

线性投影非负矩阵分解方法及应用

胡俐蕊^{1,2,3} 吴建国^{2,3} 汪磊^{2,3}

(南通大学计算机科学与技术学院 南通 226019)¹

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室 合肥 230039)²

(安徽大学计算机科学与技术学院 合肥 230039)³

摘要 针对线性投影结构非负矩阵分解迭代方法比较复杂的问题,提出了一种线性投影非负矩阵分解方法。从投影和线性变换角度出发,将 Frobenius 范数作为目标函数,利用泰勒展开式,严格导出基矩阵和线性变换矩阵的迭代算法,并证明了算法的收敛性。实验结果表明:该算法是收敛的;相对于非负矩阵分解等方法,该方法的基矩阵具有更好的正交性和稀疏性;人脸识别结果说明该方法具有较高的识别率。线性投影非负矩阵分解方法是有效的。

关键词 投影非负矩阵分解,线性变换,人脸识别

中图分类号 TP39 文献标识码 A

Application and Method for Linear Projective Non-negative Matrix Factorization

HU Li-rui^{1,2,3} WU Jian-guo^{2,3} WANG Lei^{2,3}

(School of Computer Science and Technology, Nantong University, Nantong 226019, China)¹

(Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing of Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039, China)²

(School of Computer Science and Technology, Anhui University, Hefei 230039, China)³

Abstract To solve the problem that the iterative method for Linear Projection-Based Non-negative Matrix Factorization (LPBNMF) is complex, a method, called Linear Projective Non-negative Matrix Factorization (LP-NMF), was proposed. In LP-NMF, from projection and linear transformation angle, an objective function of Frobenius norm is considered. The Taylor series expansion is used. An iterative algorithm for basis matrix and linear transformation matrix is derived strictly and a proof of algorithm convergence is provided. Experimental results show that the algorithm is convergent, and relative to Non-negative Matrix Factorization (NMF) and so on, the orthogonality and the sparseness of the basis matrix are better, in face recognition, there is higher recognition accuracy. The method for LP-NMF is effective.

Keywords Projective non-negative matrix factorization, Linear transformation, Face recognition

非负矩阵分解(NMF) $X \approx WH$ ^[1]是从“对整体的感知由对组成整体的部分感知构成”观点出发而构建的数据处理方法。该方法揭示了描述数据的本质,并被广泛应用到数据降维、文本挖掘、光谱数据分析^[2]、图像分析、人脸识别^[1,3,4]等诸多领域。

投影非负矩阵分解(P-NMF) $X \approx WW^T X$ ^[5]是在 NMF 基础上提出的。由于它是从投影角度而构建的,使得 P-NMF 算法只需计算基矩阵 W 。在每一步迭代运算中,NMF 需要计算两个矩阵,该算法只需计算一个矩阵,计算复杂性更低。

基于线性投影结构的非负矩阵分解(LPBNMF) $X \approx WQX$ ^[3]是基于线性变换 Q 而构建的。在 LPBNMF 中,提出了一个单调递减算法,定量地分析了基矩阵的正交性和稀疏性,并将它应用到有遮挡的人脸识别问题中。

根据 P-NMF 和 LPBNMF 的优化规则,基矩阵总是趋向于正交的^[3,5]。因此,P-NMF 和 LPBNMF 基矩阵的正交性

和稀疏性都比 NMF 好,从而使得 P-NMF 和 LPBNMF 方法更有利于数据降维和模式识别等应用。

本文基于 LPBNMF 方法 $X \approx WQX$ 提出了另一种方法,我们称该方法为线性投影非负矩阵分解(LP-NMF)方法。本方法的基矩阵仍然具有较好的正交性和稀疏性。相对于 LPBNMF 方法,其迭代公式更加简单。人脸识别实验说明该方法是有效的。

1 线性投影非负矩阵分解(LP-NMF)

用 Frobenius 范数作为相似性度量,考虑目标函数:

$$F = \frac{1}{2} \|X - WQX\|_F^2 (X \geq 0, W \geq 0, Q \geq 0) \quad (1)$$

NMF 定义 $X \approx WH$ 中所采用的数学模型是基于非线性投影结构而构建的,而 LP-NMF 的基本思想是:通过适当的线性变换 Q 将样本数据 X 变换成 QX ,这样可以认为 QX 是样本空间 X 在适当子空间 W 上的投影,最后,通过最小化目

到稿日期:2012-12-16 返修日期:2013-04-13 本文受安徽省科技攻关项目(07010202057)资助。

胡俐蕊(1966—),男,博士,副教授,主要研究方向为图像识别、机器学习,E-mail:hulr163@163.com;吴建国(1954—),男,博士,教授,主要研究方向为智能 EDA、中文信息处理、图像识别;汪磊(1987—),男,硕士生,主要研究方向为图像识别、机器学习。

标函数 F , 获得 W 和 Q 。这里, 仍然称 W 为基矩阵, 而称 Q 为线性变换矩阵。

1.1 基矩阵 W 的迭代更新规则

在式(1)中, 对于 W 中的任意元素 w_{ab} , 用 $F_{w_{ab}}$ 表示 F 中与 w_{ab} 相关的部分。在表达式 $F_{w_{ab}}$ 中, 用 w 替换 w_{ab} 可以得到函数 $F_{w_{ab}}(w)$ 。很明显, $F_{w_{ab}}(w)$ 在 w_{ab} 处的一阶导数就是 F 关于 w_{ab} 的一阶偏导数, 即

$$\begin{aligned} F'_{w_{ab}}(w_{ab}) &= \frac{\partial F}{\partial w_{ab}} = \frac{\partial (\frac{1}{2} \sum_{ij} [X_{ij} - (WQX)_{ij}]^2)}{\partial w_{ab}} \\ &= \sum_{ij} -(X_{ij} - (WQX)_{ij}) \frac{\partial (WQX)_{ij}}{\partial w_{ab}} \\ &= \sum_{ij} (-X_{ij} + (WQX)_{ij}) (\sum_k \frac{\partial W_{ik}}{\partial w_{ab}} (QX)_{kj}) \\ &= \sum_{ij} (-X_{ij} + (WQX)_{ij}) (\frac{\partial W_{ij}}{\partial w_{ab}} (QX)_{ij}) \\ &= \sum_j [\sum_i (-X_{ij} + (WQX)_{ij}) (\frac{\partial W_{ij}}{\partial w_{ab}} (QX)_{ij})] \\ &= \sum_j -X_{aj} (QX)_{bj} + (WQX)_{aj} (QX)_{bj} \\ &= -(XX^T Q^T)_{ab} + (WQXX^T Q^T)_{ab} \end{aligned} \quad (2)$$

类似地, 可以得到 $F_{w_{ab}}(w)$ 在 w_{ab} 处的二阶导数:

$$\begin{aligned} F''_{w_{ab}}(w_{ab}) &= \frac{\partial (-(XX^T Q^T)_{ab} + (WQXX^T Q^T)_{ab})}{\partial w_{ab}} \\ &= \frac{\partial (-(XX^T Q^T)_{ab})}{\partial w_{ab}} + \frac{\partial (WQXX^T Q^T)_{ab}}{\partial w_{ab}} \\ &= (QXX^T Q^T)_{ab} \end{aligned} \quad (3)$$

以及其它关于 w 的导数:

$$F^{(n)}_{w_{ab}}(w) = 0 (n \geq 3) \quad (4)$$

因此, $F_{w_{ab}}(w)$ 在 w_{ab} 处的 Taylor 展开式是:

$$\begin{aligned} F_{w_{ab}}(w) &= F_{w_{ab}}(w_{ab}) + F'_{w_{ab}}(w_{ab})(w - w_{ab}) + \frac{1}{2} F''_{w_{ab}}(w_{ab})(w - w_{ab})^2 \end{aligned} \quad (5)$$

此时, 为了在数值计算中强调 w_{ab} 的计算时间, 用 $w_{ab}^{(j)}$ 来表示 $F_{w_{ab}}(w)$ 表达式括号中的 w_{ab} , 式(5)可表示为

$$\begin{aligned} F_{w_{ab}}(w) &= F_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j)}) + F'_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j)})(w - w_{ab}^{(j)}) + \frac{1}{2} F''_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j)})(w - w_{ab}^{(j)})^2 \\ &= F_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j)}) + F'_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j)})(w - w_{ab}^{(j)}) + \frac{1}{2} (QXX^T Q^T)_{ab} (w - w_{ab}^{(j)})^2 \end{aligned} \quad (6)$$

现在, 定义函数

$$\begin{aligned} G_{w_{ab}}(w, w_{ab}^{(j)}) &= F_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j)}) + F'_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j)})(w - w_{ab}^{(j)}) + \frac{1}{2} \frac{(WQXX^T Q^T)_{ab}}{w_{ab}^{(j)}} (w - w_{ab}^{(j)})^2 \end{aligned} \quad (7)$$

定理 1 $G_{w_{ab}}(w, w_{ab}^{(j)})$ 是 $F_{w_{ab}}(w)$ 的一个辅助函数。

证明: 当 $w_{ab}^{(j)} = w$ 时, $G_{w_{ab}}(w, w_{ab}^{(j)}) = F_{w_{ab}}(w)$ 。下面证明, 当 $w_{ab}^{(j)} \neq w$ 时, $G_{w_{ab}}(w, w_{ab}^{(j)}) \geq F_{w_{ab}}(w)$ 。

因为 $W \geq 0, Q \geq 0, X \geq 0$,

$$\begin{aligned} (WQXX^T Q^T)_{ab} &= \sum_k W_{ak}^{(j)} (QXX^T Q^T)_{kb} \\ &\geq W_{ab}^{(j)} (QXX^T Q^T)_{ab} \end{aligned}$$

当 $W_{ab}^{(j)} > 0$ 时,

$$\frac{(WQXX^T Q^T)_{ab}}{W_{ab}^{(j)}} \geq (QXX^T Q^T)_{ab}$$

事实上, $W_{ab}^{(j)} = w_{ab}^{(j)}$ 。所以

$$\frac{(WQXX^T Q^T)_{ab}}{w_{ab}^{(j)}} \geq (QXX^T Q^T)_{ab}$$

从而

$$G_{w_{ab}}(w, w_{ab}^{(j)}) \geq F_{w_{ab}}(w)$$

根据文献[6]的定义 1 可知, $G_{w_{ab}}(w, w_{ab}^{(j)})$ 是 $F_{w_{ab}}(w)$ 的一个辅助函数。

定理 2 $F_{w_{ab}}(w)$ 在更新规则

$$w_{ab}^{(j+1)} = \arg \min_w G_{w_{ab}}(w, w_{ab}^{(j)})$$

下是非增的。

证明: 因为

$$\begin{aligned} F_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j+1)}) &\leq G_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j+1)}, w_{ab}^{(j)}) \\ &\leq G_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j)}, w_{ab}^{(j)}) = F_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j)}) \end{aligned}$$

所以, $F_{w_{ab}}(w)$ 是非增的。

使用辅助函数的定义和定理 2, 只要能够获得 $G_{w_{ab}}(w, w_{ab}^{(j)})$ 的最小值, 就可以得到 $F_{w_{ab}}(w)$ 的局部最小值。为了获得 $F_{w_{ab}}(w)$ 的局部最小值, 可以通过计算 $G_{w_{ab}}(w, w_{ab}^{(j)})$ 的一阶导数获得。于是, 由

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{w_{ab}}(w, w_{ab}^{(j)})}{\partial w} &= F'_{w_{ab}}(w_{ab}^{(j)}) + \frac{(WQXX^T Q^T)_{ab}}{w_{ab}^{(j)}} (w - w_{ab}^{(j)}) \\ &= -(XX^T Q^T)_{ab} + (WQXX^T Q^T)_{ab} + \frac{(WQXX^T Q^T)_{ab}}{w_{ab}^{(j)}} (w - w_{ab}^{(j)}) = 0 \end{aligned}$$

解得

$$w = w_{ab}^{(j)} \frac{(XX^T Q^T)_{ab}}{(WQXX^T Q^T)_{ab}}$$

即, w_{ab} 的迭代计算规则是

$$w_{ab}^{(j+1)} = w_{ab}^{(j)} \frac{(XX^T Q^T)_{ab}}{(WQXX^T Q^T)_{ab}} \quad (8)$$

使用迭代式(8), 可以使辅助函数 $G_{w_{ab}}(w, w_{ab}^{(j)})$ 获得局部最小值。如果 W 的所有元素都通过式(8)更新, 目标函数 F 就可以获得局部最小值。

式(8)就是基矩阵 W 的迭代更新规则。

1.2 线性变换矩阵 Q 的迭代更新规则

类似地, 可以得到函数 $F_{q_{ab}}(q)$, $F_{q_{ab}}(q)$ 的所有导数是:

$$\begin{aligned} F'_{q_{ab}}(q_{ab}) &= \frac{\partial F}{\partial q_{ab}} = \frac{\partial (\frac{1}{2} \sum_{ij} [X_{ij} - (WQX)_{ij}]^2)}{\partial q_{ab}} \\ &= -(W^T XX^T)_{ab} + (W^T WQXX^T)_{ab} \\ F''_{q_{ab}}(q_{ab}) &= \frac{\partial (-(W^T XX^T)_{ab} + (W^T WQXX^T)_{ab})}{\partial q_{ab}} \\ &= (W^T W)_{aa} (XX^T)_{bb} \end{aligned}$$

$$F^{(n)}_{q_{ab}}(q) = 0, \text{ s. t. } n \geq 3$$

因此, $F_{q_{ab}}(q)$ 在 q_{ab} 处的 Taylor 展开式是:

$$\begin{aligned} F_{q_{ab}}(q) &= F_{q_{ab}}(q_{ab}) + F'_{q_{ab}}(q_{ab})(q - q_{ab}) + \frac{1}{2} F''_{q_{ab}}(q_{ab})(q - q_{ab})^2 \end{aligned} \quad (9)$$

同时, 考虑到数值计算, 式(9)可表示为:

$$\begin{aligned} F_{q_{ab}}(q) &= F_{q_{ab}}(q_{ab}^{(j)}) + F'_{q_{ab}}(q_{ab}^{(j)})(q - q_{ab}^{(j)}) + \frac{1}{2} (W^T W)_{aa} \\ &\quad (XX^T)_{bb} (q - q_{ab}^{(j)})^2 \end{aligned} \quad (10)$$

现在, 定义函数

$$G_{q_{ab}}(q, q_{ab}^{(j)}) = F_{q_{ab}}(q_{ab}^{(j)}) + F'_{q_{ab}}(q_{ab}^{(j)})(q - q_{ab}^{(j)}) + \frac{1}{2} \frac{(W^T W Q X X^T)_{ab}}{q_{ab}^{(j)}} (q - q_{ab}^{(j)})^2 \quad (11)$$

则当 $q_{ab}^{(j)} = q$ 时, $G_{q_{ab}}(q, q_{ab}^{(j)}) = F_{q_{ab}}(q)$ 。而

$$\begin{aligned} (W^T W Q X X^T)_{ab} &= \sum_k (W^T W)_{ak} (Q X X^T)_{kb} \\ &\geq (W^T W)_{aa} (Q X X^T)_{ab} \\ &= (W^T W)_{aa} \sum_l Q_{al} (X X^T)_{lb} \\ &\geq (W^T W)_{aa} Q_{ab}^{(j)} (X X^T)_{bb} \end{aligned}$$

当 $Q_{ab}^{(j)} > 0$ 时,

$$\frac{(W^T W Q X X^T)_{ab}}{Q_{ab}^{(j)}} \geq (W^T W)_{aa} (X X^T)_{bb}$$

事实上, $Q_{ab}^{(j)} = q_{ab}^{(j)}$, 所以

$$G_{q_{ab}}(q, q_{ab}^{(j)}) \geq F_{q_{ab}}(q)$$

从而, $G_{q_{ab}}(q, q_{ab}^{(j)})$ 是 $F_{q_{ab}}(q)$ 的辅助函数。故由

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{q_{ab}}(q, q_{ab}^{(j)})}{\partial q} &= F'_{q_{ab}}(q_{ab}^{(j)}) + \frac{(W^T W Q X X^T)_{ab}}{q_{ab}^{(j)}} (q - q_{ab}^{(j)}) \\ &= -(W^T X X^T)_{ab} + (W^T W Q X X^T)_{ab} + \\ &\quad \frac{(W^T W Q X X^T)_{ab}}{q_{ab}^{(j)}} (q - q_{ab}^{(j)}) = 0 \end{aligned}$$

解得

$$q = q_{ab}^{(j)} \frac{(W^T X X^T)_{ab}}{(W^T W Q X X^T)_{ab}}$$

因此, q_{ab} 的迭代更新规则是

$$q_{ab}^{(j+1)} = q_{ab}^{(j)} \frac{(W^T X X^T)_{ab}}{(W^T W Q X X^T)_{ab}} \quad (12)$$

如果 Q 的所有元素都通过式(12)更新, 目标函数 F 就可以获得局部最小值。

式(12)就是线性变换矩阵 Q 的迭代更新规则。

1.3 算法步骤

交替使用式(8)和式(12), 可以更新 W 和 Q , 从而使目标函数 F 达到局部最小值, 即算法是收敛的。算法步骤如下:

Step1 用非负数据初始化矩阵 W 、 Q 和 X ;

Step2 用式(8)更新 W ;

Step3 用式(12)更新 Q ;

Step4 重复 Step2 和 Step3 直到算法收敛。

利用该算法, 可以得到基矩阵 W 和线性变换矩阵 Q 。

2 实验与分析

为了在收敛性、基矩阵、特征提取方面验证算法的有效性, 并考察其算法效率, 将该算法与 NMF、ONMF^[7]、LNMF^[8]、NMFOS^[9]、DNMF^[10] 算法进行实验比较。实验中, X 取 ORL 人脸数据库中每个人的前 5 幅图像, 共 200 个数据, 将基矩阵、权重矩阵和线性变换矩阵等随机初始化为非负矩阵, 置基矩阵的列基为 80。为了减少计算量, 加快运行速度, 每个图像缩小为原来的四分之一。每个算法迭代 5000 次。这些算法的目标函数是:

$$\text{NMF: } F = \frac{1}{2} \|X - WH\|_F^2$$

$$\text{ONMF: } F = \frac{1}{2} \|X - WSH\|_F^2$$

$$\text{LNMF: } D(X \| WH) = KL(X \| WH) + \alpha \sum_k (W^T W)_{kk} - \beta \sum_k (HH^T)_{kk}$$

$$\text{NMFOS: } F = \|X - WH\|_F^2 + \lambda \|W^T W - I\|_F^2$$

$$\text{DNMF: } D(X \| WH) = KL(X \| WH) + \alpha \sum_k (W^T W)_{kk} - \beta \sum_k (HH^T)_{kk} + \gamma \text{tr}[S_w] - \delta \text{tr}[S_b]$$

其中, S_w 和 S_b 分别是关于权重矩阵 H 列向量之间的类内散度矩阵和类间散度矩阵, 且

$$KL(X \| WH) = \sum_{ij} (X_{ij} \log \frac{X_{ij}}{(WH)_{ij}} - X_{ij} + (WH)_{ij})$$

本实验中, ONMF 的 3 个矩阵都要迭代计算; LNMF 中, $\alpha=1, \beta=0.5$; NMFOS 只基于该目标函数迭代计算, 另一个目标函数未用, 且 $\lambda=3$; DNMF 中, $\alpha=1, \beta=0.5, \gamma=1.5, \delta=0.5$ 。

2.1 算法收敛性及比较

算法的目标函数值随迭代次数的变化曲线如图 1 所示。

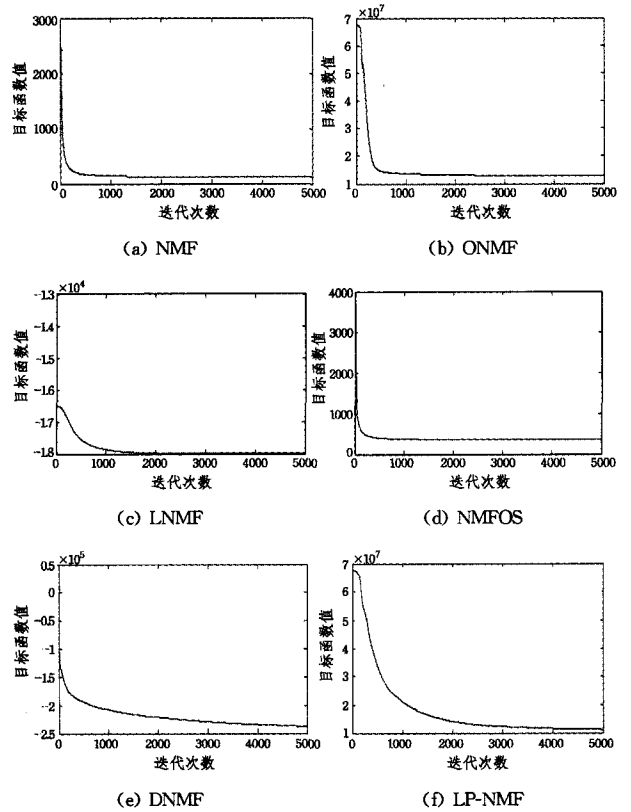


图 1 目标函数值随迭代次数的变化曲线

从图中可以看出, 算法都是收敛的。NMF、ONMF 和 NMFOS 算法收敛速度较快。LNMF 到 2000 多步, 就较稳定了。LP-NMF 比 DNMF 收敛快, 但仍然较慢。其原因是: 本算法要求 X 与 WQX 尽可能接近, 而在 WQX 中已经含有 X , 这使得寻找合适的 W 和 Q 就可能更难; 另外, 迭代公式中, 矩阵乘法较多, 计算量更大, 从而使得收敛变慢。而 DNMF 每次迭代, 还必须计算权重矩阵 H 中各类别的列向量均值, 迭代公式相对 LNMF 更复杂, 计算量很大, 因此, 收敛也慢。

2.2 基矩阵分析及比较

获得的基矩阵图像如图 2 所示, 分别使用向量 $W^T x$ 、 $(W^T W)^{-1} W^T x$ 和 Qx 作为数据 x 的特征向量, 重建 x , 结果

如图 3 所示。

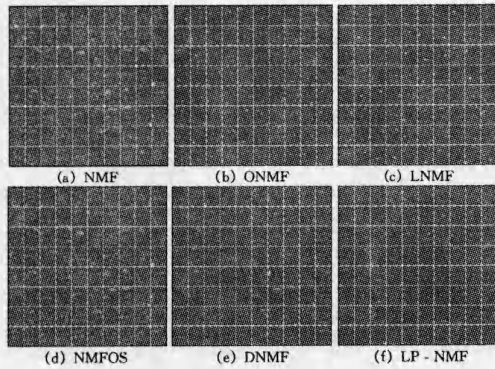


图 2 基矩阵图像

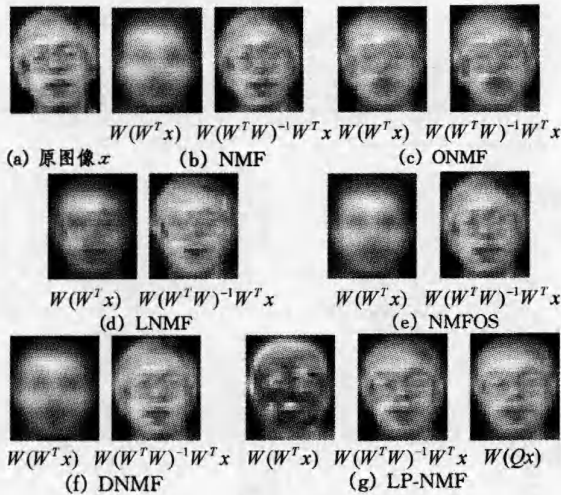


图 3 原图像和重建图像

从基矩阵图像中可以看到:本算法的基矩阵与 ONMF、LNMF 一样,是非常稀疏的。而对于 NMFOS,由于只进行一个目标函数的优化,使得基矩阵还不是很稀疏。但相对于 NMF,由于有正交约束,它又比 NMF 的基矩阵稀疏。而 DNMF 由于要考虑类别信息,基矩阵相对于 LNMF 来说,并不是很稀疏。本算法通过优化目标函数 F 使基矩阵 W 趋向于正交,效果非常好。

从重建图像中可以看到:重建图像都是有效的,这说明基矩阵 W 都是有效的。使用 $W^T x$ 作为数据 x 的特征向量时重建的效果比使用 $(W^T W)^{-1} W^T x$ 作为特征向量还差,这说明:虽有正交约束,但获得的结果都是近似正交的。在 LP-NMF 中,利用 $W(W^T x)$ 重建的效果最差,利用 $W(Qx)$ 与利用 $W(W^T W)^{-1} W^T x$ 重建的效果相当。故使用 Qx 为数据 x 的特征向量。

另外,基矩阵的正交性和稀疏性的量化计算,可参考文献 [3,11]。毋庸置疑,因为本文的方法仍然基于式(1)的目标函数进行优化,所以基矩阵仍然具有较好的正交性和稀疏性,在此,不再赘述。

3 人脸识别结果及分析

在学习阶段, X 取 ORL 人脸数据库中每个人的前 5 幅图像,共 200 个数据。为了减少计算量,加快运行速度,每个图

像缩小为原来的四分之一。将矩阵 W 和 Q 随机初始化为非负矩阵,算法收敛后获得矩阵 Q 和特征矩阵 QX ,该特征矩阵作为模板库。

在测试识别阶段,将 ORL 人脸数据库中每个人的后 5 幅图像共 200 个数据作为测试数据,并将每个图像缩小为原来的四分之一。利用学习阶段获得的矩阵 Q ,用 Qx 计算测试图像 x 的特征向量,采用模板匹配法进行人脸识别。将该方法与 NMF、ONMF、LNMF、NMFOS 和 DNMF 方法进行比较,基矩阵的列基(即:特征子空间维数)取不同值时的识别结果如图 4 所示。

从图 4 中可以看出,使用 LP-NMF 的识别率明显比使用 NMF 和 ONMF 的识别率高,这是因为:LP-NMF 的式(1)中目标函数强制基矩阵 W 趋向于正交,使得 LP-NMF 中的基矩阵比 NMF 中的基矩阵具有更强的正交性,从而 LP-NMF 的特征向量 Qx 具有更好的区分性,而 ONMF 中的正交约束并没有明显提高人脸识别率。同时,当基矩阵的列基大于等于 60 时,使用 LP-NMF 的识别率比使用 LNMF、NMFOS 的识别率略高,这是因为:LNMF 和 NMFOS 的目标函数对基矩阵 W 也有近似正交的约束,从而使得特征向量 $(W^T W)^{-1} W^T x$ 也有较好的区分性。但 LP-NMF 的特征向量 Qx 的区分性更好。由于 DNMF 在 LNMF 的基础上再考虑了样本的类别信息,因此它的识别率也较高。

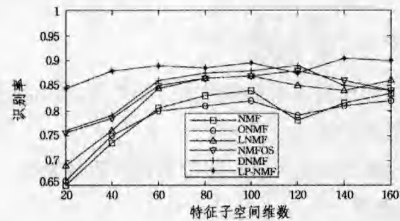


图 4 ORL 人脸识别结果对比

另外,当 LP-NMF 基矩阵的列基在 40 到 160 之间时,识别率变得较稳定了。这是因为:LP-NMF 的基矩阵总是具有较好的正交性和稀疏性,使得识别率受基矩阵列基数量的影响较小。

结束语 本文提出了一种线性投影非负矩阵分解方法 LP-NMF,给出了该方法的算法步骤。相对于 LPBNMF,其迭代公式更加简单。相对于 NMF 等方法,本方法获得的基矩阵具有更好的正交性和稀疏性。在人脸识别中,相对于 NMF 及一些扩展方法,本方法具有更高的识别率。

但是,由于该算法的目标函数决定寻优过程更难,且仍然是交替更新方法,迭代公式中矩阵乘法较多,一步迭代的计算量较大,使得算法收敛速度较慢,这是今后需要进一步解决的问题。

参考文献

- [1] Lee D D, Seung H S. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization[J]. Nature, 1999, 401(6755):788-791
- [2] Berry M W, Browne M, Langville A N, et al. Algorithms and applications for approximate non-negative matrix factorization[J].

- [3] 李乐, 章毓晋. 基于线性投影结构的非负矩阵分解[J]. 自动化学报, 2010, 36(1): 23-39
- [4] 林庆, 李佳, 雍建平, 等. 一种改进的基于 NMF 的人脸识别方法[J]. 计算机科学, 2012, 39(5): 243-245
- [5] Yuan Zhi-jian, Oja E. Projective nonnegative matrix factorization for image compression and feature extraction[C]//Proceedings of the fourteenth Scandinavian Conference on Image Analysis. 2005: 333-342
- [6] Lee D D, Seung H S. Algorithms for non-negative matrix factorization[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2001, 13: 556-562
- [7] Yoo J, Choi S. Orthogonal non-negative matrix tri-factorization for co-clustering: multiplicative updates on stiefel manifolds[J]. Information Processing & Management, 2010, 46(5): 559-570

- [8] Li S Z, Hou Xin-wen, Zhang Hong-jiang, et al. Learning spatially localized, parts-based representation[C]//Proceedings of the IEEE conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2001: 1-6
- [9] Li Zhao, Wu Xin-dong, Peng Hong. Non-negative matrix factorization on orthogonal subspace[J]. Pattern Recognition Letters, 2010, 31(9): 905-911
- [10] Buciu I, Naformita I. Non-negative matrix factorization methods for face recognition under extreme lighting variations[C]//Proceedings of the International Symposium on Signals, Circuits and Systems. 2009: 125-128
- [11] Yang Zhi-rong, Yuan Zhi-jian, Laaksonen J. Projective nonnegative matrix factorization with applications to facial image processing[J]. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2007, 21(8): 1353-1362

(上接第 238 页)

ZDT4 上表现尤为突出。另外从图 9—图 13 可以看出, DELS_NSGA2 的收敛性与 NSGA2 相当, 均能有效收敛到真实的 Pareto 前沿。

表 2 给出了两种算法在不同测试函数上的分布性度量 (SP) 结果。其中的数据为算法运行 10 次统计得到的 SP 平均值 SP(AVG) 和方差 SP(σ), 表中加粗的数据为最好值。

表 2 算法的分布性平均 SP 及其方差 σ 的比较

	DELS_NSGA2		NSGA2	
	SP(Avg)	SP(σ)	SP(Avg)	SP(σ)
ZDT1	0.011507	0.002289	0.015961	0.001972
ZDT2	0.011773	0.002668	0.016862	0.002284
ZDT3	0.012203	0.001893	0.016023	0.003657
ZDT4	0.013037	0.0021705	0.017641	0.00094
ZDT6	0.011923	0.004101	0.015522	0.001173

从表 2 可以看出, DELS_NSGA2 算法的 SP 均值在 ZDT 系列的 5 个测试例中的表现都要明显好于 NSGA2, 说明 DELS_NSGA2 算法能够有效地改善解群分布性。

结束语 本文提出了一种带差分局部搜索的改进型 NSGA2 算法, 算法利用差分进化中变异算子的定向引导思想, 抽取其中的差分向量, 并与经典的 NSGA2 算法相结合以改善解群的分布性。

利用 5 个 ZDT 测试例作为基准测试函数, 比较了 DELS_NSGA2 算法和 NSGA2 算法的分布性, 实验结果表明 DELS_NSGA2 算法获得的解群在分布的均匀性和广度上要明显优于 NSGA2 算法。不仅如此, DELS_NSGA2 算法的差分局部搜索过程的时间复杂度为 $O(MN \log N)$, 其中的非支配排序算子的时间复杂度为 $O(MN^2)$, 整个算法的时间复杂度为 $O(MN^2)$, 与 NSGA2 算法的时间复杂性相当。因此, DELS_NSGA2 算法是一种有前途的算法。

未来将把 DELS_NSGA2 算法应用在更多的工程设计与科学计算问题中, 以进一步测试其在各种环境中的表现, 不断改善其性能。

参考文献

- [1] Schaffer J D. Multiple objective optimization, with vector evalua-

- ted genetic algorithms[C]//Proceedings of International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications. Pittsburgh, PA, 1985: 93-100
- [2] Zitzler E, Thiele L. Multi-objective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3(4): 257-271
- [3] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm[R]. TIK2Report 103. 2001
- [4] Srinivas N, Deb K. Multi-objective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms[J]. Evolutionary Computation, 1994, 2(3): 221-248
- [5] Deb K, Agrawal S, Pratab A, et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization; NSGAII[R]. KanGAL Report 200001. Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 2000
- [6] Corne D W, Knowles J D, Oates M J. The Pareto envelope-based selection algorithm for multiobjective optimization[C]//Schonauer M, Deb K, Rudolph G, et al. Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference. New York: Springer, 2000: 839-848
- [7] Deb K, Mohan M, Mishra S. A fast multi-objective evolutionary algorithm for finding well-spread Pareto-optimal solutions[R]. KanGAL Report No 2003002. 2003
- [8] Storn R, Price K. Differential Evolution-A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces[J]. Journal of Global Optimization, 1997, 11(4): 341-359
- [9] Noman N, Iba H. Accelerating differential evolution using an adaptive local search[J]. IEEE Trans, Evolut. Comput., 2008, 12: 107-125
- [10] 刘波, 王凌, 金以慧. 差分进化算法研究发展[J]. 控制与决策, 2007, 34(3): 1-5
- [11] 郑金华. 多目标进化算法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 23-24
- [12] Schott J R. Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization[D]. Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1995