

基于3种群Lotka-Volterra模型的种群动力学函数优化算法

黄光球 赵魏娟 陆秋琴

(西安建筑科技大学管理学院 西安 710055)

摘要 基于3种群Lotka-Volterra模型构造出了可全局收敛的种群动力学优化算法。在该算法中,每个种群对应着优化问题的一个试探解;基于3种群间的每种相互作用关系,提出了相应的图形表示方法以及对应的Lotka-Volterra模型构建方法,种群间的相互作用关系包括竞争关系、互惠共存关系、捕食-被食关系或者它们间的任意组合;3种群间的每种相互作用关系均对应着一种种群进化算子,该算子的数学表达式就是其对应的Lotka-Volterra模型的离散化表达式;另外,为了求解更复杂的优化问题求解,将种群融合、突变和选择等行为也构造成操作算子。所有算子的特性可以确保整个种群的适应度指数要么保持原状不变,要么向好的方向转移,从而确保了算法的全局收敛性;在种群演变过程中,种群从一种状态转移到另一种状态实现了种群对优化问题最优解的搜索。应用可归约随机矩阵的稳定性条件证明了本算法具有全局收敛性。测试结果表明本算法是高效的。

关键词 优化,进化计算,种群动力学,生物地理学优化算法,Lotka-Volterra模型

中图分类号 TP18

文献标识码 A

Population Dynamics Optimization Based on 3 Populations Lotka-Volterra Model

HUANG Guang-qiu ZHAO Wei-juan LU Qiu-qin

(School of Management, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract A population dynamics-based optimization algorithm with global convergence is constructed based on 3 populations Lotka-Volterra model. In the algorithm, each population is just an alternative solution of an optimization problem, and each mutual relation among 3 populations, which includes the competition, mutual-benefit, predator-prey and their arbitrary combinations, is expressed into a graph, and its associated Lotka-Volterra model is established, and each mutual relation among 3 populations responds to an evolution operator, whose mathematical expression is just the discrete expression of its associated Lotka-Volterra model, furthermore, in order to solve much complicated optimization problems, the merge, mutation and selection behaviour of populations are used to construct evolution operators. The features of all constructed operators can ensure population suitability index (PSI) of each population to keep either to stay unchanged or to transfer toward better states, therefore the global convergence is ensured, and during evolution process of populations, each population's transferring from one state to another realizes the search for the optimum solution. The stability condition of a reducible stochastic matrix was applied to prove the global convergence of the algorithm. The case study shows that the algorithm is efficient.

Keywords Optimization, Evolutionary computation, Population dynamics, Biogeography-based optimization, Lotka-Volterra model

1 引言

考虑一般优化问题:

$\min f(\mathbf{X})$

$$\text{s. t. } \begin{cases} g_i(\mathbf{X}) \geq 0, i=1, 2, \dots, I \\ h_i(\mathbf{X}) = 0, i=1, 2, \dots, E \\ \mathbf{X} \in S \subset R^n \end{cases} \quad (1)$$

式中, R^n 是 n 维欧氏空间; $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个 n 维决策向量; S 为搜索空间; $f(\mathbf{X})$ 为目标函数; $g_i(\mathbf{X}) \geq 0$ 为第 i 个

约束条件, $i=1, 2, \dots, I$, I 为不等式约束条件个数; $h_i(\mathbf{X}) = 0$ 为第 i 个等式约束条件, $i=1, 2, \dots, E$, E 为等式约束条件个数。目标函数 $f(\mathbf{X})$ 和约束条件 $g_i(\mathbf{X})$ 、 $h_i(\mathbf{X})$ 没有限制, 文献[1]介绍的传统的非线性优化方法无法解决该问题。为了有效地解决优化问题(1), 人们已发展出了基于种群随机搜索寻优的进化优化算法, 这类算法对目标函数和约束条件一般不需要特殊的限制条件, 具有较广泛的适用性。已有的进化优化算法有: 遗传算法^[2]、蚁群算法^[3]、鱼群算法^[4]、粒子群算法^[5]、模拟退火算法^[6]等。

到稿日期: 2012-10-20 返修日期: 2012-12-24 本文受陕西省科学技术研究发展计划项目(2011K06-08), 陕西省教育厅科技计划项目(12JK0789), 陕西重点学科建设专项资金项目(E08001), 陕西房地产技术经济及管理研究(E08005)资助。

黄光球(1964—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为智能计算、计算机模拟, E-mail: huangnan93@sohu.com; 赵魏娟(1988—), 女, 硕士生, 主要研究方向为智能计算; 陆秋琴(1966—), 女, 博士, 教授, 主要研究方向为先进计算、计算机模拟。

2008年, Dan Simon 用生物地理学的方法提出了生物地理学优化算法 (Biogeography-Based Optimization, BBO)^[7]。该算法通过种群在栖息地间的迁移实现对优化问题最优解的搜索。BBO 算法解决优化问题主要依赖以下两方面: (1) 栖息地的特征向量 SIV 对应优化问题的试探解; 栖息地的适宜度指数 (HSI) 对应于优化问题的目标函数值, 好的试探解具有较高的 HSI 值; (2) 栖息地的迁入和迁出机制对应优化算法中的信息交互机制, 高 HSI 的试探解以一定的迁出率进行相应操作, 将信息共享给低 HSI 解决方案; 低 HSI 解决方案从高 HSI 的解决方案接受许多新的特征, 这些额外的新特征可以提高低 HSI 试探解的质量。若栖息地较高的 HSI 使得该栖息地种群数量增多, 则调低迁入率、调高迁出率。

与生物地理学不同, 种群动力学是利用动力学建模方法来建立生态学中种群与种群、种群与环境之间相互作用关系的数学模型, 利用这种模型来研究一些生态现象, 从而达到对某些生态问题的控制^[8]。常用的种群动力学模型包括 Malthus 人口模型、Logistic 模型和 Lotka-Volterra 模型^[9]。近年来, Lotka-Volterra 模型得到广泛的研究和应用, 先后得到了该模型的滞后效应模型^[10]、功能性反应作用模型^[11]、反应扩散模型^[12,13]等, 这些修正模型考虑到了种群的增长率和环境容纳量的时间效应、非线性繁殖特性、进化过程的时滞效应和随机干扰等因素。

本文运用种群动力学基本原理构造出基于 3 种群 Lotka-Volterra 模型的种群动力学函数优化算法 (Population Dynamics-based Optimization Based on 3 Populations Lotka-Volterra Model, PDO-3P), 其采用与 BBO 算法完全不同的设计思路, 即: PDO-3P 算法假定一生态系统中存在多个不同种类的生物种群, 但只有任意 3 个不同的种群之间进行自由竞争、互惠共存、捕食-被食以及融合等活动, 通过优胜劣汰, 强壮者获得进化, 懦弱被淘汰。测试结果表明, PDO-3P 算法具有很强的搜索能力, 且具有全局收敛性。

2 基于 3 种群 Lotka-Volterra 模型的函数优化算子构造方法

2.1 优化问题试探解与种群动力学参数的关系

为了使 PDO-3P 算法适用于各种优化问题, 将优化问题 (1) 的目标函数改写成下式:

$$F(\mathbf{X}') = \begin{cases} f(\mathbf{X}'), & \forall i \in \{1, 2, \dots, I\}, g_i(\mathbf{X}') \geq 0; \\ & \forall j \in \{1, 2, \dots, E\}, h_j(\mathbf{X}') = 0; \\ F_{\max}, & \text{其它} \end{cases} \quad (2)$$

式中, $F_{\max}$ 是非常大的实数, 用于对不满足约束条件的试探解进行惩罚。

在 PDO-3P 算法中, 一个种群对应于一个优化问题的解, N 个种群所对应的优化问题的解集为 $S = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N\}$, $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$, $i = 1, 2, \dots, N$; 种群 i 中的一个特征参数 j 对应于优化问题试探解中的一个分量 x_{ij} , 特性参数代表了种群的某种特质; 种群的适应度指数 PSI (Population Suitability Index) 对应于优化问题的目标函数值。好的试探解对应具有较高 PSI 值的种群, 即对于优化问题 (1), 种群 i 中的适应度指数 PSI 为:

$$PSI(\mathbf{X}_i) = F_{\max} - F(\mathbf{X}_i) \quad (3)$$

2.2 3 种群 Lotka-Volterra 模型

如果多个种群在一个自然环境中生存, 则它们之间必然相互影响, 每一种的生灭都将与其它种群的存在密切相关。假如 3 个种群的密度分别为 $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$, 且假定种群密度分布是均匀的, 则 3 种群 Lotka-Volterra 模型可以写为:

$$\frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = \mathbf{X}_i (b_i + \sum_{j=1}^3 a_{ij} \mathbf{X}_j), i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

式中, $b_i > 0$ 称为种群 i 的内禀增长率或死亡率; $a_{ij} (i \neq j)$ 的正负符号和绝对值表示种群 j 对种群 i 的影响性质和强度; a_{ii} 表示种群 i 的种内调节参数, $a_{ii} < 0$ 表示种内密度制约^[8]。

我们知道, 两种群之间的关系包括捕食-被食、相互竞争、互惠共存等 3 种, 那么, 3 种群之间的关系有多少种呢? 为了方便说明这个问题, 下面引进图示的方法, 分别把 3 个种群记为 ①、②、③。于是, 对于所有 $i, j \in \{1, 2, 3\}$, 且 $i \neq j$, 我们可得如下规则:

(1) 若种群 ① 供食于种群 ②, 则用图 ① → ② 表示, 对应于式 (4) 中的系数 $a_{12} < 0, a_{21} > 0$;

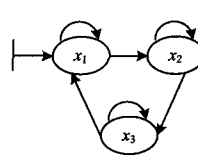
(2) 若种群 ① 是密度制约的, 则用图 ① 表示, 对应于式 (4) 中的系数 $a_{11} < 0$, 否则 $a_{11} = 0$;

(3) 若种群 ① 并不依赖取食我们所考虑的生态系统的其它种群为生, 而是把无限的自然资源转化到我们所考虑的生态系统中来, 则用图 ① 表示, 对应于式 (4) 中的系数 $b_1 > 0$, 否则 $b_1 < 0$;

(4) 若种群 ① 和种群 ② 是竞争关系, 则用图 ① ↔ ② 表示, 对应于式 (4) 中的系数 $a_{12} < 0, a_{21} < 0$;

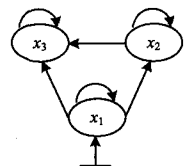
(5) 若种群 ① 和种群 ② 是互惠共存关系, 则用图 ① ↔ ② 表示, 对应于式 (4) 中的系数 $a_{12} > 0, a_{21} > 0$ 。

上述规则 (1)–(5) 可把 3 种群之间的相互作用关系用图形来表示, 下面还需要建立图形与数学模型之间的一一对应关系。在数学模型中, 令 b_i, a_{ij} 都是正数, 从而把正、负号明确地表示出来。3 种群之间的相互作用关系很多, 我们不可能把所有的关系都列举出来, 图 1 仅举例说明几种特殊的图形与 Lotka-Volterra 模型之间的一一对应关系。



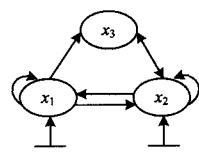
$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}_1}{dt} = \mathbf{X}_1 (b_1 - a_{11}\mathbf{X}_1 - a_{12}\mathbf{X}_2 + a_{13}\mathbf{X}_3) \\ \frac{d\mathbf{X}_2}{dt} = \mathbf{X}_2 (-b_2 + a_{21}\mathbf{X}_1 - a_{22}\mathbf{X}_2 - a_{23}\mathbf{X}_3) \\ \frac{d\mathbf{X}_3}{dt} = \mathbf{X}_3 (-b_3 + a_{32}\mathbf{X}_2 - a_{33}\mathbf{X}_3) \end{cases}$$

(a) 顺环食物链模型



$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}_1}{dt} = \mathbf{X}_1 (b_1 - a_{11}\mathbf{X}_1 - a_{12}\mathbf{X}_2 - a_{13}\mathbf{X}_3) \\ \frac{d\mathbf{X}_2}{dt} = \mathbf{X}_2 (-b_2 + a_{21}\mathbf{X}_1 - a_{22}\mathbf{X}_2 - a_{23}\mathbf{X}_3) \\ \frac{d\mathbf{X}_3}{dt} = \mathbf{X}_3 (-b_3 + a_{31}\mathbf{X}_1 + a_{32}\mathbf{X}_2 - a_{33}\mathbf{X}_3) \end{cases}$$

(b) 非顺环捕食-被食模型



$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}_1}{dt} = \mathbf{X}_1 (b_1 - a_{11}\mathbf{X}_1 - a_{12}\mathbf{X}_2 - a_{13}\mathbf{X}_3) \\ \frac{d\mathbf{X}_2}{dt} = \mathbf{X}_2 (b_2 - a_{21}\mathbf{X}_1 - a_{22}\mathbf{X}_2 + a_{23}\mathbf{X}_3) \\ \frac{d\mathbf{X}_3}{dt} = \mathbf{X}_3 (-b_3 + a_{31}\mathbf{X}_1 + a_{32}\mathbf{X}_2) \end{cases}$$

(c) 非顺环竞争-互惠共存-捕食-被食混合模型

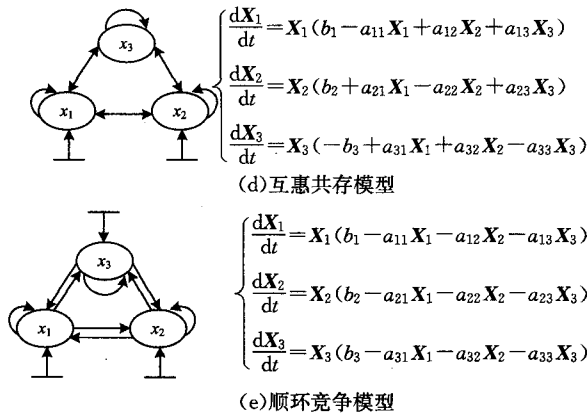


图1 3种群的Volterra模型

2.3 种群进化算子构造方法

2.3.1 种群进化算子

理论上,3种群Lotka-Volterra模型可达 $(2 \times 3)^3 = 216$ 种,每个Lotka-Volterra模型可构造出一种种群进化算子,用于优化问题的求解。将式(4)离散化并考虑随机干扰,则得种群*i*的进化算子^[9]:

$$\begin{aligned} V_i^{t+1} &= X_i^t + b_i X_i^t (1 + \sum_{j=1}^3 \frac{a_{ij}}{b_i} X_j^t) \Delta t + \sigma_i X_i^t (1 + \sum_{j=1}^3 \frac{a_{ij}}{b_i} X_j^t) \sqrt{\Delta t} \\ \xi &+ \frac{(\sigma_i^2)^2}{2} [X_i^t (1 + \sum_{j=1}^3 \frac{a_{ij}}{b_i} X_j^t)]^2 \Delta t [(\xi)^2 - 1] \end{aligned} \quad (5)$$

式中, V_i^{t+1} 为种群*i*的下一代, $V_i^{t+1} = (v_{i,1}^{t+1}, v_{i,2}^{t+1}, \dots, v_{i,n}^{t+1})$;每次进化随机选择3个种群,即 $i \in \{i_1, i_2, i_3\}$, $i_1, i_2, i_3 = \text{Rand}(1, N)$, $\text{Rand}(a, b)$ 表示在 $[a, b]$ 区间产生一个均匀分布随机数,且 $i_1 \neq i_2 \neq i_3$; ξ 为服从 $N(0, \sigma_i^2)$ 的高斯随机变量。

b_i 和 a_{ij} 取不同正、负数,即可得不同类型的进化算子。例如,对于图1的模型(a)~(e), b_i 和 a_{ij} 对应的取法如表1所列。

表1 模型(a)~(e)对应的 b_i 和 a_{ij} 的取法

模型	b_i	a_{ij}
(a)	$b_1 > 0$	$a_{11} < 0, a_{12} < 0, a_{13} > 0$
	$b_2 < 0$	$a_{21} > 0, a_{22} < 0, a_{23} < 0$
	$b_3 < 0$	$a_{31} = 0, a_{32} > 0, a_{33} < 0$
(b)	$b_1 > 0$	$a_{11} < 0, a_{12} < 0, a_{13} < 0$
	$b_2 < 0$	$a_{21} > 0, a_{22} < 0, a_{23} < 0$
	$b_3 < 0$	$a_{31} > 0, a_{32} > 0, a_{33} < 0$
(c)	$b_1 > 0$	$a_{11} < 0, a_{12} < 0, a_{13} < 0$
	$b_2 > 0$	$a_{21} < 0, a_{22} < 0, a_{23} > 0$
	$b_3 < 0$	$a_{31} > 0, a_{32} > 0, a_{33} = 0$
(d)	$b_1 > 0$	$a_{11} < 0, a_{12} > 0, a_{13} > 0$
	$b_2 > 0$	$a_{21} > 0, a_{22} < 0, a_{23} > 0$
	$b_3 < 0$	$a_{31} > 0, a_{32} > 0, a_{33} < 0$
(e)	$b_1 > 0$	$a_{11} < 0, a_{12} < 0, a_{13} < 0$
	$b_2 > 0$	$a_{21} < 0, a_{22} < 0, a_{23} < 0$
	$b_3 > 0$	$a_{31} < 0, a_{32} < 0, a_{33} < 0$

2.3.2 种群融合算子

融合算子描述的是当前种群*i*的某些特性与其它若干个种群的某些特性融合在一起(而余下的特性却保留下来),产生新一代种群,即

$$v_{i,j}^{t+1} = \begin{cases} \alpha x_{i,j}^t + \sum_{k=1}^B \mu_k x_{i,j}^t, & \text{若 } \text{Rand}(0, 1) \leq \mu_k \\ x_{i,j}^t, & \text{其它} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n$ (6)

式中, $v_{i,j}^{t+1}$ 为 V_i^{t+1} 的第*j*个分量; $s_k = \text{Rand}(1, N)$, $\text{Rand}(a, b)$ 表示在 $[a, b]$ 区间产生一个均匀分布随机数; $\forall k \in \{1, 2, \dots,$

$B\}$, $s_k \neq i$; B 为与种群*i*发生融合的其他种群数,称为融合种群数, $B \geq 1$, α, μ_k 称为融合选择率,且 $0 < \alpha < 1, 0 < \mu_k < 1$ 。

2.3.3 种群突变算子

一个种群的PSI较低,若发生突变,则它很有可能突变成更好的种群。种群突变算子定义如下:

$$v_{i,j}^t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m_I} \alpha_k - 1 x_{i,2(k-1),j}^t - \sum_{k=1}^{m_E} \beta_k x_{i,2k+1,j}^t, & \text{若 } \text{Rand}(0, 1) < MR_0 \\ x_{i,j}^t, & \text{其它} \end{cases}$$

$i = N/2, N/2+1, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n$ (7)

式中, MR_0 为突变概率,且 $0 \leq MR_0 \leq 1; k = 1, 2, \dots, N; \forall k, s \in \{1, 2, \dots, N\}$,若 $k \neq i$,则 $i_k \neq i_s \neq i; \alpha_k, \beta_k$ 为突变常数, $0 < \alpha_k, \beta_k < 1; m_I$ 和 m_E 为参与当前种群突变的其它种群数, m_I 为融入当前种群的其它种群数, m_E 为被挤出的种群数, $m_I \geq 2, m_E \geq 1$ 。

2.3.4 种群选择算子

PDO-3P算法通过进化算子(包括竞争、互惠共存、捕食-被食等相互作用)、融合算子和突变算子产生新一代种群之后,采用一对一选择算子将新一代种群与相应的父代种群进行比较,较优者保存到下一代种群中。对于最小化优化问题,其选择算子可以描述为:

$$X_i^{t+1} = \begin{cases} V_i^{t+1}, & \text{若 } F(V_i^{t+1}) < F(X_i^t) \\ X_i^t, & \text{其它} \end{cases} \quad (8)$$

一旦新的种群形成之后,PDO-3P算法继续通过竞争、互利、捕食-被食、融合、突变和选择等算子对群落不断进行演化,直到找到最优解。

3 算法设计及其算法复杂性分析

算法 PDO-3P算法

(1)初始化:a)选择实施种群进化的Lotka-Volterra模型,所选择的模型至少要包含种群竞争、互利、捕食-被食等相互作用关系的模型,模型个数 $M \geq 3$;假设所确定的Lotka-Volterra模型为 $LV_1, LV_2, \dots, LV_M$;b)按第5节的表3给出的参数初始化本算法涉及到的所有参数;c)随机生成*N*个初始解;d)对*N*个初始解从优到劣进行排序,使PSI值较高的初始解排在前面。

(2)执行下列操作。

FOR $t = 1$ TO G/G 为进化最大代数

ELI = $X_i^t, i = 1, 2, \dots, KP$ //将前KP个最佳试探解作为精英保存下来。

FOR $i = 1$ TO N

FOR $j = 1$ TO n

IF $\text{Rand}(0, 1) \leq P_1$ THEN // P_1 为发生模型 LV_1 所描述的相互作用行为的上限, $p_1 = \text{Rand}(0, 1)$ 为该行为出现的实际概率。

按式(5)执行进化算子,得到 V_1^{t+1}, V_2^{t+1} 和 V_3^{t+1} 。

ELSEIF $P_1 < \text{Rand}(0, 1) \leq P_2$ THEN // P_2 为发生模型 LV_2 所描述的相互作用行为的上限, $p_2 = \text{Rand}(0, 1)$ 为该行为出现的实际概率。

按式(5)执行进化算子,得到 V_1^{t+1}, V_2^{t+1} 和 V_3^{t+1} 。

.....

ELSEIF $P_{M-1} < \text{Rand}(0, 1) \leq P_M$ THEN // P_M 为发生模型 LV_M 所描述的相互作用行为的上限, $p_M = \text{Rand}(0, 1)$ 为该行为出现的实际概率。

按式(5)执行进化算子,得到 V_1^{t+1}, V_2^{t+1} 和 V_3^{t+1} 。

ELSE // p_0 为该种群融合行为出现的实际概率。

按式(6)执行融合算子,得到 V_i^{t+1} 。

END IF

END FOR

END FOR

//执行突变操作

重新计算 N 个新试探解 V_i^t 的适应度 PSI , 对 N 个新试探解的从优到劣进行排序。

按式(7)对较差的后 $N/2$ 个试探解进行突变操作, 得到 $v_{i,j}^t$ 。

按式(8)对所有新获得的 N 个试探解 V_i^t 和原试探解 X_i^t 进行选择操作, 得到下一代试探解 X_i^{t+1} , 其中 $i=1, 2, \dots, N$ 。

将超出可行域的解分量压回到可行域。

重新计算 N 个新试探解的适应度 PSI , 对 N 个新试探解的从优到劣进行排序。

IF 新得到的全局最优解与已保存的当前全局最优解之间的误差满足最低要求 ϵ THEN 转(3)

将倒数 KP 个最差的解用保存下来的精英进行替换, 即 $X_{N-KP+1}^{t+1} = El_k, k=1, 2, \dots, KP$ 。

END FOR

(3)结束。

PDO-3P 算法的时间复杂度计算过程如表 2 所列, 其时间复杂度与进化代数 G 、种群规模 N 、变量个数 n 、搜索算子的时间复杂度以及其他辅助操作相关。

表 2 PDO 时间复杂度计算表

操作	时间复杂度	最多循环次数
初始化	$O(n+4nN+N(N+1))$	1
迭代准备	$O(nKP)$	G
执行 LV_1-LV_M 算子	$O(2nM)$	GN
融合算子	$O(8nB)$	GN
目标函数计算	$O(n) \sim O(n^2)$	GN
结果排序	$O(4nN+N(N+1))$	G
突变算子	$O((3M_1+4M_E)n)$	GN
选择算子	$O(3nN)$	G
解分量压回到可行域	$O(3nN)$	G
结果排序	$O(4nN+N(N+1))$	G
精英替换	$O(nKP)$	G
结果输出	$O(n)$	1

4 算法收敛性证明

由 PDO-3P 算法知, 种群 S' 是一个离散的空间, 但每个种群 $X_i^t (i=1, 2, \dots, N)$ 是在连续的实数空间取值。种群总个数为 N , 每个种群即为优化问题(1)的一个候选解, 其适应度值为 $PSI(X_i^t)$ (按式(3)计算), 则所有种群的状态所形成的集合为

$$PSI = \{PSI(X_i^t) | X_i^t \in S'\}$$

进一步令

$$PSI = \{PSI_1, PSI_2, \dots, PSI_N\}, PSI_1 > PSI_2 > \dots >$$

PSI_N

$\forall X \in S'$ 有 $PSI_N \leq F(X) \leq F_1$, 将 S' 划分为非空子集:

$$X_s^t = \{X | X \in S' \text{ 且 } PSI(X) = PSI_i\}, i=1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N |X_s^t| = N; \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, X_s^t \neq \phi;$$

$$\forall i \neq j, X_s^t \cap X_s^t = \phi, \bigcup_{i=1}^N X_s^t = S'$$

令 $X^{i,j} (i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, |X_s^t|)$ 表示 X_s^t 中第 j 个状态。种群在进化过程中, 从一个状态转移到另外的状态可表示为 $X^{i,j} \rightarrow X^{t,i'}$, 则从 $X^{i,j}$ 到 $X^{t,i'}$ 的转移概率为 $p_{ij,k}$, 从 $X^{i,j}$ 到 X_s^t 中任一状态的转移概率为 $p_{ij,k}$, 从 X_s^t 中任一状态

到 X_s^t 中任一状态的转移概率为 $p_{i,k}$, 则有:

$$p_{ij,k} = \sum_{l=1}^{|X_s^t|} p_{ij,kl}; \sum_{k=1}^N p_{ij,k} = 1; p_{i,k} \geq p_{ij,k}$$

引理 1 在 PDO-3P 算法中, $\forall X^{i,j} \in X_s^t, i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, |X_s^t|$, 满足:

$$\forall k > i, p_{i,k} = 0 \quad (9)$$

$$\exists k < i, p_{i,k} > 0 \quad (10)$$

(1)式(9)的证明。设 $X^{i,j}$ 为第 t 次演化后的种群的状态, 记为 Y^t , 设 Y^t 中状态最好的种群为 $gBest^t = X^*$, 即有 $PSI(gBest^t) = PSI_i$ 。由 PDO-3P 算法中在每次演化过程中对当前种群最好状态的更新可知:

$$PSI(X^{t+1}) \geq PSI(X^t) \Rightarrow \forall k > i, p_{ij,k} = 0 \Rightarrow$$

$$\forall k > i, p_{ij,k} = \sum_{l=1}^{|X_s^t|} p_{ij,kl} = 0 \Rightarrow \forall k > i, p_{i,k} = 0$$

(2)式(10)的证明。在 PDO-3P 算法中, 设 $gBest^{t+1}$ 为 Y^{t+1} 中最优种群的状态, 此时种群随机选择活动行为, 有 $LV_1, LV_2, \dots, LV_M$ 等 M 种进化操作、融合操作、突变操作和选择操作等情况, 其执行逻辑如图 2 所示。

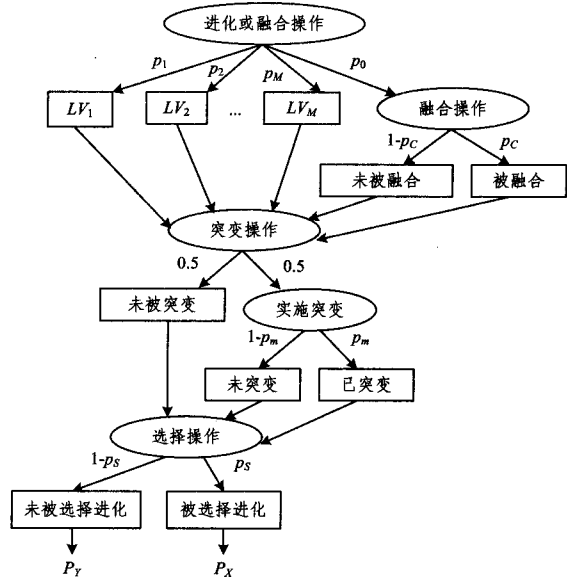


图 2 PDO-3P 算法的执行逻辑

情形 1 当前种群 i 选择 LV_1 行为。若种群 i 的状态可以转移到更优的状态上去, 则种群 i 的状态将以概率 $P_1 = 0.5p_1p_m p_s + 0.5p_1(1-p_m)p_s + 0.5p_1p_s = p_1p_s$ 更新到新状态, 显然 $P_1 > 0$, 命题得证。其中, p_m 为突变算子执行成功的概率(即被突变了); p_s 为选择算子执行成功的概率(即被选中了)。

情形 2 当前种群 i 选择 LV_j 行为, $j=1, 2, \dots, M$ 。若种群 i 的状态可以转移到更优的状态上去, 则种群 i 的状态将以概率 $P_j = p_jp_s$ 更新到新状态, 显然 $P_j > 0$, 命题得证。

情形 3 当前种群 i 选择融合行为。若种群 i 的状态可以转移到更优的状态上去, 则种群 i 的状态将以概率 $P_3 = 0.5p_0p_cp_m p_s + 0.5p_1p_c(1-p_m)p_s + 0.5p_0(1-p_c)p_m p_s + 0.5p_1(1-p_c)(1-p_m)p_s + 0.5p_0p_s = p_0p_s$ 更新到新状态, 显然 $P_3 > 0$, 命题得证。其中, p_c 为融合算子执行成功的概率(即被融合了)。

由于任一种群 i 必选上述 $M+1$ 种行为之一, 即 $\sum_{i=0}^M p_i =$

1, 综合上述各种情况, 可得总概率为 $P_X = \sum_{i=0}^M P_i = \sum_{i=0}^M p_i p_s = p_s \sum_{i=0}^M p_i = p_s$; 类似地, 可得 $P_Y = 1 - p_s$ 。

因 $0 \leq p_s \leq 1$, 易知 $P_X \geq 0, P_Y \geq 0$; 如果 $P_X > 0, P_Y > 0$, 命题得证; 如果 $P_Y = 0, P_X = 1$, 表明 $1 - p_s = 0, p_s = 1$, 即 $F(V_i^*) > F(X_i^*)$ 出现的概率为 1, 表明种群进化还可以继续进行下去; 如果 $P_X = 0, P_Y = 1$, 说明 $p_s = 0$, 即 $F(V_i^*) > F(X_i^*)$ 出现的概率永为 0, 表明种群演化已经到达全局最优解状态 $gBest^{t+1} = X^*$, 而不是局部最优解。

综合上述情况可得 $\exists k < i, p_{i,k} > 0$, 证毕。

定理 1^[14] 设 P' 是一 n 阶可归约随机矩阵, 也就是通过相同的行变换和列变换后可以得到 $P' = \begin{bmatrix} C & \cdots & 0 \\ R & \cdots & T \end{bmatrix}$, 其中 C 是 m 阶本原随机矩阵, 且 $R \neq 0, T \neq 0$, 则有:

$$P'^{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} P'^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} C^k & \cdots & 0 \\ \sum_{i=1}^{k-1} T^i R C^{k-i} & \cdots & T^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{\infty} & \cdots & 0 \\ R^{\infty} & \cdots & T \end{bmatrix}$$

上述矩阵是一个稳定的随机矩阵, 且 $P'^{\infty} = 1' P'^{\infty}, P'^{\infty} = P'^0 P'^{\infty}$ 唯一确定并且与初始分布无关, P'^{∞} 满足如下条件:

$$P'^{\infty} = [p_{ij}]_{n \times n}, \begin{cases} p_{ij} > 0, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ p_{ij} = 0, 1 \leq i \leq n, m < j \leq n \end{cases}$$

该定理的证明可参见文献[14]。

定理 2 PDO-3P 算法具有全局收敛性。

证明: 对于每个 $X_i^s, i = 1, 2, \dots, N$, 可将其看为是有限 Markov 链上的一个状态。根据引理 1 中式(9)的结论可得, 该 Markov 链的转移矩阵为:

$$P' = \begin{bmatrix} p_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \cdots & p_{N,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ R & T \end{bmatrix}$$

根据引理 1 中式(10)的结论得:

$$p_{2,1} > 0, R = (p_{2,1}, p_{3,1}, p_{4,1}, \dots, p_{N,1})^T$$

$$T = \begin{bmatrix} p_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N,2} & \cdots & p_{N,N} \end{bmatrix} \neq 0, C = (p_{1,1}) = (1) \neq 0$$

由以上可知转移矩阵 P' 是 N 阶可归约随机矩阵, 满足定理 1 的条件, 所以下式成立:

$$P'^{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} C^k & \cdots & 0 \\ \sum_{i=1}^{k-1} T^i R C^{k-i} & \cdots & T^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{\infty} & \cdots & 0 \\ R^{\infty} & \cdots & T \end{bmatrix}$$

$$C^{\infty} = (1), R^{\infty} = (1, 1, 1, \dots, 1)^T$$

因此有:

$$P'^{\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ 是稳定随机矩阵, 得 } \lim_{t \rightarrow \infty} p\{F$$

$$(X_i^t) \rightarrow F(X^*)\} = 1, i = 1, 2, \dots, N.$$

因此, PDO-3P 优化算法具有全局收敛性, 证毕。

5 例子研究

5.1 函数优化例子与参数取值及其依据

(1) BUMP 函数优化问题 $f_1(x)$ 是包含一个非线性约束和一个线性约束的高维有界区域多峰函数, 其全局最小值未知。随着维数的增加, 该函数极难优化, 而且约束条件 $\prod_{i=1}^n x_i \geq 0.75$ 中的 $\prod_{i=1}^n x_i$ 容易溢出。该函数的 2 维图形如图 3 所示。

$$\min f_1(X) = -|\sum_{i=1}^n \cos^4(x_i) - 2 \prod_{i=1}^n \cos^2(x_i)| / \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\text{s. t. } \prod_{i=1}^n x_i \geq 0.75, \sum_{i=1}^n x_i \leq 7.5n, 0 < x_i \leq 10$$

(2) Rastrigrin 函数优化问题 $f_2(x)$ 。该函数在搜索空间中存在大量正弦凸起的局部极小值点, 当 $x_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 时达到全局最小值 0。该函数的 $n = 2$ 时的图形如图 4 所示。当维数更高时, 局部最优解的分布将更复杂。

$$\min f_2(x) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10)$$

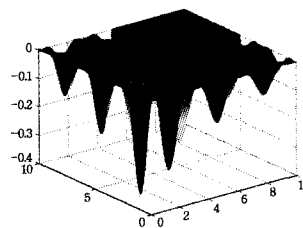


图 3 BUMP 函数图形

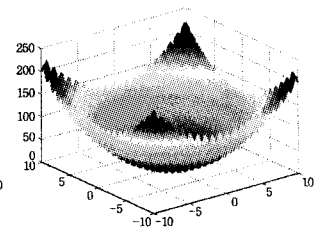


图 4 Rastrigrin 函数图形

优化问题 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 求解所用的模型是图 1 所示的 5 个 Lotka-Volterra 模型, 各模型中的参数正、负号如表 1 所列; 求解过程中的算法参数取值如表 3 所列。

表 3 求解过程各参数取值

参数名	取值
演化次数 G	$G = 20000$
变量数 n	$n = 1000$
种群数 N	$N = 500$
Lotka-Volterra 模型个数 M	$M = 5$
LV_i 行为出现概率上限 p_i	$p_i = i / (M + 1), i = 1 \sim M$
高斯分布 $N(0, \sigma_i^2)$	$\sigma_i^2 = 0.1, i = 1 \sim 3$
融入和挤出种群数 m_1, m_E	$m_1 = 2, m_E = 1$
融合种群数 B	$B = 3$
融合选择率 α, μ_{b_k}	$\alpha = 0.3, \mu_{b_1} = 0.3, k = 1, 2, 3$
突变常数 α_k, β_k	$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.5, \beta_1 = 0.5$
突变概率 MR_0	$MR_0 = 0.3$
精英保存个数 KP	$KP = 2$
Lotka-Volterra 模型参数 b_i, a_{ij}	$b_i = 0.1, a_{ij} = 0.3 (i \neq j), a_{ii} = 0.5, i, j = 1 \sim M$
迭代误差	$\epsilon = 1 \times 10^{-8}$

计算时, 表 3 中各参数取值方法及其依据如下:

(1) 尽管 N 取较大值可扩大搜索空间, 但由表 2 知, 算法总时间复杂度与 N 成正比, 因此, N 不能取得太大, 该参数的取值无需太高的精确性, 只需要依据具体的优化问题和计算机的速度而定, 种群数 $N = 500$ 即合适。

(2) 一个 Lotka-Volterra 模型对应一个种群进化算子, 为确保搜索多样性, M 不能取得太小; 由表 2 知, 算法总时间复杂度与 M 成正比, 因此, M 不能取得太大, 但 M 必须具有竞争、互惠共存以及捕食-被食 3 种独立算子, 即 $M \geq 3$, 对于本文优化问题取 $M = 5$ 即可; 对于模型中的其它参数 b_i, a_{ij}, σ_i^2 , 其取值依据可参见文献[8]。

(3) 对于当前某个种群来说, 其融入的种群数 m_i 必须大

于被挤出的种群数 m_E , 否则该种群的规模会越来越小, 直至消亡; 但由表 2 知, m_I 和 m_E 太大会影响计算速度, 因此 m_I 取最小值 2, m_E 取最小值 1 即可。

(4) 为确保种群多样性, 融合种群数 B 不能太小, 但由表 2 知, B 太大会影响计算速度, 因此 $B=3$ 即可。

(5) 对于突变常数 α 、 β , 融合选择率 α 、 μ_k , 突变概率 MR_0 , 精英保存个数 KP , 其取值依据可参见文献[7]。

(6) 迭代误差 $\epsilon=1 \times 10^{-8}$, 其取值依据是我们希望获得的最优解的精度高低。最大迭代代数 $G=2000$, 其取值依据是防止迭代过程不满足收敛条件 ϵ 时出现无限迭代。

5.2 求解结果及其对比

(1) BUMP 函数优化问题 $f_1(x)$ 求解结果如表 4 所列。

表 4 求解 BUMP 问题的 PDO-3P 算法与 BBO 算法的对比结果

BUMP 问题维数	PDO-3P 算法		BBO 算法	
	目标函数值	耗时 (h)	目标函数值	耗时 (m)
n=20	-0.803605881101687	0.34	-0.4513385612369127	2.33
n=30	-0.821789549623916	0.47	-0.4781292382376343	2.76
n=100	-0.844845471928372	0.64	-0.5191276301252371	4.48
n=500	-0.855219472519328	3.24	-0.5512423812523893	9.67
n=1000	-0.844219382391736	7.18	-0.6572382712651393	19.32

当 $n=20$ 时, PDO-3P 算法得到最优解为: $x=(3.16235390953187, 3.12898368752111, 3.09155024209814, 3.06133201070082, 3.02762637960886, 2.99317397448195, 2.96057813868317, 2.92271131240478, 0.495355830406609, 0.488664124478412, 0.482890733138573, 0.476054404941728, 0.471321716425919, 0.46518220356735, 0.460749476025927, 0.457126057118075, 0.453206871024417, 0.449134318069897, 0.44350836966006, 0.440405171228925)$ 。

当 $n=30$ 时, PDO-3P 算法得到最优解为: $x=(6.27383767181735, 3.15543063344956, 3.12858507579545, 3.10537768619877, 3.08626757890273, 3.0738364494704, 3.04421908784382, 3.01625307649929, 2.99613288836597, 2.96304309144103, 2.95510626490031, 2.92879471689537, 0.480793315069097, 0.470971408110142, 0.464923151131435, 0.471699910094212, 0.452925377244675, 0.462755956882183, 0.444471092939119, 0.458650201100521, 0.453005412757473, 0.450369149133667, 0.449052963656945, 0.457530100747949, 0.430066043258168, 0.443104153112943, 0.441285654703739, 0.432629271764614, 0.42607433502267, 0.422606301963415)$ 。

从表 4 可以看出, 对于求解 BUMP 问题, PDO-3P 算法较 BBO 算法具有明显的优势。

(2) Rastrigrin 函数优化问题 $f_2(x)$ 求解结果如表 5 所列。

表 5 求解 Rastrigrin 问题的 PDO-3P 算法与 BBO 算法的对比结果

BUMP 问题维数	PDO-3P 算法		BBO 算法	
	目标函数值	耗时 (h)	目标函数值	耗时 (m)
n=20	-0.502308723919687E-12	0.12	-0.127335912817724E-12	0.13
n=30	-0.724137351872316E-12	0.28	-0.285892427182875E-12	0.27
n=100	-0.627161792634238E-12	0.67	-0.226222638439265E-12	0.74
n=500	-0.611727274291628E-12	0.79	-0.122639128716351E-12	1.74
n=1000	-0.543701348315257E-12	1.08	-0.161612739128179E-12	10.19

从表 5 可以看出, 对于求解 Rastrigrin 问题, 当维数 n 较低时 ($n < 100$), PDO-3P 算法与 BBO 算法相关, 没有明显的优势; 当维数很高时 ($n > 500$), PDO-3P 算法较 BBO 算法具有明显的优势。

上述例子表明, PDO-3P 算法既适合于求解 BUMP 问题, 又适合于求解其它大规模函数优化问题。

结束语 本文运用 3 种群 Lotka-Volterra 种群动力学模型构造出了可求解大规模复杂优化问题的优化算法, 算法中将 3 种群 Lotka-Volterra 模型改造成种群进化算子, 这些进化选择具有竞争、互惠共存、捕食-被食及 3 者间任意组合等复杂行为。另外, 将种群融合、突变和选择等行为也构造成操作算子, 以便适应更复杂优化问题的求解。这些方法的运用大幅提升了 PDO-3P 算法的性能, 该算法具有全局收敛性, 且适用于求解高维优化问题。今后需要进一步研究的方向是: (1) 如何将 3 个种群间的竞争、互利、捕食-被食及其相互间任意组合行为扩展到更多个种群的情形中; (2) 如何深入分析 PDO-3P 算法的动态行为; (3) 如何确定不同特性的 Lotka-Volterra 模型适合求哪种类型的优化问题; (4) 如何将更多、更反映种群进化实际情况的种群动力学理论用于构造出新的种群动力学优化算法。

参考文献

[1] 王宜举, 修乃华. 非线性优化理论[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 20-25

[2] 黄光球, 王国政, 周静. 用遗传算法求解物流运输中多级中转定位优化问题[J]. 微电子学与计算机, 2006, 23(3): 47-50

[3] 黄光球, 何星. 基于蚁群算法的随机 Petri 网最优路径序列寻找[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(17): 4555-4560

[4] 李晓磊, 邵之江, 钱积新. 一种基于动物自治体的寻优模式: 鱼群算法[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(11): 32-38

[5] 崔志华, 曾建潮. 微粒群优化算法[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 1-9

[6] Leung S C H, Zhang De-fu, Zhou Chang-le, et al. A Hybrid Simulated Annealing Metaheuristic Algorithm for the Two-Dimensional Knapsack Packing Problem[J]. Computed Operation Research, 2012, 39(1): 64-73

[7] Simon D. Biogeography-Based Optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2008, 12(6): 702-713

[8] 陈兰荪, 孟新柱, 焦建军. 生物动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 1-5

[9] 王克. 随机生物数学模型[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 34-48

[10] 田灿荣. 一类带时滞竞争模型的周期解[J]. 生物数学学报, 2007, 22(3): 431-440

[11] 周桦, 刘佳. 带扩散的具有 Holling-IV 类功能性反应的捕食模型的性质[J]. 南京工业大学学报, 2007, 29(5): 66-69

[12] 程惠东, 孟新柱, 王芳. 一类时滞非自治 Lotka-Volterra 扩散生态系统的全局吸引力[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2008, 47(2): 19-22

[13] 刘胜强, 陈兰荪. 阶段结构种群生物模型与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 126-130

[14] Iisufescu M. Finite Markov Processes and Their Applications [M]. Wiley: Chichester, 1980: 223-250