

# 粗糙评估系统与路径优化

李卓文 闫林 宋金鹏 王煦斐

(河南师范大学计算机与信息工程学院 新乡 453007)

**摘要** 通过在近似空间中扩入二元关系以及若干评估因子,得到了粗糙评估系统。基于各评估因子,定义了权重和综合权重的概念,引出了边集合的综合下限值。利用综合下限值对路径进行优化分析,得到了优化算法。进而,通过粗糙评估系统对企业供货关系的描述,形成了实际问题的数学模型,将优化算法施于供货路径,使供货渠道得到了优化,展示了优化算法的有效性。

**关键词** 粗糙评估系统,评估因子,权重,综合下限值,路径优化算法

**中图分类号** TP18 **文献标识码** A

## Rough Assessment System and Path Optimization

LI Zhuo-wen YAN Lin SONG Jin-peng WANG Xu-fei

(College of Computer and Information Technology, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

**Abstract** By adding a binary relation and a number of assessment factors into an approximation space, a rough assessment system was obtained. Based on the assessment factors, the concepts of the weight and the comprehensive weight were defined, which led to the comprehensive lower value of an edge set. So, a path could be optimized by making use of the comprehensive lower value, also an algorithm called path optimization algorithm was formed. Moreover, by a rough assessment system which describes supply relationships between enterprises, a mathematical model of practical problems was constructed. Supply paths were therefore optimized, which resulted in applying path optimization algorithm to the supply paths. This demonstrates the validity of the algorithm.

**Keywords** Rough assessment system, Assessment factor, Weight, Comprehensive lower value, Path optimization algorithm

## 1 引言

粗糙集理论建立在近似空间  $M=(U, R)$  [1-3] 之上,其中  $U$  为非空有限集合,称为论域; $R$  为  $U$  上的等价关系。围绕 Pawlak 粗糙集理论,不少学者将近似空间进行多方面的推广,并取得了一些研究成果[4-6]。文献[7]通过将等价关系  $R$  弱化为相容关系  $S$ ,建立了一种推广的粗糙集模型;文献[8]将树形关系  $T$  扩入近似空间  $M$  之中,得到了树形近似空间;文献[9]构造了一类重要的二维近似空间——矩形近似空间,引入了逻辑公式和公式确定的粒。本文将在近似空间  $M=(U, R)$  的基础上引入基于  $M$  的二元关系  $S$ ,并把以二元关系  $S$  为定义域的若干评估因子  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  扩入到近似空间  $M$ ,在实际中,每一个评估因子根据具体情况确定。如果将  $S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  和  $M$  组合成整体,那么将得到近似空间  $M=(U, R)$  的扩展数学结构。

另一方面,若将近似空间  $M$  以某种方式进行扩充,比如,扩入二元关系  $S$  和  $S$  上的评估因子  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ,得到数学结构  $K=(U, R, S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ ,则将形成有别于其他方式

的扩充方法。下面的研究将与这样扩充的数学结构  $K=(U, R, S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  密切相连,并将之称为粗糙评估系统。相关的工作主要面对粗糙评估系统对具体问题的描述,同时也将借用粗糙集理论处理数据的方法,形成本文研究工作的特点。粗糙评估系统将提供一个理论上的框架,评估因子由具体情况确定,具有灵活性,随着评估因子的变化,将形成各具功能的粗糙评估系统。本文对粗糙评估系统展开讨论,通过评估因子与路径中边的融合引入边的权重,以研究挖掘路径蕴含的信息。通过对路径中综合下限值的分析与研究,给出路径的优化算法,以达到对路径优化的目的,并通过实际例子展示算法的有效性。

## 2 粗糙评估系统

上述讨论表明在近似空间中可引入二元关系  $S$ ,同时确定出二元关系  $S$  上的若干评估因子,把二元关系  $S$  及其一系列评估因子扩入近似空间  $M=(U, R)$  之中,以引出粗糙评估系统,形成近似空间的扩充数学结构。对于  $M=(U, R)$  中的论域  $U$ ,与  $U$  上关系有关的一些概念将在下面的定义及讨论

到稿日期:2012-07-14 返修日期:2012-11-07 本文受河南省自然科学基金(082300410340)资助。

李卓文(1986—),女,硕士生,主要研究方向为粗糙集、粒计算, E-mail: zhuowen164@163.com; 闫林(1957—),男,教授,主要研究方向为数理逻辑、非经典逻辑、粗糙集和粒计算; 宋金鹏(1988—),男,硕士生,主要研究方向为粗糙集、粒计算; 王煦斐(1986—),男,硕士生,主要研究方向为粗糙集。

中涉及,所以先对这些概念予以明确。

**定义 1** 设  $U$  是非空集合,  $C = \{U_1, U_2, \dots, U_r\}$  是  $U$  的子集组成的集合, 即  $U_i \subseteq U, i = 1, 2, \dots, r$ 。如果满足下列条件:

- (1) 对于  $i = 1, 2, \dots, r$ , 有  $U_i \neq \emptyset$ ;
- (2) 当  $i \neq j$  时, 有  $U_i \cap U_j = \emptyset, 1 \leq i, j \leq r$ ;
- (3)  $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_r = U$ 。

则称  $C = \{U_1, U_2, \dots, U_r\}$  是集合  $U$  的划分,  $U_i (i = 1, 2, \dots, r)$  称为划分块。

对于非空有限集  $U$ , 以及  $U$  上的等价关系  $R \subseteq U \times U$ , 文献[10]将数学结构  $M = (U, R)$  称为近似空间, 其中  $U$  称为论域。由文献[11]可知,  $R$  产生的所有等价类的集合  $\{[x] | x \in U\}$  是  $U$  的划分, 记作  $U/R$ 。

**定义 2** 设  $M = (U, R)$  是近似空间,  $U/R = \{U_1, U_2, \dots, U_r\}$  是  $R$  针对  $U$  的划分。若  $S$  是  $U$  上的二元关系, 即  $S \subseteq U \times U$ , 满足:  $\langle x, y \rangle \in S$  时, 有  $x \in U_i, y \in U_j$  且  $U_i \neq U_j$ , 则称  $S$  是基于  $M = (U, R)$  的二元关系。

由定义 2 可知, 基于  $M = (U, R)$  的二元关系  $S$  反映的是等价类之间的联系, 当  $\langle x, y \rangle \in S$  时,  $x$  和  $y$  属于不同的等价类  $U_i$  和  $U_j$ , 这是  $S$  的重要特性, 且  $S$  将作为粗糙评估系统的重要组成部分。因此有必要给出与  $S$  有关的一些概念, 它们在文献[12]中均有定义。

**定义 3** 给定近似空间  $M = (U, R)$ ,  $U$  中的元素称为结点。设  $S$  是基于  $M = (U, R)$  的二元关系。对于  $\langle a, b \rangle \in S$ , 序偶  $\langle a, b \rangle$  称为  $S$  的有向边, 简称为边,  $a$  和  $b$  分别称为始点和终点; 边的序列  $\langle a, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle, \langle x_n, b \rangle (n \geq 0)$  称为从  $a$  到  $b$  的路径。

将近似空间  $M = (U, R)$  与基于  $M = (U, R)$  的二元关系  $S$  相组合, 再融入  $S$  的若干评估因子, 可得到新的数学结构。

**定义 4** 设  $M = (U, R)$  是近似空间,  $S$  是基于  $M = (U, R)$  的二元关系,  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  是从  $S$  到  $(0, 1]$  的函数, 即  $\mu_i: S \rightarrow (0, 1], (i = 1, 2, \dots, n)$ , 称  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  为  $S$  的评估因子。将上述概念组成的整体记作  $K = \langle U, R, S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \rangle$ , 称为粗糙评估系统。

显然, 粗糙评估系统  $K = \langle U, R, S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \rangle$  是  $M = (U, R)$  的扩充, 关系  $S$  和评估因子  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  是扩入的信息。

### 3 综合权重与优化算法

#### 3.1 基于综合权重的综合下限值

**定义 5** 设  $K = \langle U, R, S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \rangle$  是粗糙评估系统。对于  $\langle x, y \rangle \in S$ , 以及  $S$  的评估因子  $\mu_i (1 \leq i \leq n), \mu_i(x, y)$  称为边  $\langle x, y \rangle$  关于  $\mu_i$  的权重, 显然  $\mu_i(x, y) \in (0, 1]$ 。

由定义 5 可知,  $\mu_i(x, y)$  是  $\mu_i$  作用于  $S$  的边  $\langle x, y \rangle$  的结果, 它反映了边  $\langle x, y \rangle$  隶属于  $\mu_i$  的程度。当  $i = 1, 2, \dots, n$  时,  $\mu_1(x, y), \mu_2(x, y), \dots, \mu_n(x, y)$  自然确定, 由此可引出下面的概念。

**定义 6** 设  $K = \langle U, R, S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \rangle$  是粗糙评估系统, 若  $\langle a, b \rangle \in S$ , 则  $\mu_1(a, b) + \mu_2(a, b) + \dots + \mu_n(a, b)$  称为边  $\langle a, b \rangle$  的综合权重, 记作  $\omega(a, b)$ , 即  $\omega(a, b) = \mu_1(a, b) + \mu_2(a, b) + \dots + \mu_n(a, b)$ 。

$\langle a, b \rangle$  的综合权重是各  $\mu_i$  的权重之和, 反映了每一个评

估因子与  $\langle a, b \rangle$  的联系。

**定义 7** 设  $K = \langle U, R, S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \rangle$  是粗糙评估系统,  $H \subseteq S$ , 令  $\lambda H = \min\{\omega(a, b) | \langle a, b \rangle \in H\}$ , 称  $\lambda H$  为  $H$  的综合下限值。

$H$  的综合下限值  $\lambda H$  是  $H$  中每一条边综合权重的最小值。

#### 3.2 基于综合下限值的优化算法

设  $K = \langle U, R, S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \rangle$  是粗糙评估系统,  $P$  是任一关于  $S$  的路径, 令  $\{P\} = \{\langle a, b \rangle | \langle a, b \rangle \text{ 是 } P \text{ 中的边}\}$ , 即  $\{P\}$  是  $P$  中的所有边构成的集合, 此时  $\{P\} \subseteq S$ 。按照定义 7,  $\lambda\{P\}$  表示  $\{P\}$  的综合下限值, 因此存在边  $\langle x, y \rangle \in \{P\}$ , 使得  $\lambda\{P\} = \mu_1(x, y) + \mu_2(x, y) + \dots + \mu_n(x, y)$ , 此时, 路径  $P$  中边  $\langle x, y \rangle$  的综合权重最小。如果各评估因子  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  是对积极现象(如: 正品率表示积极因素, 次品率表示消极因素)的评估, 那么综合下限值  $\lambda\{P\}$  表示了路径  $P$  中的瓶颈问题, 综合下限值最小的边  $\langle x, y \rangle$  可能对路径  $P$  的畅通造成阻碍, 如何消除瓶颈, 使路径  $P$  最大限度畅通, 从而使路径  $P$  得到优化, 是值得探究的问题。如下通过构造算法, 给出路径的优化过程。

按照粗糙集理论的思想, 同一等价类中元素不可分辨, 它们可看作粗糙相同, 故可以从等价类的角度考虑路径  $P$  基于  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  的优化。由上述分析可知, 一定存在边  $\langle x, y \rangle \in \{P\}$ , 使得  $\lambda\{P\} = \mu_1(x, y) + \mu_2(x, y) + \dots + \mu_n(x, y)$ , 由于边  $\langle x, y \rangle$  的综合权重最小, 如果以某种方法替换边  $\langle x, y \rangle$ , 则有可能使路径  $P$  得到优化。对于该路径  $P$ , 按照上面的记法  $\{P\}$  表示  $P$  中所有边的集合, 如果  $\langle a, b \rangle \in \{P\}$ , 由定义 6 得到边  $\langle a, b \rangle$  的综合权重  $\omega(a, b) = \mu_1(a, b) + \mu_2(a, b) + \dots + \mu_n(a, b)$ 。利用这些概念可构造算法如下。

优化算法:

输入: 边集  $\{P\}$

输出: 优化后边的集合  $\{P'\}$

- (1) 初始化:  $\{\{P(x, y)\} = \{\langle c, y \rangle | \langle c, y \rangle \in S \text{ 且 } c \in [x]\}, \{P'\} = \{P\}, \omega(x, y) = \lambda\{P\}\}$ ;
- (2) if  $\{P\} = \emptyset$  then
  - $\{\{P'\} = \{P'\} \cup \langle d, y \rangle - \langle x, y \rangle; \text{return}(\{P'\})\}$
  - while  $(\{P\} \neq \emptyset)$
  - $\{\omega(x, y) = \lambda\{P\};$
  - $\omega(d, y) = \max(\omega(c, y));$
  - if  $(\omega(d, y) > \lambda\{P\})$  then
  - $\{\{P'\} = \{P'\} \cup \langle d, y \rangle - \langle x, y \rangle\}$ ;
  - else  $\{\{P\} = \{P\} - \langle x, y \rangle\}$ ;
  - }

(3) return  $(\{P'\})$

上述算法是对路径  $P$  优化的过程, 基本思路是对  $P$  中的每一条边进行比对或替换, 选取  $\{P(x, y)\}$  中的边  $\langle d, y \rangle$ , 使得  $\omega(d, y)$  最大, 通过比较  $\omega(d, y)$  与  $\lambda\{P\}$  的大小确定替换与否。核心之处在于边集  $\{P(x, y)\}$  的确定, 由于  $\{P(x, y)\} = \{\langle c, y \rangle | \langle c, y \rangle \in S \text{ 且 } c \in [x]\}$ , 以粗糙集理论的观点, 等价类  $[x]$  中的元素被认为粗糙相同, 因此当  $\langle d, y \rangle \in \{P(x, y)\}$  时,  $d \in [x]$ , 又因为  $x \in [x]$ , 故  $d$  与  $x$  是粗糙相同的结点, 此时边  $\langle d, y \rangle$  与  $\langle x, y \rangle$  也看作粗糙相同。因此当  $\omega(d, y) > \lambda\{P\}$  时, 用边  $\langle d, y \rangle$  替换  $\langle x, y \rangle$ , 于是综合权重大的边替换了综合权重小的

边,使对路径的评估得到优化。算法的第(2)步中 $\{P'\}=\{P'\} \cup \langle d, y \rangle - \langle x, y \rangle$ 体现了替换的过程。由于该算法是递归的过程,因此通过递归,将完成对 $P$ 中每一条边的比对或替换,最后得到并输出 $\{P'\}$ ,以显示对 $P$ 优化的结果。下面通过例子具体讨论。

例1 设 $K=\langle U, R, S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \rangle$ 是粗糙评估系统,其中 $U=\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2\}$ , $U$ 中的每一个元素表示一个企业;等价关系 $R$ 以划分的形式给出,即 $U/R=\{[a_1], [b_1], [c_1], [d_1]\}=\{\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}, \{c_1, c_2, c_3\}, \{d_1, d_2\}\}$ ,每一等价类表示同类企业,例如等价类 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 中的 $a_1, a_2, a_3$ 是同类企业;基于 $M=\langle U, R \rangle$ 的关系 $S=\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in U, x$ 给 $y$ 供货且 $x$ 和 $y$ 属于不同的等价类 $\}$ , $S$ 表示了等价类与等价类之间企业的供货关系;各评估因子的含义是: $\mu_1$ 为产品质量评估因子,表示产品优秀、良好、合格率; $\mu_2$ 为供货情况评估因子,表示准时交货率; $\mu_3$ 为成本评估因子,表示成本费用利用率, $\dots, \mu_n$ 可以作为其他某一方面的评估因子。 $K$ 的示意图见图1,其中闭合的虚线框表示等价类,等价类之间的实线有向边和虚线有向边都是 $S$ 中的边。设 $P:\langle a_1, b_2 \rangle, \langle b_2, c_3 \rangle, \langle c_3, d_2 \rangle$ 是从 $a_1$ 到 $d_2$ 的 $S$ 路径(见图1实线部分),表示从 $a_1$ 经 $b_2$ 和 $c_3$ 到 $d_2$ 存在供货渠道。路径 $P$ 是否为最优的供货渠道?可利用算法进行判定和优化。此时 $\{P\}=\{\langle a_1, b_2 \rangle, \langle b_2, c_3 \rangle, \langle c_3, d_2 \rangle\}$ ,将算法作用 $\{P\}$ ,输出 $\{P'\}$ , $\{P'\}=\{\langle a_3, b_2 \rangle, \langle b_1, c_3 \rangle, \langle c_1, d_2 \rangle\}$ 。例1仅对路径 $P$ 采用算法的优化过程进行简单的分析,具体的权重值将在例2中给出,其过程说明如下。

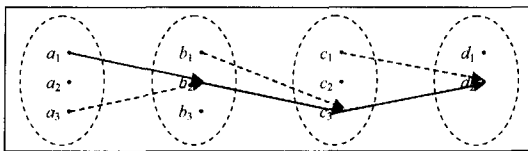


图1 等价类的关系

令 $\{P'\}=\{P\}=\{\langle a_1, b_2 \rangle, \langle b_2, c_3 \rangle, \langle c_3, d_2 \rangle\}$ ,这是执行算法第(1)步的结果。对于 $\{P\}$ 以及确定的权重,假设 $\omega(b_2, c_3)=\lambda\{P\}$ ,此时假定了边 $\langle b_2, c_3 \rangle$ 的综合权重最小,执行算法第(2)步可以选定边 $\langle b_2, c_3 \rangle$ 。由第(1)步令 $\{P(b_2, c_3)\}=\{\langle b_1, c_3 \rangle, \langle b_2, c_3 \rangle, \langle b_3, c_3 \rangle\}$ ,此时设定 $\{P(b_2, c_3)\}$ 中有3条边,设 $\omega(b_1, c_3)$ 最大且 $\omega(b_1, c_3) > \omega(b_2, c_3)$ ,根据第(2)步将 $\{P'\}$ 的边 $\langle b_2, c_3 \rangle$ 用边 $\langle b_1, c_3 \rangle$ 进行替换,执行此步的结果是 $\{P\}=\{\langle a_1, b_2 \rangle, \langle c_3, d_2 \rangle\}$ , $\{P'\}=\{\langle a_1, b_2 \rangle, \langle b_1, c_3 \rangle, \langle c_3, d_2 \rangle\}$ ,此时 $\{P\}$ 中边数减少, $\{P'\}$ 中边的个数保持不变,但新加入的边 $\langle b_1, c_3 \rangle$ 替换了原来的边 $\langle b_2, c_3 \rangle$ 。由于 $\{P\} \neq \emptyset$ ,根据算法的安排返回第(2)步。执行第(2)步,选出 $\{P\}$ 中综合权重最小的边,不妨设为 $\langle a_1, b_2 \rangle$ ,即 $\omega(a_1, b_2)=\lambda\{P\}$ 。根据第(1)步,设 $\{P(a_1, b_2)\}=\{\langle a_1, b_2 \rangle, \langle a_3, b_2 \rangle\}$ ,并假定 $\omega(a_3, b_2)$ 最大且 $\omega(a_3, b_2) > \omega(a_1, b_2)$ ,由第(2)步将 $\{P'\}$ 的边 $\langle a_1, b_2 \rangle$ 用边 $\langle a_3, b_2 \rangle$ 进行替换,得到结果 $\{P\}=\{\langle c_3, d_2 \rangle\}$ 以及 $\{P'\}=\{\langle a_3, b_2 \rangle, \langle b_1, c_3 \rangle, \langle c_3, d_2 \rangle\}$ 。由于 $\{P\} \neq \emptyset$ ,根据算法的安排返回第(2)步。执行算法第(2)步,由于 $\{P\}$ 中仅有边 $\langle c_3, d_2 \rangle$ ,因此 $\omega(c_3, d_2)=\lambda\{P\}$ ,根据第(1)步,设 $\{P(c_3, d_2)\}=\{\langle c_1, d_2 \rangle, \langle c_2, d_2 \rangle, \langle c_3, d_2 \rangle\}$ ,并假定 $\omega(c_1, d_2)$ 最大且 $\omega(c_1, d_2) > \omega(c_3, d_2)$ 。根据第(2)步将 $\{P'\}$ 的边 $\langle c_3, d_2 \rangle$ 用边 $\langle c_1, d_2 \rangle$ 进行替换,此步执行后

$\{P\}=\emptyset$ 且 $\{P'\}=\{\langle a_3, b_2 \rangle, \langle b_1, c_3 \rangle, \langle c_1, d_2 \rangle\}$ 。由第(3)步输出 $\{P'\}=\{\langle a_3, b_2 \rangle, \langle b_1, c_3 \rangle, \langle c_1, d_2 \rangle\}$ (见图1中的虚线边)。

算法实现了从 $\{P\}$ 到 $\{P'\}$ 的转化,但可能存在这样的问题: $P$ 是一条路径,但是 $\{P'\}$ 是边的集合,图1中 $\{P'\}=\{\langle a_3, b_2 \rangle, \langle b_1, c_3 \rangle, \langle c_1, d_2 \rangle\}$ 不是一条路径,但是 $\{P'\}$ 中每一条边的始点与终点同 $P$ 的某一边的始点与终点分别位于同一等价类中。例如,边 $\langle a_1, b_2 \rangle \in \{P\}, \langle a_3, b_2 \rangle \in \{P'\}$ ,由于 $a_1, a_3 \in [a_1], b_2 \in [b_1]$ ,故边 $\langle a_1, b_2 \rangle$ 与边 $\langle a_3, b_2 \rangle$ 可看作粗糙相同。从上述分析可知, $\{P'\}$ 可能是路径,也可能构不成路径(如图1中虚线的边),但是 $\{P'\}$ 以 $P$ 为基础,它们所跨越的等价类相同,仅可能是同一等价类中结点间的差别,但该差别被认为粗糙相同。若 $\{P'\}$ 是路径,这种转换非常理想;若 $\{P'\}$ 不是路径, $\{P'\}$ 中边的信息也是重要的,因为 $\{P'\}$ 中的每条边与 $P$ 中被替换的边连接着相同的等价类,而同一等价类表示同一类企业,所以 $\{P'\}$ 与 $P$ 描述了相同的企业关联关系。这是引入关系 $S$ 的目的,它基于近似空间 $M=(U, R)$ ,建立了等价类之间的联系,提供了等价类路径之间的基础。具体到本例的输出结果 $\{P'\}=\{\langle a_3, b_2 \rangle, \langle b_1, c_3 \rangle, \langle c_1, d_2 \rangle\}$ ,它表明 $a_1$ 与 $d_2$ 之间通过 $b_1$ 和 $c_1$ 存在着潜在的供货渠道,这种潜在的供货渠道可能是不明确或不易察觉的。它们可以为企业管理者的决策提供指导方向,供企业在未来的生产中借鉴。

#### 4 实例分析

对于例1中的粗糙评估系统 $K=\langle U, R, S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \rangle$ ,其各部分并不十分明确。下面继续展开讨论,使问题具体化。

例2 设 $U$ 是某汽车制造产业链上所有企业的集合,根据产品的不同将企业分为不同的类别,使每个企业属于且仅属于一个类。结合例1的分析,选取评估因子 $\mu_1, \mu_2$ 和 $\mu_3$ ,可得粗糙评估系统 $K_1=\langle U, R, S, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle$ 。图2为该产业链上企业之间的供货关系。

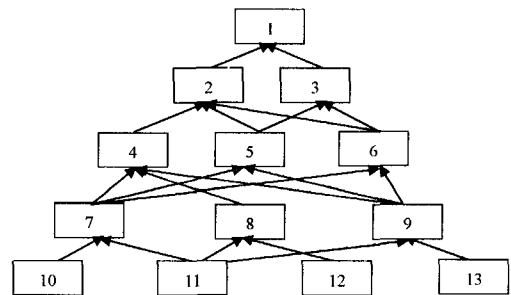


图2 供货关系

由图2可知 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ ,其中的元素表示不同的企业; $U/R=\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{10, 11, 12, 13\}\}$ ,每一等价类对应图2的某一层,自然等价关系 $R$ 得以确定; $S$ 是图2中有向边的集合,例如, $\langle 10, 7 \rangle, \langle 9, 5 \rangle, \langle 6, 3 \rangle$ 等都是 $S$ 中的边,各条边反映了企业之间的供货关系,比如边 $\langle 10, 7 \rangle$ 表示企业10给企业7供货;该系统有3个评估因子 $\mu_1, \mu_2$ 和 $\mu_3$ ,它们都是从 $S$ 到 $[0, 1]$ 的函数,各自的含义见例1, $\mu_1, \mu_2$ 和 $\mu_3$ 的函数值根据实际供货情况确定,只要供货链形成, $\mu_1, \mu_2$ 和 $\mu_3$ 的函数值自然就确定。

下面根据讨论的需求,将明确涉及边的函数值。

设  $P: \langle 10,7 \rangle, \langle 7,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle$  为从企业 10 到企业 1 关于  $S$  的路径,它反映了企业 10 到企业 1 的供货链。此时得到边集  $\{P\} = \{\langle 10,7 \rangle, \langle 7,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$ 。评估因子  $\mu_1, \mu_2$  和  $\mu_3$  关于  $\{P\}$  中各边的权重取值如下:

$$\mu_1(10,7) = 0.77, \mu_2(10,7) = 0.65, \mu_3(10,7) = 0.57$$

$$\mu_1(7,4) = 0.61, \mu_2(7,4) = 0.59, \mu_3(7,4) = 0.73$$

$$\mu_1(4,2) = 0.58, \mu_2(4,2) = 0.63, \mu_3(4,2) = 0.86$$

$$\mu_1(2,1) = 0.83, \mu_2(2,1) = 0.51, \mu_3(2,1) = 0.78$$

结合 3.2 节的讨论,根据优化算法对路径  $P$  进行优化。通过上述权重和定义 6 可求得,  $\omega(10,7) = \mu_1(10,7) + \mu_2(10,7) + \mu_3(10,7) = 0.77 + 0.65 + 0.57 = 1.99$ , 同理可得  $\omega(7,4) = 1.93, \omega(4,2) = 2.07, \omega(2,1) = 2.12$ , 由定义 7 可求得  $\omega(7,4) = \lambda\{P\}$ , 同时图 2 表明:  $\{P(7,4)\} = \{\langle 7,4 \rangle, \langle 8,4 \rangle, \langle 9,4 \rangle\}$ ,  $\{P(7,4)\}$  中边的权重取值如下:

$$\mu_1(8,4) = 0.82, \mu_2(8,4) = 0.64, \mu_3(8,4) = 0.57$$

$$\mu_1(9,4) = 0.77, \mu_2(9,4) = 0.72, \mu_3(9,4) = 0.63$$

由等价类的特性可知,同一个等价类中的元素是不可分辨的,因此,由 3.2 节的优化算法可以对路径  $P$  进行如下的优化:

由于  $\{P\} = \{\langle 10,7 \rangle, \langle 7,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$  中有 4 条边,根据优化算法的安排,将进行 4 次循环,循环之前  $\{P\} = \{P'\}$  (见优化算法第(1)步)。下面是每一次循环后  $\{P\}$  和  $\{P'\}$  的结果:

第一次循环的过程:由图 2 知  $\{P(7,4)\} = \{\langle 7,4 \rangle, \langle 8,4 \rangle, \langle 9,4 \rangle\}$ , 通过定义 6 可求得每条边的综合权重:  $\omega(7,4) = 1.93, \omega(8,4) = 2.03, \omega(9,4) = 2.12$ 。由于  $\omega(9,4) > \omega(8,4)$  且  $\omega(9,4) > \omega(7,4)$ , 故算法运行的结果是  $\{P\} = \{\langle 10,7 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$ ,  $\{P'\} = \{\langle 10,7 \rangle, \langle 9,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$ 。可做这样的解释:因为  $\omega(9,4)$  最大且  $\omega(9,4) > \omega(7,4)$ , 边  $\langle 7,4 \rangle$  被综合权重最大的边  $\langle 9,4 \rangle$  所替换。

第二次循环的过程:第一次循环后,  $\{P\} = \{\langle 10,7 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$ , 此时  $\omega(10,7) = \lambda\{P\}$ , 并可求得  $\{P(10,7)\} = \{\langle 10,7 \rangle, \langle 11,7 \rangle\}$  (见图 2), 且假定边  $\langle 11,7 \rangle$  关于  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  的权重函数值分别是:  $\mu_1(11,7) = 0.73, \mu_2(11,7) = 0.55, \mu_3(11,7) = 0.69$ ; 由定义 6 可知,  $\omega(11,7) = 1.97$ 。由于  $\omega(11,7) < \omega(10,7)$ , 因此  $\{P'\}$  保持不变。此时  $\{P\} = \{\langle 4,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$ ,  $\{P'\} = \{\langle 10,7 \rangle, \langle 9,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$ 。

第三次循环的过程:第二次循环后,  $\{P\} = \{\langle 4,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$ , 可求得  $\omega(4,2) = \lambda\{P\}$ 。由图 2 可知  $\{P(4,2)\} = \{\langle 4,2 \rangle, \langle 5,2 \rangle, \langle 6,2 \rangle\}$ , 且假定边  $\langle 5,2 \rangle$  和  $\langle 6,2 \rangle$  关于  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  的权重函数值分别是:  $\mu_1(5,2) = 0.61, \mu_2(5,2) = 0.58, \mu_3(5,2) = 0.73$  以及  $\mu_1(6,2) = 0.52, \mu_2(6,2) = 0.76, \mu_3(6,2) = 0.6$ 。由定义 6,  $\omega(5,2) = 1.92, \omega(6,2) = 1.88$ 。因为  $\omega(6,2) < \omega(5,2) < \omega(4,2)$ , 所以  $\{P'\}$  保持不变。此时  $\{P\} = \{\langle 2,1 \rangle\}$ ,  $\{P'\} = \{\langle 10,7 \rangle, \langle 9,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$ 。

第四次循环的过程:第三次循环后,  $\{P\} = \{\langle 2,1 \rangle\}$ , 可求得  $\omega(2,1) = \lambda\{P\}$ , 由图 2 可知  $\{P(2,1)\} = \{\langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$ , 且假定边  $\langle 3,1 \rangle$  关于  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  的权重函数值分别是:  $\mu_1(3,1) = 0.8, \mu_2(3,1) = 0.61, \mu_3(3,1) = 0.73$ 。由定义 6,  $\omega(3,1) =$

2.14 且  $\omega(3,1) > \omega(2,1)$ , 可用边  $\langle 3,1 \rangle$  替换边  $\langle 2,1 \rangle$ , 算法运行的结果是  $\{P\} = \emptyset, \{P'\} = \{\langle 10,7 \rangle, \langle 9,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$ 。

因为  $\{P\} = \emptyset$ , 由算法第(3)步, 输出  $\{P'\} = \{\langle 10,7 \rangle, \langle 9,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$ 。

观察图 2 可知,  $\{P'\} = \{\langle 10,7 \rangle, \langle 9,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$  不是一条路径, 但它与路径  $P: \langle 10,7 \rangle, \langle 7,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle$  经过的等价类(相同企业的分类)是相同的。因此优化后的边集  $\{P'\}$  为企业提供了未来供货的趋向, 以便企业在未来的生产流通中加以借鉴。

**结束语** 粗糙评估系统以 Pawlak 近似空间  $M = (U, R)$  为基础, 将基于  $M$  的多元关系  $S$  及其上的若干评估因子扩入其中, 从而形成了路径粗糙评估的数学框架  $K = \langle U, R, S, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \rangle$ 。基于该框架, 结合综合下限值, 构造了路径的优化算法。该算法的特点是边的最优替换, 最优的边通过全部评估因子进行确定。如果根据需要针对单个评估因子进行优化, 便可以得到偏重于某一评估因子的路径优化方法, 该问题可以作为今后探讨的方面。利用粗糙评估系统对路径进行优化是本文建立的一种方法, 与企业供货渠道的结合是研究成果在应用方面的探索。该文的讨论为进一步展开对粗糙评估系统的研究及应用奠定了基础。

## 参 考 文 献

- [1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Information and computer Science, 1982, 11: 314-356
- [2] Peters J F, Skowron A, Jarosaw S. Nearness of objects; Extension of approximation space model[C]// Special Issue on Concurrency Specification and Programming. Amsterdam, Netherlands, IOS Press, 2007
- [3] Skowron A. Approximate Reasoning in MAS: Rough Set Approach[C]// Proceeding WI '06 Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Web Intelligence. Washington, DC, USA, 2006
- [4] Zhu W, Wang F Y. A new type of covering rough set [M]. London, UK: IEEE Inc, 2006
- [5] Zhu W. Relationship among basic concepts in covering-based rough sets[J]. Information Sciences, 2009, 179(14): 2478-2486
- [6] Ouyang Y, Wang Z D, Zhang H P. On fuzzy rough sets based on tolerance relations[J]. Information Sciences, 2010, 180(4): 532-542
- [7] Zhu W, Wang F Y. Relation and axiomization of covering generalized rough set[J]. Information Sciences, 2003, 152: 217-230
- [8] 闫林. 基于上近似的近似推理[J]. 计算机工程与应用, 2011(9): 29-32
- [9] 闫林, 党留群, 魏雁天, 等. 二维近似空间上基于粒计算的数据识别[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(1): 75-78
- [10] 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001
- [11] 闫林. 数理逻辑基础与粒计算[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 172-197
- [12] Kolman B, Busby R C, Ross S C. Discrete mathematical structures( fourth edition) [M]. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 2001