交换超立方网络的嵌入问题研究

梁家荣[1] 豆秋丽[1] 郭 晨[2]
(广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004)[1] (井冈山大学信息科学与传媒学院 吉安 343009)[2]

摘 要 交换超立方网络作为超立方网络的一个变种，具有良好的递归性和理想的网络参数。根据交换超立方网络的相关性质研究了E-2DMesh网络和超立方网络的嵌入问题，并得出如下结论：(1)当 $\max(s,t)<7$ 时，不存在dilation $=1$ 的 $EM(2^m,2^n)$ 到 $EH(s,t)$ 的嵌入映射($m+n\leqslant s+t+1$)。(2)$EM(2^s,2^t)$ 可以expansion=2，dilation=4，load=1嵌入 $EH(s,t)$。(3)当 $\min(s,t)>1$ 时，不存在dilation=1的 Q_n 到 $EH(s,t)$ 的嵌入映射($n=s+t$)。(4)Q_n 可以expansion=2，dilation=3，congestion=1，load=1嵌入 $EH(s,t)$($n=s+t$)。上述结论进一步说明了交换超立方网络具有良好的扩容性。

关键词 交换超立方网络，E-2DMesh网络，超立方网络，嵌入
中图法分类号 TP393.02 **文献标识码** A

Study on Embedding Problems of Exchanged Hypercube Networks

LIANG Jia-rong[1] DOU Qiu-li[1] GUO Chen[2]
(School of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)[1]
(College of Information Science and Media, Jinggangshan University, Ji'an 343009, China)[2]

Abstract As a new variant of hypercube, the exchanged hypercube has nice recursiveness and preferable network parameters. Based on the relevant properties of exchanged hypercube, this paper studied the problems of embedding E-2DMesh networks and hypercube networks into exchanged hypercube. The following conclusions are obtained: (1) for $\max(s,t)<7$, there is no mapping embedding for $EM(2^m,2^n)$ into $EH(s,t)$ ($m+n\leqslant s+t+1$) with dilation=1. (2) $EM(2^s,2^t)$ can be embedded into $EH(s,t)$ with expansion=2, dilation=4, load=1. (3) for $\min(s,t)>1$, there is no mapping embedding for Q_n into $EH(s,t)$ ($n=s+t$) with dilation=1. (4) Q_n can be embedded into $EH(s,t)$ with expansion=2, dilation=3, congestion=1, load=1($n=s+t$). The results show that exchanged hypercube has nice versatility.

Keywords Exchanged hypercube networks, E-2DMesh networks, Hypercube networks, Embedding

1 引言

互连网络结构作为并行机体系结构的一个热点问题，受到人们普遍的重视，如今人们已设计了多种互连网络拓扑结构[1-4]，如：Hypercube(超立方体)、Star(星型)、Mesh(网格)、Torus(环绕)、Ring(环)、Tree(树)等，其中交换超立方网络，作为超立方网络的一个变体结构，不仅保留了超立方网络的良好递归性、结构对称性等优良特点，而本身也降低了网络互连的复杂性[5]。

对于一个新设计的网络模型，人们往往特别关心其兼容性和扩容性的问题，也就是网络模型的可嵌入性问题，网络的可嵌入性是计算机科学理论中的一个重要研究课题[6,7]。网络的可嵌入性，反映了网络的通用能力，它在互连网络结构的模拟与重构、并行算法中运算的组织、数据结构的存储方式以及VLSI芯片中电路拓扑结构的研究等方面有着广泛的应用[8-10]。在文献[5]中，Peter K. K. Loh等人提出将线性阵列、环、Mesh和 n 维立方体等网络模型嵌入交换超立方网络。对于其它网络模型的嵌入交换超立方网络目前研究得较少，本文将研究E-Mesh网络[11]、超立方网络在交换超立方网中的嵌入问题，希望其能成为交换超立方网应用的有益支撑。

2 相关知识

为了研究的需要，给出如下相关知识。

定义1[12] 设 G 和 H 为无向图，若存在 $\langle\varphi,\phi\rangle$ 映射对，使得 $\forall u\in G,\varphi(u)\in H$，$\forall(u,v)\in E(G)$，存在 ϕ 将 (u,v) 映射为 H 中连接 $\varphi(u)$ 和 $\varphi(v)$ 的路 $\phi((u,v))$ 且 $|G|\leqslant|H|$，则称 $\langle\varphi,\phi\rangle$ 为 G 到 H 的嵌入映射，即：G 可嵌入到 H 中。

定义2 设 G 和 H 为两个无向图，$\langle\varphi,\phi\rangle$ 为 G 到 H 的一个嵌入映射。则网络嵌入效率的4个评价标准如下：

(1)expansion(拓展)$=|H|/|G|$。

(2)load(负载)$=\max\limits_{\forall u\in V(G),v=\varphi(u)\in V(H)}(load(v))$，其中，$load(v)$ 为 v 在嵌入映射下的负载。

(3)dilation(延伸)$=\max\limits_{\forall(u,v)\in E(G);\varphi(u),\varphi(v)\in V(H)}(\min(\varphi(u),\varphi$

到稿日期：2012-02-19 返修日期：2012-06-22 本文受国家自然科学基金(61064002)，教育部新世纪优秀人才支持计划专项(NCET-06-0756)资助。

梁家荣(1966-)，男，博士后，教授，博士生导师，主要研究方向为人工智能、网络与并行计算，E-mail：liangjr@gxu.edu.cn；**豆秋丽**(1987-)，女，硕士，主要研究方向为网络与并行计算；**郭 晨**(1980-)，男，主要研究方向为网络与并行计算。

(v))),其中,$\min(\varphi(u),\varphi(v)))$为 $\varphi(u)$和 $\varphi(v)$之间的最短路径的长度。

(4)congestion(拥塞度)$=\max\limits_{\forall(u,v)\in V(H)}(congestion(u,v))$,其中,$congestion(u,v)$为 ϕ 的所有像中含有边(u,v)的路的个数。

定义 3[5] 交换超立方网定义为如下的一个无向图:$EH(s,t)=(V,E)(s\geqslant1,t\geqslant1)(s\geqslant1,t\geqslant1)$,其中,$V$ 为顶点集且 $V=\{a_{s-1}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 c\mid a_i,b_j,c\in(0,1),i\in[0,s),j\in[0,t)\}$;$E$ 为边集且

$$E=\begin{cases}(v_1,v_2)\in V\times V, & 若\ v_1\oplus v_2=1\\ v_1[s+t,t+1]=v_2[s+t,t+1], & \\ \quad H(v_1[t,1],v_2[t,1])=1, & 若\ v_1[0]=v_2[0]=1\\ H(v_1[s+t,t+1],v_2[s+t,t+1])=1, & \\ \quad v_1[t,1]=v_2[t,1], & 若\ v_1[0]=v_2[0]=0\end{cases}$$

式中,$\oplus$表示异或运算,$v[x,y]$表示顶点 v 的第 x 位与第 y 位之间的比特串(包含第 x 位与第 y 位)。$H(v_1,v_2)$表示顶点 v_1 与顶点 v_2 的汉明距离,其中$(v_1,v_2)\in V\times V$。

定义 4[7] E-2DMesh 网络 $EM_{m\times n}$是由 m 行 n 列构成,共有 $m\times n$ 个结点,其中节点按坐标(x,y)给出,$x=1,2,3,\cdots m$,$y=1,2,3,\cdots n$。两个结点(x_1,y_1)和(x_2,y_2)相邻,当且仅当满足关系式 $1\leqslant|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\leqslant2$ 且 $0\leqslant|x_1-x_2|\leqslant1$ 及 $0\leqslant|y_1-y_2|\leqslant1$,其内部结点的度为 8。

3 E-2DMesh 网络的嵌入问题

本小节考虑将 E-2DMesh 网络嵌入到交换超立方网络中。

引理 1[12] 如果图 G 可以 $dilation=1$ 嵌入图 H,则图 G 的度必然小于或者等于图 H 的度。

定理 1 当 $\max(s,t)<7$ 时,不存在 dilation$=1$ 的 $EM(2^m,2^n)$到 $EH(s,t)$的嵌入映射$(m+n\leqslant s+t+1)$。

证明:对于 E-2DMesh 网络 $EM(l_1,l_2)=EM(2^n,2^m)$,$EM(l_1,l_2)$的度可分以下两种情况讨论:(1)$m=1,n=1$ 时,$EM(l_1,l_2)$的度为 3;(4)$m>1,n>1$ 时,$EM(l_1,l_2)$的度为 8。由于第 1 种情况下网络的规模太小,没有实际的应用价值,我们考虑到应用的广泛性,仅讨论第 2 种情况,首先假设 $s\geqslant t$,因此 $EH(s,t)$的度为:$s+1$,根据引理 1,可得:$8>s+1$,即 $t\leqslant s<7$ 时,不存在 $dilation=1$ 的 $EM(2^m,2^n)$到 $EH(s,t)$的嵌入映射。同理,可推出:当 $s<t<7$ 时,不存在 dilation$=1$ 的 $EM(2^m,2^n)$到 $EH(s,t)$的嵌入映射。综上可得,当 $\max(s,t)<7$ 时,不存在 dilation$=1$ 的 $EM(2^m,2^n)$到 $EH(s,t)$的嵌入映射。

定理 2 对于二维 E-2DMesh 网络 $EM(2^s,2^t)$和交换超立方网络 $EH(s,t)$,存在一个映射对$\langle\varphi,\phi\rangle$使得 expansion$=2$,dilation$=4$,load$=1$。

证明:令 $\varphi:V(EM(2^s,2^t))\to V(EH(s,t))$,$\forall u\in EM(2^s,2^t)$,$\exists\varphi(u)=uc$,即 $u=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}$,$v=a_{s-1}^{(2)}\cdots a_0^{(2)}b_{t-1}^{(2)}\cdots b_0^{(2)}$,$\varphi(u)=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}c^{(1)}$,$\varphi(v)=a_{s-1}^{(2)}\cdots a_0^{(2)}b_{t-1}^{(2)}\cdots b_0^{(2)}c^{(2)}$,对于 E-2DMesh 网络中的边 $e=(u,v)$映射为交换超立方网中的路 $\phi((u,v))$即 $\varphi(u)$到 $\varphi(v)$的路径,分两种情况来确定:

(i)$c^{(1)}=c^{(2)}$即顶点 u 和顶点 v 映射到同一子网中,此时,其对角线的顶点同属同一个子网,分以下几种情况来讨论 $\varphi(u)$到 $\varphi(v)$的路径:

(1)若 $c^{(1)}=c^{(2)}=0$ 且 $\varphi(u)$与 $\varphi(v)$的不相同的比特位在左边的 s 位,则取

$$\phi((u,v))=(\varphi(u),\varphi(v))\in E(EH(s,t))$$

(2)若 $c^{(1)}=c^{(2)}=1$ 且 $\varphi(u)$与 $\varphi(v)$的不相同的比特位在中间的 t 位,则取

$$\phi((u,v))=(\varphi(u),\varphi(v))\in E(EH(s,t))$$

(3)若 $c^{(1)}=c^{(2)}=0$ 且 $\varphi(u)$与 $\varphi(v)$的不相同的比特位在中间的 t 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\\&\quad\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\to\\&\quad a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}0\end{aligned}$$

(4)若 $c^{(1)}=c^{(2)}=1$ 且 $\varphi(u)$与 $\varphi(v)$的不相同的比特位在左边的 s 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots\\&\quad a_0{}^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\\&\quad\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\end{aligned}$$

(5)若 $c^{(1)}=c^{(2)}=0$ 且 $\varphi(u)$与 $\varphi(v)$的比特位在左边的 s 位有一位不相同,在中间的 t 位也有一位不相同,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\\&\quad\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots\\&\quad b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\\&\quad\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}0\end{aligned}$$

(6) 若 $c^{(1)}=c^{(2)}=1$ 且 $\varphi(u)$与 $\varphi(v)$的比特位在左边的 s 位有一位不相同,在中间的 t 位也有一位不相同,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\\&\quad\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots\\&\quad b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}0\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}0\\&\quad\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\end{aligned}$$

$$expansion=2^{s+t+1}/2^{s+t}=2$$

(ii)$c^{(1)}\neq c^{(2)}$即顶点 u 和顶点 v 映射到不同的两个子网中,此时,其对角线的两个顶点同属同一子网,分以下几种情况来讨论 $\varphi(u)$到 $\varphi(v)$的路径:

(1) 若 $c^{(1)}=1,c^{(2)}=0$ 且 $\varphi(u)$与 $\varphi(v)$的不相同的比特位在左边的 s 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0^{(1)}\\&\quad b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\end{aligned}$$

(2) 若 $c^{(1)}=1,c^{(2)}=0$ 且 $\varphi(u)$与 $\varphi(v)$的不相同的比特位在中间的 t 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots\\&\quad b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}0\end{aligned}$$

(3) 若 $c^{(1)}=0,c^{(2)}=1$ 且 $\varphi(u)$与 $\varphi(v)$的不相同的比特位在左边的 s 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\to a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0^{(1)}\end{aligned}$$

$$b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1$$

(4) 若 $c^{(1)}=0,c^{(2)}=1$ 且 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 的不相同的比特位在中间的 t 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\\&\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\\&\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\end{aligned}$$

(5) 若 $c^{(1)}=0,c^{(2)}=0$ 且 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 的比特位在左边的 s 位有一位不相同,在中间的 t 位有一位不相同,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\\&\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots\\&b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\\&\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}0\end{aligned}$$

(6) 若 $c^{(1)}=1,c^{(2)}=1$ 且 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 的比特位在左边的 s 位有一位不相同,在中间的 t 位有一位不相同,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\\&\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots\\&b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}0\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}0\\&\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0 b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\end{aligned}$$

$expansion=2^{s+t+1}/2^{s+t}=2$

结合以上两种情况,可得:$EM(2^s,2^t)$ 可以 expansion=2、dilation=4、load=1 嵌入 $EH(s,t)$。

为了更直观更具体地描述 $EM(2^s,2^t)$ 到 $EH(s,t)$ 的嵌入过程,在图 1 中给出 E-2DMesh 网络 $EM(2,4)$ 到交换超立方网络 $EH(1,2)$ 的嵌入映射图。

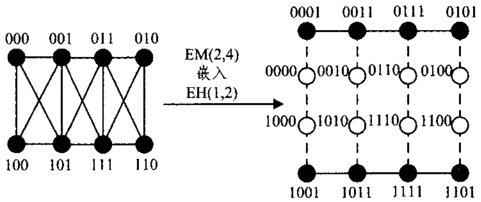

图 1 E-2DMesh 网络 $EM(2,4)$ 到交换超立方网络 $EH(1,2)$ 的嵌入映射图

4 超立方网络的嵌入问题

本小节我们考虑将超立方网络嵌入到交换超立方网络中。

定理 3 当 $\min(s,t)>1$ 时,不存在 dilation=1 的超立方网络 Q_n 到交换超立方网络 $EH(s,t)$ 的嵌入映射($n=s+t$)。

证明:超立方网络 Q_n 的度为 n,而对于交换超立方网络,分两种情况讨论:(1)$s\geqslant t$ 时,$EH(s,t)$ 的度为 $s+1$,根据引理 1,可得 $n>s+1\Rightarrow s+t>s+1$ 即 $s\geqslant t>1$ 时,不存在 dilation=1 的 Q_n 到 $EH(s,t)$ 的嵌入映射。(2)$s<t$ 时,$EH(s,t)$ 的度为 $t+1$,根据引理 1,可得 $n>t+1\Rightarrow s+t>t+1$ 即 $t>s>1$ 时,不存在 dilation=1 的 Q_n 到 $EH(s,t)$ 的嵌入映射。综上所述,当 $\min(s,t)>1$ 时,不存在 dilation=1 的 Q_n 到 $EH(s,t)$ 的嵌入映射。

定理 4 对于超立方网络 Q_n 和交换超立方网络 $EH(s,t)$,其中 $n=s+t$,存在一个映射对 $\langle\varphi,\phi\rangle$ 使得 expansion=2,dilation=3,congestion=1,load=1。

证明:令 $\varphi:V(Q_n)\rightarrow V(EH(s,t))$,$\forall u\in Q_n$,$\exists\varphi(u)=uc$,即:$u=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}$,$v=a_{s-1}^{(2)}\cdots a_0^{(2)}b_{t-1}^{(2)}\cdots b_0^{(2)}$,$\phi(u)=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}c^{(1)}$,$\varphi(v)=a_{s-1}^{(2)}\cdots a_0^{(2)}b_{t-1}^{(2)}\cdots b_0^{(2)}c^{(2)}$,对于超立方网络中的边 $e=(u,v)$ 映射为交换超立方网中的路 $\phi((u,v))$ 即 $\varphi(u)$ 到 $\varphi(v)$ 的路径,分两种情况来确定:

(i)$c^{(1)}=c^{(2)}$ 即顶点 u 和顶点 v 映射到同一子网中,分以下几种情况来讨论 $\varphi(u)$ 到 $\varphi(v)$ 的路径:

(1)若 $c^{(1)}=c^{(2)}=0$ 且 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 的不相同的比特位在左边的 s 位,则取

$$\phi((u,v))=(\varphi(u),\varphi(v))\in E(EH(s,t))$$

(2)若 $c^{(1)}=c^{(2)}=0$ 且 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 的不相同的比特位在中间的 t 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots\\&b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\\&\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}0\end{aligned}$$

(3)若 $c^{(1)}=c^{(2)}=1$ 且 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 的不相同的比特位在中间的 t 位,则取

$$\phi((u,v))=(\varphi(u),\varphi(v))\in E(EH(s,t))$$

(4) 若 $c^{(1)}=c^{(2)}=1$ 且 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 的不相同的比特位在左边的 s 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0^{(1)}\\&b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\rightarrow\\&a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\end{aligned}$$

(ii)$c^{(1)}\neq c^{(2)}$ 即顶点 u 和顶点 v 映射到不同的两个子网中,此时,$\varphi(u)$ 到 $\varphi(v)$ 的路径可按下述方法来确定:

(1) 若 $c^{(1)}=1,c^{(2)}=0$ 且 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 的不相同的比特位在左边的 s 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0^{(1)}\\&b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\end{aligned}$$

(2)若 $c^{(1)}=1,c^{(2)}=0$ 且 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 的不相同的比特位在中间的 t 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots\\&b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}0\end{aligned}$$

(3)若 $c^{(1)}=0,c^{(2)}=1$ 且 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 的不相同的比特位在左边的 s 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0^{(1)}\\&b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_i^{(2)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\end{aligned}$$

(4)若 $c^{(1)}=0,c^{(2)}=1$ 且 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 的不相同的比特位在中间的 t 位,则取

$$\begin{aligned}\phi((u,v))&=(\varphi(u),\varphi(v))\\&=a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}0\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots\\&b_j^{(1)}\cdots b_0^{(1)}1\rightarrow a_{s-1}^{(1)}\cdots a_0^{(1)}b_{t-1}^{(1)}\cdots b_j^{(2)}\cdots b_0^{(1)}1\end{aligned}$$

综上可得,Q_n 可以 expansion=2、dilation=3、congestion=1、load=1 嵌入 $EH(s,t)$。证毕。

为了更直观地表达上述 Q_n 到 $EH(s,t)$(其中 $n=s+t$)的嵌入过程,我们在图 2 中给出超立方网 Q_3 到交换超立方网 $EH(1,2)$ 具体的嵌入映射图。

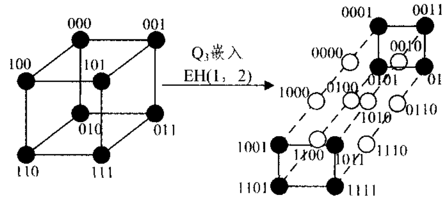

图 2　超立方网络 Q_3 到交换超立方网 $EH(1,2)$ 的嵌入映射图

结束语　交换超立方网络作为超立方网络的一个变体结构，通过移去超立方网络的部分连接边提高了网络的扩展性，使得当网络的规模增大时无需增加过多的开销就可灵活地在原有网络的基础上进行扩展。本文对 E-2DMesh 网络和超立方网络到交换超立方网络的嵌入问题进行了研究，证明了当 $\max(s,t)<7$ 时，不存在 dilation=1 的 $EM(2^m,2^n)$ 到 $EH(s,t)$ 的嵌入映射($m+n\leqslant s+t+1$)，并对 $EM(2^s,2^t)$ 嵌入到 $EH(s,t)$ 给出了具体的嵌入映射构造，使得 expansion=2，dilation=4，load=1。与此同时，也证明了当 $\min(s,t)>1$ 时，不存在 dilation=1 的 Q_n 到 $EH(s,t)$ 的嵌入映射($n=s+t$)，并给出了具体的嵌入映射构造，使得 expansion=2，dilation=3，congestion=1，load=1。网络的嵌入问题，是网络分析中难度很大的课题，本文仅得到了 E-2DMesh 网络和超立方网络嵌入到交换超立方网络的部分结果，关于其它网络模型嵌入到交换超立方网络，将在以后进行进一步的研究。

参考文献

[1] Zhang Peng, Powell R, Deng Yue-fan. Interlacing Bypass Rings to Torus Networks for More Efficient Networks[J]. IEEE Trans. on parallel and distributed system, 2011, 22(2): 287-295

[2] Wang Chao, Zhang Jun-neng, Zhou Xue-hai, et al. A Flexible High Speed Star Network Based on Peer to Peer Links on FPGA[C]//IEEE 9th Internation Symposium. on Parallel and Distributed Processing with Applications. Heifei, China, 2011: 107-112

[3] Jha S K, Jana P K. A New Distributed Approach for Building Balanced Ring for Fault Tolerance in Mesh Architecture[C]//Proceedings of International Conference on Methods and Models in Computer Science. Dhanbad, India, 2009: 1-4

[4] Kini N G, Kumar M S, Mruthyunjaya H S. A Torus Embeded Hypercube Scalable Interconnection Network for Parallel Architecture[C]// IEEE International Advance Computing Conference. Patiala, India, 2009: 858-861

[5] Peter K K, Hsu W J, Pan Y. The exchanged hypercube[J]. IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems, 2005, 16(9): 866-874

[6] Shen X J, Liang W F, Hu Q. On Embedding Between 2D Meshes of Same Size[J]. IEEE Trans on Computer, 1997, 46(8): 880-889

[7] Chen Y W, Shen H. Embedding Mesh and tori on double-loop networks of the same size[J]. IEEE Trans. on Computer, 2011, 60(8): 1157-1168

[8] Bettayeb S, Miller Z, Sudborough I H. Embedding grids into hypercubes[J]. Journal of computer and System Sciences, 1992, 45(3): 340-366

[9] Mihem R G, Hwang G Y. Embedding rectangular grids into square grids with dilation two[J]. IEEE Trans computers, 1990, 39(12): 1446-1455

[10] Miller Z, Pritikin D, Sudborough I H. Near embeddings of hypercubes in Cayley graphs on the symmetric group[J]. IEEE Trans Computers, 1994, 43(1): 13-22

[11] Chen Xiao. Fault-tolerant adaptive and shortest routing in 2-D extended meshes using faulty-block-information[C]//2000 International Workshops on Parallel Processing Proceedings. Toronto, Canada, 2000: 267-274

[12] Ranka S, Wang J, et al. Embedding Meshes on the Star Graph[C]// IEEE Conference on Supercomputing. New York, USA, 1990: 476-485

(上接第 40 页)

[8] Ge F, Tan L, Kennedy R A. Stability and throughput of FAST transfer control protocol traffic in bi-directional connections[J]. IET Communications, 2010, 4(6): 639

[9] Abrantes F, Jo T A, Ricardo J M. Explicit congestion control algorithms for time varying capacity media[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2011, 10(81)

[10] Li Xiao-long, Yousefi'zadeh H. Analysis, simulation, and implementation of VCP: A Wireless Profiling[J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2010, 18(5): 1345

[11] Hogie K. Link and routing issues for internet protocols in space[C]//IEEE Aerospace Conference. 2001

[12] Rash J. Internet data delivery for future space missions[C]// ESTC 2002 Proceedings. 2002

[13] Frank L. Test plan for the demonstration and characterization of IP-based communications with the UoSAT-12 Spacecraft[M]. 2000

[14] Rash J. Presentation summarizing OMNI concepts, technical details, demonstrations, and test results[OL]. http://ipinspace.gsfc.nasa.gov/

[15] Wood L. Using Internet nodes and routers onboard satellites——submitted[J]. International Journal of Satellite Communications and Networking, 2007; 25(2): 195-216

[16] Bashim K. Advanced communication and networking technologies for Mars exploration[C]//19th Annual AIAA International Communications Satellite Systems Conference. 2001

[17] Bhasin K. Space Internet Architectures and technologies for NASA enterprises[C] // Aerospace Conference. IEEE Proceedings. 2001

[18] Akan O B. TP-Planet: a reliable transport protocol for InterPlaNetary internet[J]. IEEE J. Select. Areas Commun, 2004, 22: 348-361

[19] 刘炯，曹志刚. 一种适合卫星网络的拥塞控制算法[J]. 宇航学报，2007，28(3): 689-693

[20] Liu Jiong, Cao Zhi-gang, Kahan M J. TP-Satellite: a vew transport protocol for satellite IP networks[J]. IEEE J. AES, 2009, 45(2): 502-515

[21] 叶建设，宋世杰，沈荣骏. 深空通信 DTN 应用研究[J]. 宇航学报，2010，31(4): 941-949

[22] Akan O B, Fang J, Akyildiz I F. Performance of TCP protocols in deep space communication networks[J]. IEEE Commun. Lett., 2002, 6(11): 478-480

[23] 王金苗，许鹏文. 卫星网络可靠传输协议 ACK 机制研究与性能分析[J]. 计算机科学，2011(10A): 271-273