

# 基于单层双树小波变换和平滑零范数法的压缩感知图像重构

苏立超<sup>1</sup> 黄添强<sup>1,2</sup> 吴铁浩<sup>1</sup> 袁秀娟<sup>1</sup>

(福建师范大学数学与计算机科学学院 福州 350007)<sup>1</sup>

(福建师范大学网络安全与密码技术福建省高校重点实验室 福州 350007)<sup>2</sup>

**摘要** 基于压缩感知理论,从图像稀疏变换方式和压缩感知恢复算法两方面出发,对原有算法进行改进,提出了基于单层双树小波变换和平滑零范数法(Smoothed- $l_0$ )的压缩感知图像重构算法(DTSL $_0$ )。该算法的思想是:对原始图像进行双树实系数小波稀疏变换,并使用 Smoothed- $l_0$  压缩感知恢复算法予以重构。仿真实验表明:该算法在图像重构质量、执行速度,以及鲁棒性方面均有显著提升。

**关键词** 压缩感知,双树小波变换,图像重构,平滑零范数  
**中图分类号** TN911.7 **文献标识码** A

## Image Reconstruction Method Using Smoothed- $l_0$ and Dual-tree Wavelet Transform

SU Li-chao<sup>1</sup> HUANG Tian-qiang<sup>1,2</sup> WU Tie-hao<sup>1</sup> YUAN Xiu-juan<sup>1</sup>

(School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)<sup>1</sup>

(Key Laboratory of Network Security and Cryptography, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)<sup>2</sup>

**Abstract** This paper presented a new algorithm for image reconstruction based on smoothed- $l_0$  and dual-tree wavelet transform to save execution time and increase the quality of reconstruction. The dual-tree wavelet transform was used for image sparse and the Smoothed- $l_0$  algorithm was selected for reconstructing the image. The experiment results show that DTSL $_0$  improves the execution speed and the the quality and robustness of the reconstructed image.

**Keywords** Compressed sensing, Dual-tree wavelet transform, Image reconstruction, Smoothed- $l_0$  algorithm

近年来,由美国斯坦福大学 Donoho 和 Candès 提出的压缩感知理论<sup>[1,2]</sup>引起了广泛的关注。压缩感知可以通过较少采样数来恢复原始信号,减少了数据量,提高了传输效率。该理论以信号的稀疏性为先验条件,将信号进行稀疏变换,并构造测量矩阵对变换后的信号表示进行测量,将获得维数较低的测量值作为编码结果。解码过程则是通过某种恢复算法来求解出信号的稀疏表示,并对信号的稀疏表示进行逆变换,重构出原始信号。目前,压缩感知恢复算法主要有基追踪(BP)算法、正交匹配追踪(OMP)算法、子空间追踪(SP)算法和 Smoothed- $l_0$  (SL $_0$ )算法等<sup>[3]</sup>;这些算法在重构质量、执行速度和鲁棒性等方面各有特点。压缩感知作为一种新理论,其许多成果仍局限于实验仿真,实际运用尚处于探索阶段。

在运用压缩感知技术对图像进行处理时,传统的稀疏化方法是对图像使用多层小波变换。但是,反复的小波变换和逆变换操作将会使得计算量大增。针对这一不足,文献[4]提出了一种只需进行单层的小波变换的新方法,它结合 OMP 恢复算法对图像进行重构,使得图像的重构质量较传统方法有所提升,同时有效地减少了计算量。但由于离散小波变换不具平移不变性,且方向选择较少,因此变换效率较低。同时,采用 OMP 算法的重构精度也不够高。针对以上问题,本

文提出了一种新的算法,即从稀疏化方式上和压缩感知重构算法两方面出发,使用单层双树实系数小波对图像进行稀疏变换,并结合 Smoothed- $l_0$  压缩感知恢复算法重构图像。实验结果表明,该算法在图像重构质量、执行速度和鲁棒性等方面均有显著提升。

## 1 压缩感知理论

已知长度为  $N$  的一维信号  $f$ ,  $\Psi$  为一个  $N \times N$  的正交矩阵,如果满足  $f = \Psi x$ ,其中  $x$  是  $N \times 1$  的稀疏向量,则  $f$  是稀疏的。在一般情况下,将一个长度为  $N$  的一维信号  $f'$  投影到  $\Omega$  上得到矩阵  $y$ ,即  $y = \Omega f'$ ,若信号  $f'$  满足稀疏性的先验条件,那么就有:

$$y = \Omega f' = \Omega f = \Omega \Theta x = \Theta x \quad (1)$$

式中,  $\Theta$  为  $M \times N$  的矩阵,称为传感矩阵。

如果  $\Omega$  和  $\Psi$  不相关且  $x$  的大多数元素都为零时,源信号  $f$  的重构过程就是解决下式  $l_0$  最优化问题:

$$\text{argmin} \|x\|_{l_0} \quad \text{s. t. } y = \Theta x \quad (2)$$

式(2)中的  $l_0$  范数问题又可以转换为  $l_1$  范数后采用 BP 算法、LASSO 等线性规划方法<sup>[5]</sup>求解出  $x$ ,最终重构出源信号  $f$ 。

到稿日期:2012-05-20 返修日期:2012-08-12 本文受国家自然科学基金(61070062),福建省高校服务海西建设重点项目(2008HX200941-4-5),福建省高校新世纪优秀人才项目(JA11038),福建省高校创新团队培育计划资助。

苏立超(1989-),男,硕士,主要研究方向为数据挖掘,E-mail:651424071@qq.com;黄添强(1971-),男,博士,副教授,主要研究方向为机器学习与数据挖掘。

近年来,随着新的压缩感知恢复算法相继被提出,求解  $x$  的方法已不仅仅局限于将式(2)转化为  $l_1$  范数的求解方法。基于贪婪原理的匹配追踪(MP)和正交匹配追踪(OMP)<sup>[6]</sup>这两种算法重构速度较快但精确度略低<sup>[7]</sup>;子空间追踪(SP)算法也是一种非常有效的回溯算法,它拥有更好的重构质量却略显复杂<sup>[8,9]</sup>;Smoothed- $l_0$  则是一种凸优化的重构算法,它的速度更快,重构精度更高,并且对噪声有较强的鲁棒性<sup>[10-12]</sup>。

## 2 双树小波变换

小波变换被广泛运用于去噪、稀疏化等信号处理中,但传统的离散小波变换(DWT)仍然存在两方面缺陷,一是不具备平移不变性,二是有限的方向选择性<sup>[13]</sup>。针对这些缺陷,N. G. Kingsbury 于 1998 年提出了双树复小波(Dual-tree Complex Wavelet Transform, DTCWT)概念<sup>[13]</sup>,这种双树复小波拥有近似平移不变性以及更多的方向选择性,但其代价是冗余度变大(为 1:4),降低了计算效率。Selesniek 在此基础上进行改进,提出了一种实系数双树小波变换(DTWT)<sup>[14]</sup>。DTWT 不仅保留了双树复小波原有的优点,并且将冗余度降至 1:2,使得 DTWT 在计算效率上更接近于传统的离散小波变换。

二维 DTWT 实现过程中,采用两组满足 Hilbert 变换的滤波器对  $(H_{a0}, H_{a1})$  和  $(H_{b0}, H_{b1})$  分别对输入的二维信号进行水平方向和垂直方向滤波。每一层的 DTWT 分解都将获得 8 个分量;  $LL_a, HL_a, LH_a, HH_a, LL_b, HL_b, LH_b$  和  $HH_b$ , 其中  $LL_a$  和  $LH_a$  为低频分量,其余分量为对应  $\pm 75^\circ, \pm 15^\circ$  和  $\pm 45^\circ$  6 个不同方向的高频分量<sup>[15,16]</sup>。无论低频分量还是高频分量,其数据大小均与二维 DWT 的同一层的分量大小一致,并且每一层的总体数据的冗余度均为 1:2,与 DTWT 分解层数无关<sup>[17]</sup>。DTWT 由于拥有更多的高频分量,能更好地描述图像的方向性,因此提高了图像的分解与重构的精度。

## 3 DTSL<sub>0</sub> 算法

本文提出的 DTSL<sub>0</sub> 算法采用实系数双树小波变换(DTWT)对图像进行稀疏化。DTWT 由于拥有接近于 DWT 的计算效率和更多方向的高频分量,因此能够有效地提高图像的分解与重构精度。在测量矩阵的选择上,本文构造局部置乱哈达玛随机矩阵,并将其作为测量矩阵,这种矩阵的各行和各列之间相互正交,并且其元素只由“-1”和“1”两种元素构成,与传统的高斯随机矩阵相比,不仅构造简单而且存储空间需求较小。

在恢复算法的选择上,本文采用 Smoothed- $l_0$  算法作为恢复算法。该算法是一种凸优化算法,使用梯度上升法对目标值进行逼近,算法简捷且速度快。该算法并不是将式(2)转换为  $l_1$  范数求解,而是构造一个函数  $f_\sigma(x)$ ,使得当  $|x| \ll \sigma$  时,  $f_\sigma(x) \rightarrow 1$ ; 当  $|x| \gg \sigma$  时,  $f_\sigma(x) \rightarrow 0$ ,并根据  $f_\sigma(x)$  再定义如下求和函数:

$$F_\sigma(x) = \sum_{i=1}^N f_\sigma(x_i)$$

由于  $\|x\|_{l_0} \approx N - F_\sigma(x)$ ,为了使  $\|x\|_{l_0}$  的值最小,将问题转换为求解  $F_\sigma(x)$  的最大值,因此可以采用梯度上升法来逼近  $F_\sigma(x)$  的最大值<sup>[10-12]</sup>。

综上所述,本文提出的 DTSL<sub>0</sub> 算法的具体步骤如下:

(1)输入  $N \times N$  原始图像,使用 DTWT 对其进行稀疏化,得到 2 个低频分量和 6 个高频分量。

(2)根据原始图像的采样率,确定测量矩阵的行数  $M$ ,并按照如下方法构造  $M \times (N/2)$  局部置乱哈达玛矩阵:

- a)构造一个大小为  $(N/2) \times (N/2)$  的哈达玛随机矩阵;
- b)对该随机矩阵进行随机行置乱操作,并取其中的  $M$  行构成一个新的矩阵  $A'$ ;
- c)对  $A'$  进行随机列置乱操作,得到测量矩阵  $A$ 。

(3)保留 DTWT 后的 2 个低频分量不做测量,使用测量矩阵  $A$  分别对其余 6 个高频分量进行测量,得到 6 个测量值矩阵。

(4)使用 Smoothed- $l_0$  算法分别对 6 个测量值矩阵进行恢复,分别得到 6 个恢复结果;Smoothed- $l_0$  算法步骤如下:

- a)构造一个逐步递减数组  $\hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ ; 计算方程  $y = \Theta x$  的最小  $l_2$  范数解  $\bar{X}$ ; 初始化变量  $k=1$ ;
- b)令  $\sigma' = \sigma k$ ,以  $\bar{X}$  为初值,重复  $L$  次使用梯度上升法对目标点进行逼近,得到  $X'$ ;
- c)若  $k < N$ ,令  $k = k + 1, \bar{X} = X'$ ,返回步骤 b); 若  $k = N$ ,则执行步骤 d);
- d)返回最终结果:  $\bar{X}$ 。

(5)将 6 个恢复结果和保留的 2 个低频分量一起进行实系数双数小波逆变换,重构出原始图像,并进行评价。

## 4 仿真实验结果

为了测试 DTSL<sub>0</sub> 算法的性能,本章将该算法同其他压缩感知恢复算法进行对比。对比算法包括以下 3 种:

- a)使用离散小波变换对图像进行稀疏变换,并结合 SP 压缩感知恢复算法重构图像(简称 DWSP);
- b)使用离散小波变换对图像进行稀疏变换,并结合 Smoothed- $l_0$  压缩感知恢复算法重构图像(简称 DWSL<sub>0</sub>);
- c)使用离散小波变换对图像进行稀疏变换,并结合 OMP 压缩感知恢复算法重构图像(简称 DWOMP)。

### 4.1 无噪声条件下的图像重构质量对比

在本节实验中,考察在无噪声条件下原始图像(256×256 灰度图)的采样率分别为 30%~90% 时各个算法的图像重构质量。图 1 为针对 Lena 和 Cameraman 两种图像的重构结果,其中纵坐标为图像峰值信噪比 PSNR(单位为 dB)。表 1 进一步给出了其它 5 种图像在无噪声条件下各种不同算法的图像重构质量的比较结果(都取采样率为 60%)。

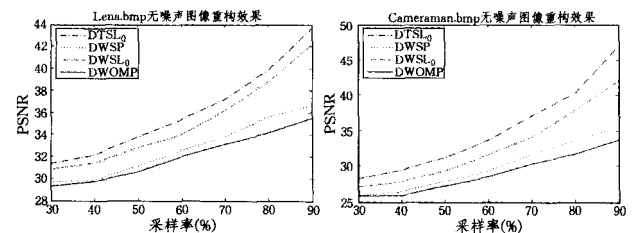


图 1 无噪声时各算法的图像重构质量对比图

表 1 无噪声时各种算法的图像重构质量对比(采样率为 60%)

图像名称	DWOMP	DWSL <sub>0</sub>	DWSP	DTSL <sub>0</sub>
boat. bmp	28.02	30.70	28.93	32.32
bridge. bmp	22.85	24.95	23.37	26.81
goldhill. bmp	28.62	30.93	29.21	32.62
telephone. bmp	38.36	41.18	38.78	43.19
wombats. bmp	24.27	26.66	24.85	28.37

从仿真结果可以看出,与其它算法相比较,本文提出的

DTSL<sub>0</sub> 算法在多幅图像的重构质量上有显著的提升,尤其随着采样率的逐渐增大,本算法的优势更明显。从实验结果可以看出,在同样采用传统小波变换的情况下,使用 SL<sub>0</sub> 作为恢复算法比使用 OMP 和 SP 作为恢复算法可使图像改善幅度达到 1.5~2.7dB;在同样采用 SL<sub>0</sub> 作为恢复算法的情况下,使用双树小波变换可使图像改善幅度达到 1.5~2.0dB。因此,本文提出的 DTSL<sub>0</sub> 算法获得了更好的重构效果。

#### 4.2 有噪声条件下的图像重构质量对比

在本节的实验中,考察在对 256×256 灰度图像加入不同方差的高斯白噪声后不同算法的重构质量,其中噪声的方差取值范围为 0~0.025。图 2 给出了 Lena. bmp 图像在加入高斯白噪声后,采样率分别为 30% 和 60% 时,各算法的图像重构质量结果比较。表 2 和表 3 给出了其它图像在有噪声状态下的重构结果。

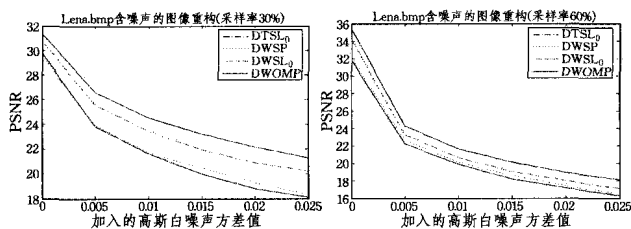


图 2 有噪声时各种算法的图像重构质量对比图

表 2 有噪声时的各种算法的图像重构质量对比(取噪声方差为 0.01,采样率为 60%)

图片名称	DWOMP	DWSL <sub>0</sub>	DWSP	DTSL <sub>0</sub>
boat. bmp	19.25	20.18	19.50	21.23
bridge. bmp	18.13	19.28	18.48	20.47
goldhill. bmp	19.42	20.31	19.59	21.28
telephone. bmp	19.92	20.75	20.26	21.74
wombats. bmp	18.42	19.54	18.72	20.67

表 3 有噪声时各种算法的图像重构质量对比(取噪声方差为 0.02,采样率为 60%)

图片名称	DWOMP	DWSL <sub>0</sub>	DWSP	DTSL <sub>0</sub>
boat. bmp	16.65	17.59	17.00	18.59
bridge. bmp	16.11	17.14	16.40	18.22
goldhill. bmp	16.86	17.68	17.16	18.67
telephone. bmp	17.11	17.92	17.42	18.88
wombats. bmp	16.32	17.33	16.72	18.44

对比仿真结果可以看出,随着噪声的增大,所有算法的重构质量都在下降;但在相同噪声下,DTSL<sub>0</sub> 算法的重构效果仍优于其它各种算法,尤其在对原始图像的采样率较小的情况下优势更为明显。从实验结果可以看出,在同样采用传统小波变换的情况下,使用 SL<sub>0</sub> 作为恢复算法比使用 OMP 和 SP 作为恢复算法可获得更好的重构效果;在同样采用 SL<sub>0</sub> 作为恢复算法的情况下,使用双树小波变换可使图像改善幅度达到 0.7~1.2dB。因此,本文提出的 DTSL<sub>0</sub> 拥有更强的鲁棒性。

#### 4.3 运算速度对比

在本节实验中,使用不同的重构算法在不同的采样率下,分别对 Lena. bmp 图像进行重构,分别记录每个算法的执行时间(单位:秒)。其中,对原始图像的采样率分别取 30%、40%、50%、...、90%,实验使用的计算机配置为:中央处理器: Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q8300 四核 2.50GHz;内存大小:2G;操作系统:Microsoft Windows XP SP3。实验结果

如表 4 所列。

表 4 不同采样率下的各算法组合执行时间对比

采样率(%)	DTSL <sub>0</sub>	DWSL <sub>0</sub>	DWSP	DWOMP
30	0.906	0.515	0.219	0.391
40	1.125	0.625	0.813	1.016
50	1.344	0.719	1.953	2.187
60	1.578	0.984	4.266	3.454
70	1.750	0.937	7.047	4.750
80	1.938	1.172	12.157	7.203
90	2.140	1.157	18.600	8.250

从表 4 可以看出,DTSL<sub>0</sub> 算法的执行速度比 DWOMP 和 DWSP 算法快,尤其是当原始图像的采样率较大时,该优势比较明显。但是,该算法的执行速度略逊于 DWSL<sub>0</sub> 算法,考虑到 DTSL<sub>0</sub> 算法的重构质量比 DWSL<sub>0</sub> 更优,因而可以根据实际应用要求对算法进行选择。

**结束语** 本文基于压缩感知理论,从图像稀疏变换方式和压缩感知恢复算法两方面出发,提出了基于单层双树小波变换和 Smoothed- $l_0$  的压缩感知图像重构算法(DTSL<sub>0</sub>)。该算法使用双树小波变换对原始图像进行稀疏变换,并结合 Smoothed- $l_0$  压缩感知恢复算法予以重构。实验证明,该算法在图像重构质量、执行速度,以及鲁棒性方面均有显著提升。

#### 参考文献

- [1] Candes E. Compressive sampling[C]//Proceedings of the Proceeding of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006, 3: 1433-1452
- [2] Donoho D. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306
- [3] 杨海蓉,张成,张成,等. 压缩传感理论与重构算法 [J]. 电子学报, 2011, 39(1): 143-148
- [4] 岑翼刚,陈晓方,岑丽辉,等. 基于单层小波变换的压缩感知图像处理 [J]. 通信学报, 2010, 31(8A): 52-55
- [5] 喻玲娟,谢晓春. 压缩感知理论简介 [J]. 数字视频, 2008, 32(12): 16-18
- [6] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666
- [7] 刘冰,付平,孟升卫. 基于正交匹配追踪的压缩感知信号检测算法 [J]. 仪器仪表学报, 2010, 31(9): 1959-1964
- [8] 杨成,冯巍,冯辉. 一种压缩采样中的稀疏度自适应子空间追踪算法 [J]. 电子学报, 2010, 38(8): 1914-1917
- [9] 谭坤. 快速子空间追踪算法研究 [D]. 成都:电子科技大学, 2010
- [10] Mohimani H, Babaie-Zadeh M, Gorodnitsky I, et al. Sparse Recovery using Smoothed-L<sub>0</sub> (SL<sub>0</sub>): Convergence Analysis [J/OL]. <http://arxiv.org/abs/1001.5073>, 2010-1-28
- [11] Mohimani H, Babaie-Zadeh M, Jutten C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed L<sub>0</sub> norm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(1): 289-301
- [12] Mohimani H, Babaie-Zadeh M, Jutten C. Complex-Valued Sparse Representation Based on Smoothed L<sub>0</sub> Norm [C] // IC-ASSP2008. Las Vegas, 2008: 3881-3884
- [13] Kingsbury N. Complex Wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2001, 10(3): 234-253

(下转第 304 页)

它的中心点;圆的骨架为其圆心,直线和孤立点的骨架都是它们本身。算法步骤如下:

(1)每次逐行地将整个图像全部扫描一遍,计算每个点在表中对应的索引,如果是1就删除,否则保留该点;

(2)如果本次扫描没有删除点,则结束循环,余下的点就是骨架点;

(3)如果仍然有点被删除,就再进行新一轮的扫描,一直到没有点再被删除为止。

图3是用这种方法细化后的效果图,与原图相比,效果非常明显。

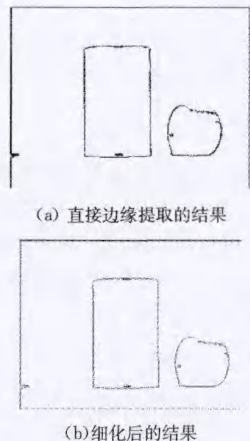


图3 图像细化

#### 4 实验结果与分析

本文所有的实验都是在 matlab6.5 上进行的,所有的实验图像均是典型的测试图像集。实验比较了几种传统的图像边缘检测算法。同时,实验中,为了比较算法的抗噪性能,给出了加入高斯噪声后图像的实验比较结果,如图4、图5所示。

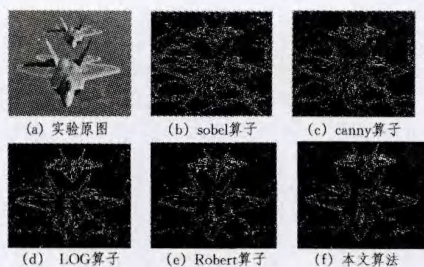


图4 图像边缘检测算法对比图

从图5中可以看出,本文算法具有更好的抗噪性能,图像细化非常好。

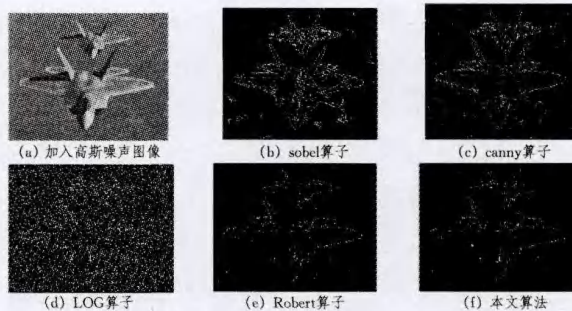


图5 加入了高斯噪声后图像边缘检测算法对比图

**结束语** 图像边缘检测与特征提取技术一直是国内外研究的热点问题。由于传统的 SUSAN 图像边缘检测算法对阈值的选择不难,难以得到更多的图像信息,因此提出了一种基于 Robert 图像边缘检测技术的改进型算法,其融合了 SUSAN 特征点匹配技术,同时也进行了均值的滤波去噪,还兼有图像的细化处理。最后经过实验验证了本文所提算法的有效性和应用性。

#### 参考文献

- [1] Sun J X, Gu D B. A multiscale edge detection algorithm based on wavelet domain vector hidden Markov tree model [J]. Pattern Recognition, 2004, 37(7): 1315-1324
- [2] Zhang L, Bao P. Edge detection by scale multiplication in wavelet domain [J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23(14): 1771-1784
- [3] 付永庆,王咏胜.一种基于数学形态学的灰度图像边缘检测算法[J].哈尔滨工程大学学报,2005,26(5):685-687
- [4] 杨晖,张继武.数学形态学在图像边缘检测中的应用研究[J].辽宁大学学报,2005,32(1):50-53
- [5] 刘清,林士胜.基于数学形态学的图像边缘近侧算法[J].华南理工大学学报,2008,36(9):113-116
- [6] 林世毅,苏广川,陈东,等.基于小波变换和数学形态学的边缘检测法[J].仪器仪表学报,2004,25(4):685-687
- [7] 崔屹.图像处理与分析——数学形态学方法及应用[M].北京:科学技术出版社,2000
- [8] Canny J E. A computational approach to edge detection[J]. IEEE Trans on PAM 1, 1985, 8(6): 679-698
- [9] 闫海霞,赵晓晖.基于书序形态学的边缘检测方法[J].计算机应用研究,2008,25(11):3497-3499
- [10] 徐国宝.基于数学形态学的自适应边缘检测新算法[J].计算机应用,2009,29(4):997-1000
- [11] 周何,黄山,盛贤.基于B样条小波的图像边缘检测[J].计算机仿真,2011(11)
- [12] 张建勋,谢婷婷.基于小波区域梯度的图像融合新算法[J].重庆理工大学学报:自然科学版,2012,26(10):51-55
- [13] 7(9):655-658
- [14] Selesnick I W, Li K Y. Video denoising using 2D and 3D dual-tree complex wavelet transforms[C]//Proc. SPIE Conf. Wavelets X, CA, USA, 2003, 5207: 607-618
- [15] Li L, Cai C. Multiple Description Image Coding Using Dual-Tree Discrete Wavelet Transform [J]. International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems, 2009,
- [16] 陈书贞,郝鹏鹏,练秋生.基于双树复数小波和波原子稀疏图像表示的压缩传感图像重构 [J]. 信号处理, 2010, 26(11): 1701-1706
- [17] 陈靖,李莉,蔡灿辉.基于 H. 264 和双树小波的多描述视频编码 [J]. 信号处理, 2011, 27(8): 1266-1270

(上接第 265 页)

- [14] Selesnick I W, Li K Y. Video denoising using 2D and 3D dual-tree complex wavelet transforms[C]//Proc. SPIE Conf. Wavelets X, CA, USA, 2003, 5207: 607-618
- [15] Li L, Cai C. Multiple Description Image Coding Using Dual-Tree Discrete Wavelet Transform [J]. International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems, 2009,