,2003:95-123.

(上接第82页)

结束语 知识约简是保持决策系统不同分类特征的最小属性子集,分布式约简可以保持在知识约简前后各个规则的置信度不变[15-16]。通过扩展Pawlak决策系统中的等价关系到区间值决策系统中的相容关系,本文提出了区间值决策系统的分布约简与相应差别矩阵的计算方法,并将提出的计算方法与区间值决策系统的广义决策约简计算方法进行了分析与比较。最后,通过人工数据集的实验验证了相关结论的有效性。本文的研究工作为相容关系下区间值决策系统的分布式约简提供了具体的方法,是对区间值决策系统约简的有益探索。根据区间值决策系统的不同约简目标,如何建立有效的区间值决策系统的知识约简评价体系将是下一步的工作。

参考文献

[1] MIAO D Q,ZHAO Y,YAO Y Y,et al. Relative reducts in consistent and inconsistent decision tables of the Pawlak rough set model[J]. Information Sciences,2009,179(24):4140-4150.
[2] CHEN Z C. The study of knowledge discovery and attributes reduction in set-valued informations systems[D]. Chengdu:Southwest Jiaotong University,2011. (in Chinese)
陈子春. 集值信息系统的知识发现与属性约简研究[D]. 成都:西南交通大学,2011.
[3] ZHANG N,MIAO D Q,YUE X D. Approaches to Knowledge Reduction in Interval-Valued Information Systems[J]. Journal of Computer Research and Development,2010,47(8):1362-1371. (in Chinese)
张楠,苗夺谦,岳晓冬. 区间值信息系统的知识约简[J]. 计算机研究与发展,2010,47(8):1362-1371.
[4] DENG D Y,HUANG H K,LI X J. Comparison of various types of reductions in inconsistent systems[J]. Chinese Journal of Electronics,2007,35(2):252-255. (in Chinese)
邓大勇,黄厚宽,李向军. 不一致决策系统中约简之间的比较[J]. 电子学报,2007,35(2):252-255.
[5] XU F F,LEI J S,BI Z Q,et al. Approaches to approximate reduction with interval-valued multi-decision tables in big data[J]. Journal of Software,2014,25(9):2119-2135. (in Chinese)
徐菲菲,雷景生,毕忠勤,等. 大数据环境下多决策表的区间值全局近似约简[J]. 软件学报,2014,25(9):2119-2135.
[6] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences,1982,11(5):341-356.
[7] WANG G Y,YAO Y Y,YU H. A survey on rough set theory and applications[J]. Chinese Journal of Computers,2009,32(7):1229-1246. (in Chinese)
王国胤,姚一豫,于洪. 粗糙集理论与应用研究综述[J]. 计算机学报,2009,32(7):1229-1246.
[8] MIAO D Q,HU G R. A heuristic algorithm for reduction of knowledge[J]. Journal of Computer Research and Development,1999,36(6):681-684. (in Chinese)
苗夺谦,胡桂荣. 知识约简的一种启发式算法[J]. 计算机研究与发展,1999,36(6):681-684.
[9] ZHANG W X,MI J S,WU W Z. Knowledge reductions in inconsistent information systems[J]. Chinese Journal of Computers,2003,26(1):12-18. (in Chinese)
张文修,米据生,吴伟志. 不协调目标信息系统的知识约简[J]. 计算机学报,2003,26(1):12-18.
[10] DOMINIK S. The rough Bayesian model for distributed decision systems[C]//Proceedings of 4th International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. 2004:384-393.
[11] XU W H,ZHANG W X. Distribution reductions in inconsistent information systems based on dominance relations[J]. Fuzzy Systems and Mathematics,2007,21(4):124-131. (in Chinese)
徐伟华,张文修. 基于优势关系下不协调目标信息系统的分布约简[J]. 模糊系统与数学,2007,21(4):124-131.
[12] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京:科学出版社,2013:27-46.
[13] DU W S,HU B Q. Approximate distribution reducts in inconsistent interval-valued ordered decision tables[J]. Information Sciences,2014,271(7):93-114.
[14] ZHANG X,MEI C L,CHEN D G,et al. Multi-confidence rule acquisition and confidence-preserved attribute reduction in interval-valued decision systems[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2014,55(8):1787-1804.
[15] ZHOU J. Research on Knowledge Acquisition Algorithms in Probabilistic Rough Set Models[D]. Shanghai:Tongji University,2011. (in Chinese)
周杰. 概率粗糙集模型的知识获取算法研究[D]. 上海:同济大学,2011.
[16] QIN K Y,PEI Z,DU W F. The relationship among several knowledge reduction approaches[C]//Proceedings of the Second International on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. 2005:1232-1241.