

Flou 值模糊集的分解定理

陈黎明 郭嗣琮 毕玲玲

(辽宁工程技术大学理学院 阜新 123000)

摘要 为了弥补区间值模糊集和三参数模糊集在模糊信息表达方面的不足,在 Flou 集的基础上,提出了一种新的 L 模糊集——Flou 值模糊集,并用投票模型对其作出解释。定义了 8 种 Flou 值模糊集的截集,并讨论了它们的性质。然后,基于 Flou 值模糊集的截集建立了分解定理,揭示了 Flou 值模糊集和 Flou 集之间的联系。本工作为处理模糊信息提供了一种新的工具,并为 Flou 值模糊集的研究和应用奠定了初步的理论基础。

关键词 模糊集, Flou 集, Flou 值模糊集, 截集, 分解定理

中图分类号 TP18 **文献标识码** A

Decomposition Theorem of Flou-valued Fuzzy Sets

CHEN Li-ming GUO Si-cong BI Ling-ling

(College of Science, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

Abstract This paper introduced a new kind of L-fuzzy set which is called Flou-valued fuzzy set to consider the deficiency of interval-valued fuzzy set and three-parameters interval-valued fuzzy set in expressing fuzzy information. The authors put forward eight kinds of cut set on the Flou-valued fuzzy sets. Based on them, the decomposition theorems were obtained and its effectiveness was verified by a practical account case.

Keywords Fuzzy set, Flou set, Flou-valued set, Cut set, Decomposition theorem

1 引言

Flou 集是 1968 年 Gentilhomme^[1]提出的一种新的非经典集合,他将论域分作中心元素、周边元素和非元素 3 类。随后,文献[2-5]对 Flou 集作了进一步的研究。

区间值模糊集作为模糊集的拓展形式,1975 年由 Gorzanczyk^[6]和 Turkesn^[7]首先提出。区间值模糊集比模糊集能够更好地反映人们判断的模糊性和波动性,但是,为了覆盖整个取值范围,区间可能取得过大,造成决策和推理的不确定程度增大。为此,文献[8]引入三参数区间值模糊集,并针对三参数区间值模糊集所刻画的一种特定的多属性决策问题,利用记分函数,给出了一种新的决策方法。文献[9]从人们刻画一个概念常常采用三值的形式出发,提出了三维模糊集。三参数模糊集为了增强模糊信息的表示,引入一个取值可能性最大的重心点,此重心点是单点隶属度。三维模糊集的三值均是单点隶属度,同样不易确定。考虑到这一点,我们利用一种特殊的 Flou 集-Flou 数,提出了一种新的 L 模糊集,即 Flou 值模糊集,从而既增强了模糊信息的表示,又避免了在确定单点隶属度时遇到的困难。

分解定理是模糊集理论的基本定理之一,它提供了将模糊集合分解成经典集合的工具,揭示了模糊集合和经典集合之间的联系。文献[10]根据模糊点和模糊集的邻属关系定义

了模糊集的 4 类截集,建立了相应的分解定理。文献[11]分析了已有直觉模糊集和区间值模糊集的截集的不足,将其截集定义为三值模糊集,建立了区间值模糊集和直觉模糊集的分解定理。文献[12]利用 Vague 集的二元截集建立了 Vague 集的分解定理。文献[13]利用等价类的 F-分解形式给出了粗糙模糊集的分解定理。文献[14]研究了模糊粗糙集的分解定理,将模糊粗糙集分解成一簇粗糙模糊集的组合。文献[15]将模糊推理模式通过分解定理转化为经典二值逻辑系统推理模式,提出了具有还原性的模糊推理方法。文献[16]借助分解定理说明了利用二维空间地图的等高线描述三维空间地貌的科学性。文献[17]运用分解定理将离散空间目标模糊化实现连续化,建立离散空间实体的拓扑关系。

本文考虑到区间值模糊集和三参数模糊集在模糊信息表达上的不足,提出了一种新的 L 模糊集——Flou 值模糊集,并研究了 Flou 值模糊集的截集和分解定理。

2 Flou 值模糊集的定义及运算

定义 1^[1] 设 U 为论域, $P(U)$ 为 U 上分明集合的全体, $A_i \in P(U)$, $i = 1, 2, \dots, m$, 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_m$, 则称 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 为 m -Flou 集。记 U 上 m -Flou 集的全体为 $FLS^m(U)$ 。

设论域 U 上的两个 m -Flou 集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, $B =$

到稿日期:2012-10-17 返修日期:2013-03-19 本文受教育部高校博士学科点专项科研基金(博导类)(20102121110002)资助。

陈黎明(1986—),男,硕士生,主要研究方向为模糊信息处理、非经典集合理论, E-mail: 670856479@qq.com; 郭嗣琮(1951—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为模糊控制理论与应用、系统决策与预测、模糊信息处理、信息科学与软计算; 毕玲玲(1986—),女,硕士生,主要研究方向为生物数学。

$\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$, 则定义 Flou 集的运算如下:

- (1) 包含: $A \supseteq B \Leftrightarrow A_1 \supseteq B_1, A_2 \supseteq B_2, \dots, A_m \supseteq B_m$;
- (2) 相等: $A = B \Leftrightarrow A_1 = B_1, A_2 = B_2, \dots, A_m = B_m$;
- (3) 并集: $A \cup B = \{A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2, \dots, A_m \cup B_m\}$;
- (4) 交集: $A \cap B = \{A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2, \dots, A_m \cap B_m\}$;
- (5) 余集: $A^c = \{A_1^c, A_2^c, \dots, A_m^c\}$.

定义 2 设 U 为论域, $x \in U, A = (A_1, A_2, \dots, A_m) \in$

$FLS^m(U)$, 则称 $\mu_A(x) = \frac{\sum_{i=1}^m \chi_{A_i}(x)}{m}$ 为 x 对 A 的 Flou 隶属度。

其中, $\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A_i \\ 1, & x \in A_i \end{cases}$.

定义 3 设 $N(I)$ 表示 $[0, 1]$ 上所有区间数的全体, $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \in FLS^m(R)$, 若对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 有 $A_i \in N(I)$, 则称 A 为 m -Flou 数。记 m -Flou 数的全体为 FLN^m 。

例如 $A = \{[0.3, 0.5], [0.2, 0.6]\}$ 为一个 2-Flou 数。显然, 当 $m=1$ 时, A 为 $[0, 1]$ 上的区间数。

设 m -Flou 数 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}, A_i = [a_i, b_i], i=1, 2, \dots, m$ 。由于 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_m$, 则有 $0 \leq a_m \leq a_{m-1} \leq \dots \leq a_1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_m \leq 1$ 。因此, 一个 m -Flou 数可以由 $[0, 1]$ 上的 $2m$ 个单调递增的实数 $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, b_1, b_2, \dots, b_m$ 组成的向量描述。在不至于引起混淆的情况下, 一个 m -Flou 数可记为 $A = (a_1, a_2, \dots, a_{2m})$, 其中, $A_1 = [a_m, a_{m+1}], A_2 = [a_{m-1}, a_{m+2}], \dots, A_m = [a_1, a_{2m}]$ 。

例如, 2-Flou 数 $A = \{[0.3, 0.5], [0.2, 0.6]\}$ 可以记为 $A = (0.2, 0.3, 0.5, 0.6)$ 。

定义 4 设 U 为论域, 称映射

$$A: U \rightarrow FLN^m, x \mapsto A(x) = (a_1(x), a_2(x), \dots, a_{2m}(x))$$

为 U 上的 m -Flou 值模糊集, $x \in U$ 。

通俗地说, 若论域 U 上的模糊集的隶属函数取值为 $[0, 1]$ 上的 m -Flou 数, 则称为 m -Flou 值模糊集。

如不作特殊说明, 本文主要讨论 2-Flou 值模糊集, 论域 U 上的 2-Flou 值模糊集一般记为

$$A(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x)), \forall x \in U$$

其中 $0 \leq a_1(x) \leq a_2(x) \leq a_3(x) \leq a_4(x) \leq 1$ 。记 $FLVFS^2(U)$ 为 U 上 2-Flou 值模糊集的全体。

可用投票模型来理解 2-Flou 值模糊集的意义。假设在一批人的投票中, 有 30% 人投赞成票, 40% 人投反对票, 30% 人投弃权票。用图 1(a) 表示“赞成”和“反对”两种立场的分布比例, 则此投票结果可用区间数 $[0.3, 0.6]$ 来表示。通常投弃权票的人具有一定的倾向性。若投弃权票的 3 人中, 1 人倾向投赞成票, 1 人倾向投反对票, 1 人仍选择投弃权票, 考虑到投弃权票人的倾向性后, 投票结果可以用图 1(b) 表示, 记作 $\{[0.4, 0.5], [0.3, 0.6]\}$ 。由于 $[0.4, 0.5] \subseteq [0.3, 0.6]$, 于是 $\{[0.4, 0.5], [0.3, 0.6]\}$ 构成一个 2-Flou 数, 它能比区间数 $[0.3, 0.6]$ 表达更丰富的信息。

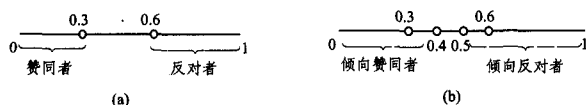


图 1 投票模型

Flou 值模糊集利用 2-Flou 数表达模糊信息, 从而增强了

区间值模糊集表达信息的精度。另外, 在确定隶属度的取值时, 只需给出嵌套的两个区间, 无需确定隶属度的单点值, 从而避免了三参数区间值模糊集或三维模糊集在确定单点隶属度时遇到的困难。

2-Flou 值模糊集的隶属函数图形如图 2 所示。

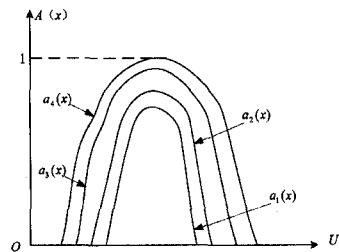


图 2 2-Flou 值模糊集

下面给出 Flou 值模糊集的运算及其性质。

设 U 为论域, $A = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x)), B = (b_1(x), b_2(x), b_3(x), b_4(x)) \in FLVFS^2(U)$, 定义 Flou 值模糊集的运算如下。

(1) 包含

$$A \supseteq B \Leftrightarrow a_1(x) \leq b_1(x), a_2(x) \leq b_2(x), a_3(x) \geq b_3(x), a_4(x) \geq b_4(x), \forall x \in U$$

(2) 相等

$$A = B \Leftrightarrow a_1(x) = b_1(x), a_2(x) = b_2(x), a_3(x) = b_3(x), a_4(x) = b_4(x), \forall x \in U$$

(3) 并集

$$A \cup B = (a_1(x) \vee b_1(x), a_2(x) \vee b_2(x), a_3(x) \vee b_3(x), a_4(x) \vee b_4(x)), \forall x \in U$$

(4) 交集

$$A \cap B = (a_1(x) \wedge b_1(x), a_2(x) \wedge b_2(x), a_3(x) \wedge b_3(x), a_4(x) \wedge b_4(x)), \forall x \in U$$

(5) 余集

$$A^c = (1 - a_4(x), 1 - a_3(x), 1 - a_2(x), 1 - a_1(x)), \forall x \in U$$

记 $\tilde{U} = (1, 1, 1, 1), \tilde{\emptyset} = (0, 0, 0, 0)$, 则 $(FLVFS^2(U), \cup, \cap, C, \tilde{U}, \tilde{\emptyset})$ 构成一个完备格。于是, Flou 值模糊集可以看作一个 L 模糊集。

3 Flou 值模糊集的截集

在介绍 2-Flou 值模糊集的截集之前, 先简要回顾一下模糊集的截集的相关概念。

定义 5^[18] 设 A 为论域 U 上的一个模糊集, 隶属函数为 $A(x), \lambda \in [0, 1]$, 称

$$A_\lambda = \{x | x \in U, A(x) \geq \lambda\}, A_{\bar{\lambda}} = \{x | x \in U, A(x) > \lambda\}$$

分别为 A 的 λ 上截集和 λ 强上截集。

称 $A^\lambda = \{x | x \in U, A(x) \leq \lambda\}, A^{\bar{\lambda}} = \{x | x \in U, A(x) < \lambda\}$ 分别为 A 的 λ 下截集和 λ 强下截集。

称 $A_{[\lambda]} = \{x | x \in U, A(x) \geq 1 - \lambda\}, A_{[\bar{\lambda}]} = \{x | x \in U, A(x) > 1 - \lambda\}$ 分别为 A 的 λ 上重截集和 λ 强上重截集。

称 $A^{[\lambda]} = \{x | x \in U, A(x) \leq 1 - \lambda\}, A^{[\bar{\lambda}]} = \{x | x \in U, A(x) < 1 - \lambda\}$ 分别为 A 的 λ 下重截集和 λ 强下重截集。

设 U 为论域, $A = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x)) \in FLVFS^2(U)$ 且 $\lambda \in [0, 1]$, 对于 $x \in U, a_i(x)$ 表示 x 属于 A 的

程度,且 $a_1(x) \leq a_2(x) \leq a_3(x) \leq a_4(x)$ 。为了表示 x 属于 A 的程度和水平 λ 的关系,我们以直线 $y=\lambda$ 去截 A 的隶属函数曲线得到 $a_{i,\lambda} = \{x | x \in U, a_i(x) \geq \lambda\}, i=1,2,3,4$, 如图 3 所示。

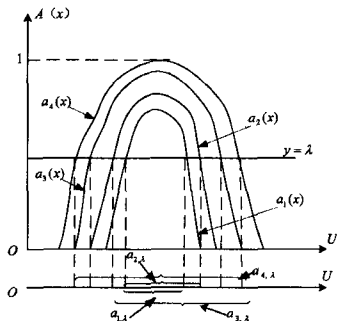


图 3 2-Flou 值模糊集 A 与水平 λ 的关系

$a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x)$ 将 $[0, 1]$ 分成 5 部分: $[0, a_1(x)], (a_1(x), a_2(x)], (a_2(x), a_3(x)], (a_3(x), a_4(x)], (a_4(x), 1]$

当 $\lambda \in [0, a_1(x)]$ 时, $x \in a_{i,\lambda}, i=1,2,3,4$, x 对 A_λ 的 Flou 隶属度为 $4/4=1$, 表示 x 对于水平 λ 来说一定属于 A 。

当 $\lambda \in (a_1(x), a_2(x)]$ 时, $x \in a_{i,\lambda}, i=2,3,4$, x 对 A_λ 的 Flou 隶属度为 $3/4$, 表示 x 对于水平 λ 来说既有属于 A 的程度, 又有不属于 A 的程度, 我们认为 x 对于水平 λ 来说属于 A 的程度为 $3/4$ 。

当 $\lambda \in (a_2(x), a_3(x)]$ 时, $x \in a_{i,\lambda}, i=3,4$, x 对 A_λ 的 Flou 隶属度为 $2/4=1/2$, 我们认为 x 对于水平 λ 来说属于 A 的程度为 $3/4$ 。

当 $\lambda \in (a_3(x), a_4(x)]$ 时, $x \in a_{i,\lambda}, i=4$, x 对 A_λ 的 Flou 隶属度为 $1/4$, 我们认为 x 对于水平 λ 来说属于 A 的程度为 $1/4$ 。

当 $\lambda \in (a_4(x), 1]$ 时, $x \notin a_{i,\lambda}, i=1,2,3,4$, x 对 A_λ 的 Flou 隶属度为 0, 我们认为 x 对于水平 λ 来说属于 A 的程度为 0。

在上述分析的基础上, 我们就可以给出 Flou 值模糊集的截集的定义。

定义 6 设 $A = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x))$ 为论域 U 上的一个 Flou 值模糊集, $\lambda \in [0, 1]$, 则称 $A_\lambda = \{a_{1,\lambda}, a_{2,\lambda}, a_{3,\lambda}, a_{4,\lambda}\}$, $A_{\bar{\lambda}} = \{a_{1,\bar{\lambda}}, a_{2,\bar{\lambda}}, a_{3,\bar{\lambda}}, a_{4,\bar{\lambda}}\}$ 为 A 的 λ 上截集和 λ 强上截集。其中, $a_{i,\lambda} = \{x | x \in U, a_i(x) \geq \lambda\}$, $a_{i,\bar{\lambda}} = \{x | x \in U, a_i(x) > \lambda\}, i=1,2,3,4$ 。

类似的有:

定义 7 设 $A = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x))$ 为论域 U 上的一个 2-Flou 值模糊集, $\lambda \in [0, 1]$, 则称 $A^\lambda = \{a_1^\lambda, a_2^\lambda, a_3^\lambda, a_4^\lambda\}$, $A^{\bar{\lambda}} = \{a_1^{\bar{\lambda}}, a_2^{\bar{\lambda}}, a_3^{\bar{\lambda}}, a_4^{\bar{\lambda}}\}$ 为 A 的 λ 下截集和 λ 强下截集。其中, $a_i^\lambda = \{x | x \in U, a_i(x) \leq \lambda\}$, $a_i^{\bar{\lambda}} = \{x | x \in U, a_i(x) < \lambda\}, i=1,2,3,4$ 。

定义 8 设 $A = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x))$ 为论域 U 上的一个 Flou 值模糊集, $\lambda \in [0, 1]$, 则称 $A_{[\lambda]} = \{a_{1,[\lambda]}, a_{2,[\lambda]}, a_{3,[\lambda]}, a_{4,[\lambda]}\}$, $A_{[\bar{\lambda}]} = \{a_{1,[\bar{\lambda}]}, a_{2,[\bar{\lambda}]}, a_{3,[\bar{\lambda}]}, a_{4,[\bar{\lambda}]}\}$ 为 A 的 λ 上重截集和 λ 强上重截集。其中, $a_{i,[\lambda]} = \{x | x \in U, a_i(x) \geq 1-\lambda\}$, $a_{i,[\bar{\lambda}]} = \{x | x \in U, a_i(x) > 1-\lambda\}, i=1,2,3,4$ 。

定义 9 设 $A = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x))$ 为论域 U 上的一个 Flou 值模糊集, $\lambda \in [0, 1]$, 则称 $A^{[\lambda]} = \{a_1^{[\lambda]}, a_2^{[\lambda]}, a_3^{[\lambda]}, a_4^{[\lambda]}\}$, $A^{[\bar{\lambda}]} = \{a_1^{[\bar{\lambda}]}, a_2^{[\bar{\lambda}]}, a_3^{[\bar{\lambda}]}, a_4^{[\bar{\lambda}]}\}$ 为 A 的 λ 下重截集和 λ

强下重截集。其中, $a_i^{[\lambda]} = \{x | x \in U, a_i(x) \leq 1-\lambda\}$, $a_i^{[\bar{\lambda}]} = \{x | x \in U, a_i(x) < 1-\lambda\}, i=1,2,3,4$ 。

与其它形式截集不同的是, Flou 值模糊集的截集不再是经典集合, 而是 Flou 集。

例 1 设论域 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $A \in FLVFS^2(U)$,

$$A = \frac{(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)}{u_1} + \frac{(0.2, 0.3, 0.4, 0.5)}{u_2} + \frac{(0.3, 0.4, 0.5, 0.6)}{u_3} + \frac{(0.4, 0.5, 0.6, 0.7)}{u_4}$$

取 $\lambda = 0.3$, 则

$$A_\lambda = \{\{u_3, u_4\}, \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}\}$$

$$A_{\bar{\lambda}} = \{\{u_4\}, \{u_3, u_4\}, \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}\}$$

$$A^\lambda = \{\emptyset, \{u_1\}, \{u_1, u_2\}, \{u_1, u_2, u_3\}\}$$

$$A^{\bar{\lambda}} = \{\emptyset, \emptyset, \{u_1\}, \{u_1, u_2\}\}$$

$$A_{[\lambda]} = \{\emptyset, \emptyset, \emptyset, \{u_4\}\}$$

$$A_{[\bar{\lambda}]} = \{\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset\}$$

$$A^{[\lambda]} = \{\{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}\}$$

$$A^{[\bar{\lambda}]} = \{\{u_3, u_4\}, \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}\}$$

下面讨论 Flou 值模糊集的截集的性质。

性质 1 设 $A, B, A_i (i \in T)$ 均为论域 U 上的 Flou 值模糊集, $\lambda \in [0, 1]$, 则有:

$$(1) A_{\bar{\lambda}} \subseteq A_\lambda;$$

$$(2) \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow A_{\lambda_1} \supseteq A_{\lambda_2}, A_{\bar{\lambda}_1} \supseteq A_{\bar{\lambda}_2};$$

$$(3) A \subseteq B \Rightarrow A_\lambda \subseteq B_\lambda, A_{\bar{\lambda}} \subseteq B_{\bar{\lambda}};$$

$$(4) (A \cup B)_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda, (A \cap B)_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda;$$

$$(A \cup B)_{\bar{\lambda}} = A_{\bar{\lambda}} \cup B_{\bar{\lambda}}, (A \cap B)_{\bar{\lambda}} = A_{\bar{\lambda}} \cap B_{\bar{\lambda}};$$

$$(5) (A^c)_\lambda = (A_{1-\lambda})^c, (A^c)_{\bar{\lambda}} = (A_{1-\bar{\lambda}})^c;$$

$$(6) (\bigcup_{i \in T} A_i)_\lambda \supseteq \bigcup_{i \in T} (A_i)_\lambda, (\bigcap_{i \in T} A_i)_\lambda = \bigcap_{i \in T} (A_i)_\lambda;$$

$$(\bigcup_{i \in T} A_i)_{\bar{\lambda}} = \bigcup_{i \in T} (A_i)_{\bar{\lambda}}, (\bigcap_{i \in T} A_i)_{\bar{\lambda}} \subseteq \bigcap_{i \in T} (A_i)_{\bar{\lambda}};$$

$$(7) \text{ 令 } \lambda_i \in [0, 1], a = \bigwedge_{i \in T} \lambda_i, b = \bigvee_{i \in T} \lambda_i, \text{ 则}$$

$$\bigcup_{i \in T} A_{\lambda_i} \subseteq A_a, \bigcap_{i \in T} A_{\lambda_i} = A_b, \bigcup_{i \in T} A_{\bar{\lambda}_i} = A_{\bar{a}}, \bigcap_{i \in T} A_{\bar{\lambda}_i} \supseteq A_{\bar{b}};$$

$$(8) A_0 = \bar{U}, A_1 = \bar{\emptyset}.$$

证明: (1) $A_\lambda = \{a_{1,\lambda}, a_{2,\lambda}, a_{3,\lambda}, a_{4,\lambda}\}$, 因为 $a_{i,\lambda} = \{x \in U | a_i(x) \geq \lambda\} \supseteq \{x \in U | a_i(x) > \lambda\} = a_{i,\bar{\lambda}}$, 所以, $A_\lambda \supseteq \{a_{1,\bar{\lambda}}, a_{2,\bar{\lambda}}, a_{3,\bar{\lambda}}, a_{4,\bar{\lambda}}\} = A_{\bar{\lambda}}$ 。

(2) $A_{\lambda_1} = \{a_{1,\lambda_1}, a_{2,\lambda_1}, a_{3,\lambda_1}, a_{4,\lambda_1}\}$, $A_{\lambda_2} = \{a_{1,\lambda_2}, a_{2,\lambda_2}, a_{3,\lambda_2}, a_{4,\lambda_2}\}$, 因为当 $\lambda_1 \leq \lambda_2$ 时, $a_{i,\lambda_1} = \{x \in U | a_i(x) \geq \lambda_1\} \supseteq \{x \in U | a_i(x) \geq \lambda_2\} = a_{i,\lambda_2}$, 所以, $A_{\lambda_1} \supseteq \{a_{1,\lambda_2}, a_{2,\lambda_2}, a_{3,\lambda_2}, a_{4,\lambda_2}\} = A_{\lambda_2}$ 。

同理, $A_{\bar{\lambda}_1} \supseteq A_{\bar{\lambda}_2}$ 。

(3) 因为 $A \subseteq B$, 所以 $a_i(x) \leq b_i(x), i=1,2,3,4$ 。从而, $a_{i,\lambda} = \{x \in U | a_i(x) \geq \lambda\} \subseteq \{x \in U | b_i(x) \geq \lambda\} = b_{i,\lambda}, i=1,2,3,4$, 故 $A_\lambda \subseteq B_\lambda$ 。

同理, $A_{\bar{\lambda}} \subseteq B_{\bar{\lambda}}$ 。

(4) $(A \cup B)_\lambda = \{(a_1(x) \vee b_1(x))_\lambda, (a_2(x) \vee b_2(x))_\lambda, (a_3(x) \vee b_3(x))_\lambda, (a_4(x) \vee b_4(x))_\lambda\}$, 因为 $(a_i(x) \vee b_i(x))_\lambda = \{x \in U | a_i(x) \vee b_i(x) \geq \lambda\} = \{x \in U | a_i(x) \geq \lambda \text{ 或 } b_i(x) \geq \lambda\}$ 。 $a_{i,\lambda} \cup b_{i,\lambda} = \{x \in U | a_i(x) \geq \lambda \text{ 或 } b_i(x) \geq \lambda\}$, 所以 $(a_i(x) \vee b_i(x))_\lambda$

$=a_{i,\lambda} \cup b_{i,\lambda}$ 。故

$$\begin{aligned}(A \cup B)_\lambda &= \{a_{1,\lambda} \cup b_{1,\lambda}, a_{2,\lambda} \cup b_{2,\lambda}, a_{3,\lambda} \cup b_{3,\lambda}, a_{4,\lambda} \cup b_{4,\lambda}\} \\ &= \{a_{1,\lambda}, a_{2,\lambda}, a_{3,\lambda}, a_{4,\lambda}\} \cup \{b_{1,\lambda}, b_{2,\lambda}, b_{3,\lambda}, b_{4,\lambda}\} \\ &= A_\lambda \cup B_\lambda\end{aligned}$$

$$(A \cap B)_\lambda = \{(a_1(x) \wedge b_1(x))_\lambda, (a_2(x) \wedge b_2(x))_\lambda, (a_3(x) \wedge b_3(x))_\lambda, (a_4(x) \wedge b_4(x))_\lambda\}$$

因为 $(a_i(x) \wedge b_i(x))_\lambda = \{x \in U \mid a_i(x) \geq \lambda \wedge b_i(x) \geq \lambda\} = \{x \in U \mid a_i(x) \geq \lambda \text{ 且 } b_i(x) \geq \lambda\}$, $a_{i,\lambda} \cap b_{i,\lambda} = \{x \in U \mid a_i(x) \geq \lambda \text{ 且 } b_i(x) \geq \lambda\}$, 所以 $(a_i(x) \wedge b_i(x))_\lambda = a_{i,\lambda} \cap b_{i,\lambda}$ 。故

$$\begin{aligned}(A \cap B)_\lambda &= \{a_{1,\lambda} \cap b_{1,\lambda}, a_{2,\lambda} \cap b_{2,\lambda}, a_{3,\lambda} \cap b_{3,\lambda}, a_{4,\lambda} \cap b_{4,\lambda}\} \\ &= \{a_{1,\lambda}, a_{2,\lambda}, a_{3,\lambda}, a_{4,\lambda}\} \cap \{b_{1,\lambda}, b_{2,\lambda}, b_{3,\lambda}, b_{4,\lambda}\} \\ &= A_\lambda \cap B_\lambda\end{aligned}$$

同理, $(A \cup B)_{\bar{\lambda}} = A_{\bar{\lambda}} \cup B_{\bar{\lambda}}$, $(A \cap B)_{\bar{\lambda}} = A_{\bar{\lambda}} \cap B_{\bar{\lambda}}$ 。

(5) 设 $A = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x))$, 则

$$\begin{aligned}(A^C)_\lambda &= (1-a_4(x), 1-a_3(x), 1-a_2(x), 1-a_1(x))_\lambda \\ &= \{(1-a_4(x))_\lambda, (1-a_3(x))_\lambda, (1-a_2(x))_\lambda, (1-a_1(x))_\lambda\}\end{aligned}$$

因为 $(1-a_i(x))_\lambda = \{x \in U \mid 1-a_i(x) \geq \lambda\} = \{x \in U \mid a_i(x) \leq 1-\lambda\} = (a_{i,1-\lambda})^C$, 所以

$$\begin{aligned}(A^C)_\lambda &= \{(a_{4,1-\lambda})^C, (a_{3,1-\lambda})^C, (a_{2,1-\lambda})^C, (a_{1,1-\lambda})^C\} \\ &= \{a_{1,1-\lambda}, a_{2,1-\lambda}, a_{3,1-\lambda}, a_{4,1-\lambda}\}^C = (A_{1-\lambda})^C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6) (\bigcup_{i \in T} A_i)_\lambda &= \{(\bigvee_{i \in T} a_{1i}(x))_\lambda, (\bigvee_{i \in T} a_{2i}(x))_\lambda, (\bigvee_{i \in T} a_{3i}(x))_\lambda, (\bigvee_{i \in T} a_{4i}(x))_\lambda\}, \text{ 因为 } (\bigvee_{i \in T} a_{\#i}(x))_\lambda = \{x \in U \mid \bigvee_{i \in T} a_{\#i}(x) \geq \lambda\} \supseteq \bigcup_{i \in T} \{x \in U \mid a_{\#i}(x) \geq \lambda\} = \bigcup_{i \in T} a_{\#i,\lambda}, \text{ 所以 } (\bigcup_{i \in T} A_i)_\lambda \supseteq \bigcup_{i \in T} \{a_{1i,\lambda}, a_{2i,\lambda}, a_{3i,\lambda}, a_{4i,\lambda}\} = \bigcup_{i \in T} (A_i)_\lambda, \\ (\bigcap_{i \in T} A_i)_\lambda &= \{(\bigwedge_{i \in T} a_{1i}(x))_\lambda, (\bigwedge_{i \in T} a_{2i}(x))_\lambda, (\bigwedge_{i \in T} a_{3i}(x))_\lambda, (\bigwedge_{i \in T} a_{4i}(x))_\lambda\}, \text{ 因为 } (\bigwedge_{i \in T} a_{\#i}(x))_\lambda = \{x \in U \mid \bigwedge_{i \in T} a_{\#i}(x) \geq \lambda\} = \bigcap_{i \in T} \{x \in U \mid a_{\#i}(x) \geq \lambda\} = \bigcap_{i \in T} a_{\#i,\lambda}, \text{ 所以 } (\bigcap_{i \in T} A_i)_\lambda = \{ \bigcap_{i \in T} a_{1i,\lambda}, \bigcap_{i \in T} a_{2i,\lambda}, \bigcap_{i \in T} a_{3i,\lambda}, \bigcap_{i \in T} a_{4i,\lambda} \} = \bigcap_{i \in T} \{a_{1i,\lambda}, a_{2i,\lambda}, a_{3i,\lambda}, a_{4i,\lambda}\} = \bigcap_{i \in T} (A_i)_\lambda.\end{aligned}$$

同理可证, $(\bigcup_{i \in T} A_i)_{\bar{\lambda}} = \bigcup_{i \in T} (A_i)_{\bar{\lambda}}$, $(\bigcap_{i \in T} A_i)_{\bar{\lambda}} = \bigcap_{i \in T} (A_i)_{\bar{\lambda}}$ 。

$$\begin{aligned}(7) A_a &= \{a_{1,a}, a_{2,a}, a_{3,a}, a_{4,a}\}, \text{ 因为 } a_{i,a} = \{x \in U \mid a_i(x) \geq a\} = \bigcap_{i \in T} \{x \in U \mid a_i(x) \geq \lambda_i\} = \bigcap_{i \in T} a_{i,\lambda_i}, \text{ 所以 } A_a = \{ \bigcap_{i \in T} a_{1,\lambda_i}, \bigcap_{i \in T} a_{2,\lambda_i}, \bigcap_{i \in T} a_{3,\lambda_i}, \bigcap_{i \in T} a_{4,\lambda_i} \} = \bigcap_{i \in T} \{a_{1,\lambda_i}, a_{2,\lambda_i}, a_{3,\lambda_i}, a_{4,\lambda_i}\} = \bigcap_{i \in T} A_{\lambda_i}, \\ A_b &= \{a_{1,b}, a_{2,b}, a_{3,b}, a_{4,b}\}, \text{ 因为 } a_{i,b} = \{x \in U \mid a_i(x) \geq b\} = \bigvee_{i \in T} \{x \in U \mid a_i(x) \geq \lambda_i\} = \bigvee_{i \in T} a_{i,\lambda_i}, \text{ 所以 } A_b = \{ \bigvee_{i \in T} a_{1,\lambda_i}, \bigvee_{i \in T} a_{2,\lambda_i}, \bigvee_{i \in T} a_{3,\lambda_i}, \bigvee_{i \in T} a_{4,\lambda_i} \} = \bigvee_{i \in T} \{a_{1,\lambda_i}, a_{2,\lambda_i}, a_{3,\lambda_i}, a_{4,\lambda_i}\} = \bigvee_{i \in T} A_{\lambda_i}.\end{aligned}$$

(8) $A_0 = \{a_{1,0}, a_{2,0}, a_{3,0}, a_{4,0}\}$, 因为 $a_{i,0} = \{x \in U \mid a_i(x) \geq 0\} = U$, 所以 $A_0 = \{U, U, U, U\}$ 。

同理, $A_1 = \bar{\emptyset}$ 。

性质 2

$$(1) A^\lambda = (A_{\bar{\lambda}})^C, A^{\bar{\lambda}} = (A_\lambda)^C$$

$$(2) A^\lambda \subseteq A^\lambda$$

$$(3) \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow A^{\lambda_1} \supseteq A^{\lambda_2}, A^{\bar{\lambda}_1} \supseteq A^{\bar{\lambda}_2}$$

$$(4) A \subseteq B \Rightarrow B^\lambda \subseteq A^\lambda, B^{\bar{\lambda}} \subseteq A^{\bar{\lambda}}$$

$$(5) (A \cup B)^\lambda = A^\lambda \cap B^\lambda, (A \cap B)^\lambda = A^\lambda \cup B^\lambda$$

$$(A \cup B)^{\bar{\lambda}} = A^{\bar{\lambda}} \cap B^{\bar{\lambda}}, (A \cap B)^{\bar{\lambda}} = A^{\bar{\lambda}} \cup B^{\bar{\lambda}}$$

$$(6) (A^C)^\lambda = (A^{1-\lambda})^C, (A^C)^{\bar{\lambda}} = (A^{1-\lambda})^C$$

$$(7) (\bigcup_{i \in T} A_i)^\lambda = \bigcap_{i \in T} (A_i)^\lambda, (\bigcap_{i \in T} A_i)^\lambda \supseteq \bigcup_{i \in T} (A_i)^\lambda$$

$$(\bigcup_{i \in T} A_i)^{\bar{\lambda}} \subseteq \bigcap_{i \in T} (A_i)^{\bar{\lambda}}, (\bigcap_{i \in T} A_i)^{\bar{\lambda}} = \bigcup_{i \in T} (A_i)^{\bar{\lambda}}$$

$$(8) \text{ 令 } \lambda_i \in [0, 1], a = \bigwedge_{i \in T} \lambda_i, b = \bigvee_{i \in T} \lambda_i, \text{ 则 } \bigcup_{i \in T} A_{\lambda_i}^{\bar{\lambda}} \subseteq A^a, \bigcap_{i \in T} A_{\lambda_i}^{\bar{\lambda}} = A^b, \bigcup_{i \in T} A_{\lambda_i}^{\bar{\lambda}} = A^a, \bigcap_{i \in T} A_{\lambda_i}^{\bar{\lambda}} \supseteq A^b$$

$$(9) A^0 = \bar{U}, A^1 = \bar{\emptyset}$$

证明: 略。

性质 3

$$(1) A_{[\lambda]} = A_{1-\lambda}, A_{[\bar{\lambda}]} = A_{1-\bar{\lambda}}$$

$$(2) A_{[\bar{\lambda}]} \subseteq A_{[\lambda]}$$

$$(3) \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow A_{[\lambda_1]} \subseteq A_{[\lambda_2]}, A_{[\bar{\lambda}_1]} \subseteq A_{[\bar{\lambda}_2]}$$

$$(4) A \subseteq B \Rightarrow A_{[\lambda]} \subseteq B_{[\lambda]}, A_{[\bar{\lambda}]} \subseteq B_{[\bar{\lambda}]}$$

$$(5) (A \cup B)_{[\lambda]} = A_{[\lambda]} \cup B_{[\lambda]}, (A \cap B)_{[\lambda]} = A_{[\lambda]} \cap B_{[\lambda]}$$

$$(A \cup B)_{[\bar{\lambda}]} = A_{[\bar{\lambda}]} \cup B_{[\bar{\lambda}]}, (A \cap B)_{[\bar{\lambda}]} = A_{[\bar{\lambda}]} \cap B_{[\bar{\lambda}]}$$

$$(6) (A^C)_{[\lambda]} = (A_{1-\lambda})^C, (A^C)_{[\bar{\lambda}]} = (A_{1-\bar{\lambda}})^C$$

$$(7) (\bigcup_{i \in T} A_i)_{[\lambda]} \supseteq \bigcup_{i \in T} (A_i)_{[\lambda]}, (\bigcap_{i \in T} A_i)_{[\lambda]} = \bigcap_{i \in T} (A_i)_{[\lambda]}$$

$$(\bigcup_{i \in T} A_i)_{[\bar{\lambda}]} = \bigcup_{i \in T} (A_i)_{[\bar{\lambda}]}, (\bigcap_{i \in T} A_i)_{[\bar{\lambda}]} \subseteq \bigcap_{i \in T} (A_i)_{[\bar{\lambda}]}$$

$$(8) \text{ 令 } \lambda_i \in [0, 1], a = \bigwedge_{i \in T} \lambda_i, b = \bigvee_{i \in T} \lambda_i, \text{ 则}$$

$$\bigcup_{i \in T} A_{[\lambda_i]} \subseteq A_{[b]}, \bigcap_{i \in T} A_{[\lambda_i]} = A_{[a]}$$

$$\bigcup_{i \in T} A_{[\bar{\lambda}_i]} = A_{[\bar{b}]}, \bigcap_{i \in T} A_{[\bar{\lambda}_i]} \supseteq A_{[\bar{a}]}$$

$$(9) A_{[1]} = \bar{U}, A_{[0]} = \bar{\emptyset}$$

证明: 略。

性质 4

$$(1) A^{[\lambda]} = A^{1-\lambda}, A^{[\bar{\lambda}]} = A^{1-\bar{\lambda}};$$

$$(2) A^{[\bar{\lambda}]} \subseteq A^{[\lambda]};$$

$$(3) \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow A^{[\lambda_1]} \subseteq A^{[\lambda_2]}, A^{[\bar{\lambda}_1]} \subseteq A^{[\bar{\lambda}_2]};$$

$$(4) A \subseteq B \Rightarrow B^{[\lambda]} \subseteq A^{[\lambda]}, B^{[\bar{\lambda}]} \subseteq A^{[\bar{\lambda}]};$$

$$(5) (A \cup B)^{[\lambda]} = A^{[\lambda]} \cap B^{[\lambda]}, (A \cap B)^{[\lambda]} = A^{[\lambda]} \cup B^{[\lambda]};$$

$$(A \cup B)^{[\bar{\lambda}]} = A^{[\bar{\lambda}]} \cap B^{[\bar{\lambda}]}, (A \cap B)^{[\bar{\lambda}]} = A^{[\bar{\lambda}]} \cup B^{[\bar{\lambda}]}$$

$$(6) (A^C)^{[\lambda]} = (A^{1-\lambda})^C, (A^C)^{[\bar{\lambda}]} = (A^{1-\bar{\lambda}})^C$$

$$(7) (\bigcup_{i \in T} A_i)^{[\lambda]} = \bigcap_{i \in T} (A_i)^{[\lambda]}, (\bigcap_{i \in T} A_i)^{[\lambda]} \supseteq \bigcup_{i \in T} (A_i)^{[\lambda]}$$

$$(\bigcup_{i \in T} A_i)^{[\bar{\lambda}]} \subseteq \bigcap_{i \in T} (A_i)^{[\bar{\lambda}]}, (\bigcap_{i \in T} A_i)^{[\bar{\lambda}]} = \bigcup_{i \in T} (A_i)^{[\bar{\lambda}]}$$

$$(8) \text{ 令 } \lambda_i \in [0, 1], a = \bigwedge_{i \in T} \lambda_i, b = \bigvee_{i \in T} \lambda_i, \text{ 则}$$

$$\bigcup_{i \in T} A_{[\lambda_i]} \subseteq A_{[b]}, \bigcap_{i \in T} A_{[\lambda_i]} = A_{[a]}$$

$$\bigcup_{i \in T} A_{[\bar{\lambda}_i]} = A_{[\bar{b}]}, \bigcap_{i \in T} A_{[\bar{\lambda}_i]} \supseteq A_{[\bar{a}]}$$

$$(9) A^{[1]} = \bar{U}, A^{[0]} = \bar{\emptyset}$$

证明: 略。

根据文献[18], Flou 值模糊集的截集与模糊集的截集有完全一样的性质。

4 Flou 值模糊集的分解定理

Flou 值模糊集的分解定理提供了将 Flou 值模糊集分解成 Flou 集的工具, 揭示了 Flou 值模糊集与 Flou 集的关系。为了建立 Flou 值模糊集的分解定理, 定义了数与 Flou 集的 8 种运算, 分别对应 Flou 值模糊集的 8 种截集, 类比模糊集的分解定理, 建立了 Flou 值模糊集的分解定理。

设 U 为论域, $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} \in FLS^4$, $\lambda \in [0, 1]$, 我们先给出以下定义。

定义 10 $\lambda * A = (\lambda * A_1, \lambda * A_2, \lambda * A_3, \lambda * A_4)$;

$\lambda \circ A = (\lambda \circ A_1, \lambda \circ A_2, \lambda \circ A_3, \lambda \circ A_4)$;

$$\lambda \cdot A = \lambda * A^C = (\lambda * A_1^C, \lambda * A_2^C, \lambda * A_3^C, \lambda * A_4^C);$$

$$\lambda \cdot A = \lambda \circ A^C = (\lambda \circ A_1^C, \lambda \circ A_2^C, \lambda \circ A_3^C, \lambda \circ A_4^C);$$

$$\lambda[\cdot]A = (1-\lambda) * A = ((1-\lambda) * A_1, (1-\lambda) * A_2, (1-\lambda) * A_3, (1-\lambda) * A_4);$$

$$\lambda[\cdot]A = (1-\lambda) \circ A = ((1-\lambda) \circ A_1, (1-\lambda) \circ A_2, (1-\lambda) \circ A_3, (1-\lambda) \circ A_4);$$

$$\lambda[\cdot]A = (1-\lambda) \cdot A = (1-\lambda) * A^C = ((1-\lambda) * A_1^C, (1-\lambda) * A_2^C, (1-\lambda) * A_3^C, (1-\lambda) * A_4^C);$$

$$\lambda[\cdot]A = (1-\lambda) \cdot A = (1-\lambda) \circ A^C = ((1-\lambda) \circ A_1^C, (1-\lambda) \circ A_2^C, (1-\lambda) \circ A_3^C, (1-\lambda) \circ A_4^C);$$

$$\text{其中, } \lambda * \alpha = \begin{cases} \lambda, & x \in \alpha \\ 0, & x \notin \alpha \end{cases}, \lambda \circ \alpha = \begin{cases} 1, & x \in \alpha \\ \lambda, & x \notin \alpha \end{cases}, \alpha \text{ 为分明集合.}$$

定理 1 设 $A = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x))$ 为论域 U 上的 Flou 值模糊集, 则

$$(1) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda \circ A_\lambda$$

$$(2) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * A_{\bar{\lambda}} = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda \circ A_{\bar{\lambda}}$$

(3) 设映射 $H: [0,1] \rightarrow FLS(U), \lambda \mapsto H(\lambda)$ 满足: $A_{\bar{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$, 则

$$(a) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * H(\lambda) = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda \circ H(\lambda)$$

$$(b) \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_1) \supseteq H(\lambda_2)$$

$$(c) A_\lambda = \bigcap_{\alpha \subseteq \lambda} H(\alpha), A_{\bar{\lambda}} = \bigcup_{\alpha \supseteq \lambda} H(\alpha)$$

证明: (1) $A_\lambda = \{a_{1,\lambda}, a_{2,\lambda}, a_{3,\lambda}, a_{4,\lambda}\} \in FLS^4(U)$

所以

$$\lambda * A_\lambda = (\lambda * a_{1,\lambda}, \lambda * a_{2,\lambda}, \lambda * a_{3,\lambda}, \lambda * a_{4,\lambda}) =$$

$$\begin{cases} (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda), & x \in a_{1,\lambda} \\ (0, \lambda, \lambda, \lambda), & x \in a_{2,\lambda} - a_{1,\lambda} \\ (0, 0, \lambda, \lambda), & x \in a_{3,\lambda} - a_{2,\lambda} \\ (0, 0, 0, \lambda), & x \in a_{4,\lambda} - a_{3,\lambda} \\ (0, 0, 0, 0), & x \in (a_{4,\lambda})^C \end{cases}$$

即 $\lambda * A_\lambda \in FLVFS^4(U)$, 故

$$\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * A_\lambda = \left(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * a_{1,\lambda}, \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * a_{2,\lambda}, \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * a_{3,\lambda}, \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * a_{4,\lambda} \right)$$

由模糊集合的分解定理, 有 $\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * a_{i,\lambda} = a_i(x)$, 因此,

$$\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * A_\lambda = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x)) = A$$

同理可证 $\bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda \circ H(\lambda) = A$.

(2) 的证明与 (1) 类似.

(3) (a) 由于 $A_{\bar{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$, 因此 $\lambda * A_{\bar{\lambda}} \subseteq \lambda * H(\lambda) \subseteq \lambda * A_\lambda = A$

因此

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * A_{\bar{\lambda}} \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * A_\lambda = A$$

$$A = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda * A_{\bar{\lambda}} \subseteq \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda * H(\lambda) \subseteq \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda * A_\lambda = A$$

因此

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * H(\lambda) = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda \circ H(\lambda)$$

$$(b) \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_1) \supseteq A_{\bar{\lambda}_1} \supseteq A_{\bar{\lambda}_2} \supseteq H(\lambda_2)$$

(c) 当 $\alpha \leq \lambda$ 时, 有 $H(\alpha) \supseteq A_{\bar{\alpha}} \supseteq A_{\bar{\lambda}}$, 所以 $\bigcap_{\alpha \subseteq \lambda} H(\alpha) \supseteq A_{\bar{\lambda}}$.

另一方面, 由于 $H(\alpha) \subseteq A_\alpha$, 知 $\bigcap_{\alpha \subseteq \lambda} H(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \subseteq \lambda} A_\alpha = A_\lambda$, 因此, $A_\lambda = \bigcap_{\alpha \subseteq \lambda} H(\alpha)$.

类似地, 当 $\alpha \geq \lambda$ 时, 有 $A_{\bar{\alpha}} \supseteq A_{\bar{\lambda}} \supseteq H(\alpha)$, 所以 $A_{\bar{\lambda}} = \bigcup_{\alpha \supseteq \lambda} H(\alpha)$.

另一方面, 由 $H(\alpha) \supseteq A_{\bar{\alpha}}$, 知 $\bigcup_{\alpha \supseteq \lambda} H(\alpha) \supseteq \bigcap_{\alpha \supseteq \lambda} A_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\lambda}}$, 因此, $A_{\bar{\lambda}} = \bigcup_{\alpha \supseteq \lambda} H(\alpha)$.

定理 2 设 $A = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x))$ 为论域 U 上的 Flou 值模糊集, 则

$$(1) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \cdot A = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda \cdot A^{\bar{\lambda}}$$

$$(2) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \cdot A^{\bar{\lambda}} = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda \cdot A^{\bar{\lambda}}$$

(3) 设映射 $H: [0,1] \rightarrow FLS(U), \lambda \mapsto H(\lambda)$ 满足: $A^{\bar{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A^{\lambda}$, 则

$$(a) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \cdot H(\lambda) = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda \cdot H(\lambda)$$

$$(b) \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_1) \supseteq H(\lambda_2)$$

$$(c) A^{\lambda} = \bigcap_{\alpha \subseteq \lambda} H(\alpha), A^{\bar{\lambda}} = \bigcup_{\alpha \supseteq \lambda} H(\alpha)$$

证明: 略.

定理 3 设 $A = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x))$ 为论域 U 上的 Flou 值模糊集, 则

$$(1) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]A = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]A_{[\lambda]}$$

$$(2) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]A_{[\lambda]} = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]A_{[\lambda]}$$

(3) 设映射 $H: [0,1] \rightarrow FLS(U), \lambda \mapsto H(\lambda)$ 满足: $A_{[\lambda]} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_{[\bar{\lambda}]}$, 则

$$(a) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]H(\lambda) = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]H(\lambda)$$

$$(b) \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_1) \supseteq H(\lambda_2)$$

$$(c) A_{[\lambda]} = \bigcap_{\alpha \subseteq \lambda} H(\alpha), A_{[\bar{\lambda}]} = \bigcup_{\alpha \supseteq \lambda} H(\alpha)$$

证明: 略.

定理 4 设 $A = (a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x))$ 为论域 U 上的 Flou 值模糊集, 则

$$(1) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]A_{[\lambda]} = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]A_{[\lambda]}$$

$$(2) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]A_{[\lambda]} = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]A_{[\lambda]}$$

(3) 设映射 $H: [0,1] \rightarrow FLS(U), \lambda \mapsto H(\lambda)$ 满足: $A_{[\lambda]} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_{[\bar{\lambda}]}$, 则

$$(a) A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]H(\lambda) = \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\cdot]H(\lambda)$$

$$(b) \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_1) \supseteq H(\lambda_2)$$

$$(c) A_{[\lambda]} = \bigcap_{\alpha \subseteq \lambda} H(\alpha), A_{[\bar{\lambda}]} = \bigcup_{\alpha \supseteq \lambda} H(\alpha)$$

证明: 略.

下面给出一个例子来说明上述分解定理的有效性.

例 2 设论域 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, A \in FLVFS^2(U)$,

$$A = \frac{(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)}{u_1} + \frac{(0.2, 0.3, 0.4, 0.5)}{u_2} + \frac{(0.3, 0.4, 0.5, 0.6)}{u_3} + \frac{(0.4, 0.5, 0.6, 0.7)}{u_4}$$

则

$$A_\lambda = \begin{cases} \{\{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \\ \{u_1, u_2, u_3, u_4\}\}, \lambda \in [0, 0.1] \\ \{\{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \\ \{u_1, u_2, u_3, u_4\}\}, \lambda \in (0.1, 0.2] \\ \{\{u_3, u_4\}, \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \\ \{u_1, u_2, u_3, u_4\}\}, \lambda \in (0.2, 0.3] \\ \{\{u_4\}, \{u_3, u_4\}, \{u_2, u_3, u_4\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4\}\}, \\ \lambda \in (0.3, 0.4] \\ \{\emptyset, \{u_4\}, \{u_3, u_4\}, \{u_2, u_3, u_4\}\}, \lambda \in (0.4, 0.5] \\ \{\emptyset, \emptyset, \{u_4\}, \{u_3, u_4\}\}, \lambda \in (0.5, 0.6] \\ \{\emptyset, \emptyset, \emptyset, \{u_4\}\}, \lambda \in (0.6, 0.7] \\ \{\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset\}, \lambda \in (0.7, 1] \end{cases}$$

于是有:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda * A_{\lambda} = & \frac{(0,1,0,1,0,1,0,1)}{u_1} + \frac{(0,1,0,1,0,1,0,1)}{u_2} + \frac{(0,1,0,1,0,1,0,1)}{u_3} + \\ & \frac{(0,1,0,1,0,1,0,1)}{u_4} \cup \frac{(0,0,2,0,2,0,2,2)}{u_1} + \frac{(0,2,0,2,0,2,0,2)}{u_2} + \\ & \frac{(0,2,0,2,0,2,0,2)}{u_3} + \frac{(0,2,0,2,0,2,0,2)}{u_4} \cup \frac{(0,0,0,3,0,3,0,3)}{u_1} + \\ & \frac{(0,0,3,0,3,0,3,0,3)}{u_2} + \frac{(0,3,0,3,0,3,0,3,0,3)}{u_3} + \frac{(0,3,0,3,0,3,0,3,0,3)}{u_4} \cup \\ & \frac{(0,0,0,0,4,0,4,0,4)}{u_1} + \frac{(0,0,0,4,0,4,0,4,0,4)}{u_2} + \frac{(0,0,4,0,4,0,4,0,4)}{u_3} + \\ & \frac{(0,4,0,4,0,4,0,4,0,4)}{u_4} \cup \frac{(0,0,0,0,0)}{u_1} + \frac{(0,0,0,0,0,5)}{u_2} + \\ & \frac{(0,0,0,0,5,0,5)}{u_3} + \frac{(0,0,5,0,5,0,5,0,5)}{u_4} \cup \frac{(0,0,0,0,0)}{u_1} + \\ & \frac{(0,0,0,0,0)}{u_2} + \frac{(0,0,0,0,0,6)}{u_3} + \frac{(0,0,0,0,6,0,6)}{u_4} \cup \frac{(0,0,0,0,0)}{u_1} + \\ & \frac{(0,0,0,0,0)}{u_2} + \frac{(0,0,0,0,0)}{u_3} + \frac{(0,0,0,0,0,7)}{u_4} \cup \frac{(0,0,0,0,0)}{u_1} + \\ & \frac{(0,0,0,0,0)}{u_2} + \frac{(0,0,0,0,0)}{u_3} + \frac{(0,0,0,0,0)}{u_4} = \frac{(0,1,0,2,0,3,0,4)}{u_1} + \\ & \frac{(0,2,0,3,0,4,0,5)}{u_2} + \frac{(0,3,0,4,0,5,0,6)}{u_3} + \\ & \frac{(0,4,0,5,0,6,0,7)}{u_4} = A \\ \bigcap_{\lambda \in [0,1]} \lambda \circ A_{\lambda} = & \frac{(1,1,1,1)}{u_1} + \frac{(1,1,1,1)}{u_2} + \frac{(1,1,1,1)}{u_3} + \frac{(1,1,1,1)}{u_4} \cup \\ & \frac{(0,1,1,1,1)}{u_1} + \frac{(1,1,1,1)}{u_2} + \frac{(1,1,1,1)}{u_3} + \frac{(1,1,1,1)}{u_4} \cup \\ & \frac{(0,2,0,2,1,1)}{u_1} + \frac{(0,2,1,1,1)}{u_2} + \frac{(1,1,1,1)}{u_3} + \frac{(1,1,1,1)}{u_4} \cup \\ & \frac{(0,3,0,3,0,3,1)}{u_1} + \frac{(0,3,0,3,1,1)}{u_2} + \frac{(0,3,1,1,1)}{u_3} + \\ & \frac{(1,1,1,1)}{u_4} \cup \frac{(0,4,0,4,0,4,0,4)}{u_1} + \frac{(0,4,0,4,0,4,1)}{u_2} + \\ & \frac{(0,4,0,4,1,1)}{u_3} + \frac{(0,4,1,1,1)}{u_4} \cup \frac{(0,5,0,5,0,5,0,5)}{u_1} + \\ & \frac{(0,5,0,5,0,5,0,5)}{u_2} + \frac{(0,5,0,5,0,5,1)}{u_3} + \frac{(0,5,0,5,1,1)}{u_4} \cup \\ & \frac{(0,6,0,6,0,6,0,6)}{u_1} + \frac{(0,6,0,6,0,6,0,6)}{u_2} + \frac{(0,6,0,6,0,6,0,6)}{u_3} + \\ & \frac{(0,6,0,6,0,6,1)}{u_4} \cup \frac{(0,7,0,7,0,7,0,7)}{u_1} + \frac{(0,7,0,7,0,7,0,7)}{u_2} + \\ & \frac{(0,7,0,7,0,7,0,7)}{u_3} + \frac{(0,7,0,7,0,7,0,7)}{u_4} \cup \frac{(0,1,0,2,0,3,0,4)}{u_1} + \\ & \frac{(0,2,0,3,0,4,0,5)}{u_2} + \frac{(0,3,0,4,0,5,0,6)}{u_3} + \frac{(0,4,0,5,0,6,0,7)}{u_4} \\ = & A \end{aligned}$$

由定理 1—定理 4 可知,我们已经建立了 Flou 值模糊集的分解定理,它与模糊集的分解定理从形式上完全一致。

结束语 考虑到区间值模糊集和三参数区间值模糊集或三维模糊集在某些情况下表达模糊信息方面的不足,本文定

义了一种新的 L 模糊集——Flou 值模糊集,它既增强了区间值模糊集表达信息的精度,又避免了三参数模糊集或三维模糊集在确定单点隶属度时遇到的困难。鉴于截集在模糊系统理论研究中的重要作用,定义了 8 种 Flou 值模糊集的截集,并讨论了这些截集的性质。结果表明,Flou 值模糊集的截集与模糊集的截集有完全一样的性质。然后,利用截集建立了 Flou 值模糊集的分解定理,揭示了 Flou 值模糊集与 Flou 集之间的联系,并用一个实际算例验证了分解定理的有效性。为了进一步完善 Flou 值模糊集的理论体系,Flou 值模糊集的表现定理和扩张原理有待进一步研究和讨论。

参 考 文 献

- [1] Gentilhomme Y. Les ensembles flous enlinguistique[J]. Eahiers Linguistiques Theor,1968(Appl):47-63
- [2] 李红霞,刘坤. Flou 代数与 Flou 可测映射[J]. 数学教学与研究,2009,28(2):49-50
- [3] 李红霞,刘坤. Flou 集与区间值模糊集[J]. 数学教学与研究,2009,28(1):58-59
- [4] Kandil A. On flou (Intuitionistic) topological spaces [J]. The journal of fuzzy mathematical,2007,15(2):471-492
- [5] 吴德胜,虞强源. 一种基于褶集的模糊区域可视化模型[J]. 系统仿真学报,2006,18(1):340-346
- [6] Gorzalczancy B. Approximate inference with interval-valued fuzzy sets an outline[C]// Proe. Polish Symp. on Interval and Fuzzy Math. Poznan,1983:89-95
- [7] Turkseenn B. Interval valued fuzzy sets based on normal forms [J]. Fuzzy sets systems,1986,20:197-210
- [8] 兰蓉,范九伦. 基于记分函数的三参数区间值模糊集多属性决策方法[J]. 模糊系统与科学,2008,22(增刊):234-239
- [9] 李小申. 三参数模糊集[D]. 大连:大连理工大学,2009
- [10] Yuan X H, Li H X, Lee E S. Three new cut sets of fuzzy sets and new theories of fuzzy sets[J]. Computers and Mathematics with Applications,2009,57(5):691-701
- [11] 袁学海,李洪兴,孙凯彪. 直觉模糊集和区间值模糊集的截集、分解定理和表现定理[J]. 中国科学,2009,39(9):1-13
- [12] 闫德勤,迟忠先. Vague 集的分解定理和相似度量[J]. 计算机科学,2003,30(1):78-79
- [13] 裴海峰,徐晓静. 粗模糊集的链式分解[J]. 山东大学学报:理学版,2006,41(4):8-11
- [14] 许金权. 模糊粗糙集的表达及应用[J]. 模糊系统与数学,2011,25(1):146-152
- [15] 徐章艳,汤服成,李凡. 基于经典逻辑系统的模糊推理方法[J]. 模糊系统与数学,2004,18(1):296-299
- [16] 王勤辉,邱学绍. 地貌及等高线表示的分解定理[J]. 测绘学院学报,2004,21(1):21-23
- [17] 何建华,刘耀林,唐新明. 离散空间的拓扑关系模型[J]. 测绘学报,2005,34(4):343-348
- [18] 袁学海,李洪兴,罗承忠. 几种新的截集及其应用[J]. 模糊系统与数学,1997,24(1):37-43