对角化 LDPC 压缩感知观测矩阵生成方法

周春佳[1] 孙权森[1] 刘佶鑫[2]

(南京理工大学计算机科学与工程学院 南京 210094)[1]

(南京邮电大学宽带无线通信技术教育部工程研究中心 南京 210003)[2]

摘 要 压缩感知是一种能够在某个特定域中压缩和恢复稀疏信号的技术。针对在使用传统观测矩阵进行数据压缩时，其数据恢复效果并不理想，且观测矩阵的随机性会导致数据传输量较大、硬件实现困难等问题，提出一种新的观测矩阵生成方法。将信道编码中的 LDPC 校验矩阵与对角块矩阵结合，生成一种尺度较小且易于硬件实现的观测矩阵，这种矩阵不仅高度稀疏，而且元素二值化。通过多组图像重构仿真实验对比发现，LDPC 对角块矩阵重构结果优于其他传统观测矩阵的重构结果。

关键词 压缩感知，观测矩阵，对角化，LDPC

中图法分类号 TN919.8 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.07.050

Method to Generate Diagonalizable LDPC Measurement Matrix Based on Compressive Sensing

ZHOU Chun-jia[1] SUN Quan-sen[1] LIU Ji-xin[2]

(School of Computer Science and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)[1]

(Engineering Research Center of Widerand Wireless Communication Technology, Ministry of Education, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)[2]

Abstract Compressive sensing is a technique that is suitable for compressing and recovering signals having sparse representations in certain bases. In view of two main problems in currently existing measurement matrices for compressive sensing of natural images, such as difficulty of hardware implementation and low sensing efficiency, this paper proposed a simple measurement matrix. By combining the diagonal block matrix with the LDPC check matrix in the channel coding, a new measurement matrix that facilitates the hardware implementation is generated. The diagonalizable LDPC measurement matrix is highly sparse and binary, and reduces the data storage space and computing time. Through the comparison of multiple sets of images, the reconstruction results of this method are much better than the others.

Keywords Compressive sensing, Measurement matrix, Diagonalization, LDPC

1 引言

近年来，一种新的数据采集模式——压缩感知被高度关注。Donoho[1] 以及 Candès 等人[2] 于 2006 年在信号领域提出了压缩感知的概念。根据压缩感知理论，稀疏信号或在某些域中能被稀疏表示的信号，能够从少量的线性测量值中恢复出来，因此压缩感知已经被广泛地用来优化许多实际应用的测量过程。Ma[3] 在表面计量学领域使用压缩感知来减少数据采集。Khwaja 和 Ma[4] 将压缩感知应用在综合孔径雷达领域来降低总数据量。这些研究尽管取得了理论上的进展，但由于观测矩阵生成的随机性，其在实用性方面还存在一定的瓶颈。

在压缩感知过程中，信号的重构是一个线性规划问题。由于压缩采样使得采样数远远小于原始信号的长度，因此求解线性规划问题是一个方程个数少于未知数的问题，理论上存在无数解。基于这些问题，Candès 等人于 2006 年提出了著名的限制等距原则[5]，该原则给出了上述欠定方程存在确定解的充分条件。然而，单纯地利用 RIP 性质来构造观测矩阵或判断一个矩阵作为观测矩阵的性质优劣在实际应用中并不现实且复杂度高。构造观测矩阵的依据是考虑某一类矩阵是否能大概率地满足相关性特性或是 RIP 性质。因此，常规观测矩阵分为以下 3 类：1)随机矩阵，如高斯随机矩阵[2]、伯努利随机矩阵等，这些矩阵的元素均独立地服从某一特定的分布，满足 $m=O(k\log(n/k))$；2)由正交矩阵变换生成，如傅里叶矩阵、部分哈达玛矩阵等，这类矩阵有着快速的变换算法，其共同特点是随机地从一个 $n\times n$ 的正交矩阵中选取 m 行，然后对新的矩阵进行归一化处理；3)由二进制矩阵生成，如托普利兹矩阵、随机稀疏矩阵，这类观测矩阵的特点是构造方式特定，有固定的生成模式。上述矩阵都不够简单，所谓简单是指矩阵高度稀疏且元素二值化。目前，观测矩阵的生成

到稿日期：2016-07-01 返修日期：2016-11-18 本文受国家自然科学基金(61273251)，民用航天“十二五”技术预先研究项目，国家自然科学基金青年基金(61401220)，江苏省自然科学基金青年基金(BK20140884)资助。

周春佳(1989－)，女，硕士生，主要研究方向为图像处理、模式识别、压缩感知，E-mail：zhchjmi@126.com；**孙权森**(1963－)，男，博士，教授，博士生导师，主要研究方向为控制科学与工程、模式识别与智能系统；**刘佶鑫**(1982－)，男，博士，讲师，硕士生导师，主要研究方向为压缩感知理论及应用、遥感信息处理及智能分析。

方法普遍存在如下缺点：1)一个观测矩阵中的元素越密集，其压缩感知的时间就越长；2)观测矩阵中的元素是浮点数，不仅存储麻烦，而且计算量大，更不利于硬件实现；3)若观测矩阵设计的维数较高，则其在实际应用传输过程中损耗较大且不方便。

为了解决上述问题，本文提出一种简单且高效的观测矩阵生成方法，即采用多个简单的二值矩阵构造对角块矩阵。在每一列中，只有一个或几个"1"，其余均"0"。同时，相对于现有的对角块矩阵和随机稀疏矩阵，引入 LDPC 机制。一方面，在引入 LDPC 后，观测矩阵的维度大幅减小，不仅存储方便、计算量小，而且提高了实际应用中的传输可靠性；另一方面，新观测矩阵在对角线位置的子矩阵均相同，这种构造方式方便、简单，而其他方法的对角线位置采用不同的子矩阵，增加了存储量。这些不同之处使得 LDPC 对角块矩阵拥有更优的效果，更加符合实际应用的需求。

2 观测矩阵在压缩感知中的作用

对于压缩感知理论中的一个信号 $x\in R^N$，若它在某种稀疏基 ψ 上通过变换 $\alpha\in R^N(x=\Psi\alpha)$ 后，最多有 K 个非零元素或者重要元素，且丢弃剩余的 $(N-K)$ 个元素而看不出明显损失，则称信号 x 能够稀疏表示，如 $\|\alpha\|_0=K$。

压缩感知通过一个冗余矩阵 $\Phi\in R^{M\times N}$ 来压缩能够稀疏表示的信号 $x\in R^N$，称该过程为采样过程，这里 $K\ll M\ll N$。称上述得到的结果向量 $y\in R^{M\times N}$ 为测量向量，称 Φ 为测量矩阵或观测矩阵。既然 x 能够通过某种稀疏基 ψ 进行稀疏表示，那么 y 可以如下表示：

$$y=\Phi x=A\alpha \tag{1}$$

其中，$A\in R^{M\times N}=\Phi\Psi$。

通过式(1)测量向量 y 从而恢复出原始信号 x 的过程叫作重构。由于 A 是冗余矩阵($M\ll N$)，因此式(1)是病态问题且没有确定解。然而，信号 x 能够用某种基 ψ 来稀疏表示，因此重构过程能够通过以下步骤实现[6]。

通过求解式(2)，找到稀疏向量 $\tilde{\alpha}$：

$$\min\|\tilde{\alpha}\|_0 \quad \text{s. t.} \quad A\tilde{\alpha}=y \tag{2}$$

得到向量 $\tilde{\alpha}$ 后，重构原始信号，过程如下：

$$\tilde{x}=\Psi\tilde{\alpha} \tag{3}$$

目前已经有两类方法被提出来寻找式(2)的近似解：1)凸理论方法，通过用 1 范数代替 0 范数来解决该问题；2)贪婪追踪算法，如 OMP 算法。

为了得到式(2)的唯一解，Candès 和 Tao[5] 对矩阵 A 提出了限制等距原则(RIP)。若存在一个限制等距参数 $\delta_K(0<\delta_K<1)$，能够对所有满足 $\|\alpha\|_0=K$ 的 α 有下列不等式：

$$(1-\delta_K)\|\alpha\|_2^2\leqslant\|A\alpha\|_2^2\leqslant(1+\delta_K)\|\alpha\|_2^2 \tag{4}$$

则矩阵 A 满足 RIP 原则。

但问题在于，此性质很难在一个给定的矩阵 A 上确认[7]。另一种相似的条件是，要求观测矩 Φ 与稀疏基 ψ 不相关(即相关性系数很小)，此情况相比 RIP 原则在实际中更容易实现。这两个矩阵之间的相关系数 μ 为：

$$\mu(\Phi,\Psi)=\sqrt{N}\max_{i,j}\frac{|\langle\phi_i,\psi_j\rangle|}{\|\phi_i\|_2\|\psi_j\|_2} \tag{5}$$

其中，$\phi_{i\in\{1,\cdots,M\}}$，$\psi_{j\in\{1,\cdots,N\}}$ 分别表示观测矩阵 Φ 的行向量和稀疏基 ψ 的列向量。相关系数 μ 表示两个矩阵的最大相关度，其值越小，信号重构的性能越好[8]。当 $\mu\in[1,\sqrt{N}]$ 时，矩阵 Φ 和 ψ 是不相关的，若 $\mu(\Phi,\psi)$ 越接近 1，则越接近 μ 的最小值。

最初一些密集的随机矩阵的值是由独立同分布的高斯或者伯努利处理得到的，这些矩阵由于高概率地符合 RIP 原则以及其与稀疏基的相关性较低而得到广泛应用。由于它们的值是非零的浮点小数，因此它们在实际应用中受到限制，需要芯片上的随机种子来生成所有元素，并且所需存储空间较大，在处理这些非零元素的同时也降低了压缩感知测量过程的速度。此外，大多数嵌入的微控制器都没有配备浮点运算器来执行浮点数的运算操作。

为了突破上述限制，稀疏随机矩阵应运而生[9]。这类矩阵中的大多数元素为 0。Mamaghanian 等人[10]提出的稀疏二值随机矩阵与随机高斯矩阵的性能不相上下，在此基础上，前者有较低的复杂度并且更适合硬件实现。除此之外，稀疏二值随机矩阵加速了压缩感知的测量过程。目前已有学者研究了结构性观测矩阵，如托普利兹矩阵[11]。近年来，确定性观测矩阵被提出，通过减少芯片上随机种子的个数或者减小内存消耗，来进一步促进硬件实现[12-13]。

3 对角化 LDPC 压缩感知观测矩阵

对角化 LDPC 观测矩阵以 LDPC 校验矩阵为对角线子矩阵，来构造确定性二值对角块矩阵。LDPC 编码原由麻省理工学院的 Robert Gallager 提出并应用于信道传输，由于其性能逼近香农极限，易于进行理论分析和研究，编码简单且可实行并行操作，现将其应用于图像处理领域，不仅效果良好，而且易于硬件实现。

3.1 置乱对角块矩阵

首先定义符号→的含意，如 $W\to P$ 表示矩阵 W 的各列根据置换规则 P 来调换各列元素的过程。假设有 L 个对角块矩阵($A_0=diag(a_1,a_2,\cdots,a_{k1})$，$B_0=diag(b_1,b_2,\cdots,b_{k2})$，$\cdots$)以及 L 种不同的随机置换规则，范围为 $\{1,\cdots,M\}$，分别是 P_A，P_B，$\cdots$，这里 $A_0\in\mathscr{R}^{N_A\times M}$，$B_0\in\mathscr{R}^{N_A\times M}$，$\cdots$，$(N_A+N_B+\cdots=N)$。通过置换规则来调换对角块矩阵中的各列元素，构造一个置乱对角块矩阵 $\Phi\in\mathscr{R}^{N\times M}$，如图 1 所示。

$$\Phi=\begin{bmatrix}A\\B\\\cdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_0\to P_A\\B_0\to P_B\\\cdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}diag(a_1,\cdots,a_{K_1})\to P_A\\diag(b_1,\cdots,b_{K_2})\to P_B\\\cdots\end{bmatrix}$$

图 1 传统置乱对角块矩阵生成图

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}^{m}&&&\\&\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}&&\\&&\cdots&\\&&&\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\end{pmatrix}\to P_A\\\begin{pmatrix}\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}&&&\\&\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}&&\\&&\cdots&\\&&&\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\end{pmatrix}\to P_B\end{bmatrix}$$

图 2 一个简单的置乱二值对角块矩阵($L=2,w=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$)生成图

称矩阵 $A,B,\cdots$ 为观测矩阵 Φ 的子矩阵。对角块矩阵由多种类型的小块 $a_i,b_j,\cdots(i\in\{1,\cdots,K_1\},j\in\{1,\cdots,K_2\},\cdots)$ 构成，如高斯随机块。为了克服浮点数计算量大、计算繁琐等缺点，用二值块代替高斯随机块，假设所有的块是同样的大小，即 $n\times m$(最小为 2×2)，由 $w\in\mathcal{R}^{n\times m}$ 表示。图 2 展示了一种最简单的二值对角块矩阵的例子。

3.2　LDPC 编码矩阵

低密度奇偶校验(Low Density Parity Check，LDPC)码是现代通信系统中最为重要的线性分组码之一。LDPC 码最早由 Gallager 于 1962 年提出，称其为低密度奇偶校验码的原因在于，LDPC 码的校验矩阵具有高度稀疏性，即校验矩阵中“0”的数目远远大于“1”的数目，故 LDPC 矩阵可以由其校验矩阵表示[14]。

其本质为通过一个生成矩阵 G 将信号序列映射成发送序列。对于生成矩阵 G，完全等效地存在一个奇偶校验矩阵 H，所有的码字序列 C 构成了 H 的零空间，即 $HC^{T}=0$。LDPC 编码可以用非常稀疏的校验矩阵或二分图来描述，因为 LDPC 编码的校验矩阵的矩阵元素中除一小部分不为 0 外，其他绝大多数都为 0，所以其奇偶校验矩阵 H 是一个稀疏矩阵。相对于行与列的长度，校验矩阵每行、每列中的非零元素(这里称为行重、列重)非常少，该性质正好符合压缩感知中观测矩阵越稀疏越好的要求，因此本文利用该校验矩阵作为观测矩阵的一部分。

3.3　LDPC 对角块观测矩阵

置乱对角块矩阵认为置换规则是为了制造观测矩阵与信号之间的不相关性。比如，部分傅里叶矩阵重构自然图像的质量较差，当随机置换一些列后，得到的置乱傅里叶矩阵能够得到较好的重构效果。本文为了最大程度地简化压缩感知的处理过程，也便于后期硬件实现，去掉了随机置换过程。

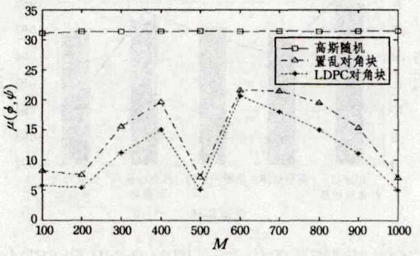
传统置乱对角块矩阵假设有 L 个对角块矩阵 $A_0=diag(a_1,a_2,\cdots,a_{k1})$，$B_0=diag(b_1,b_2,\cdots,b_{k2})$，$\cdots$ 通过 L 种不同的置乱方式生成观测矩阵 Φ。新的观测矩阵采用 LDPC 矩阵块作为观测矩阵 Φ 的子矩阵，并且每个对角线位置的子矩阵均相同，这样不仅降低了构造难度，还减小了存储空间。LDPC 对角块观测矩阵的构造示意图如图 3 所示。

$$\Phi_{新观测矩阵}=\begin{bmatrix}\overbrace{[LDPC块]}^{n} & & & \\ & \overbrace{[LDPC块]}^{n} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \overbrace{[LDPC块]}^{n}\end{bmatrix}$$

图 3　LDPC 对角块矩阵的生成图

组成观测矩阵的子矩阵都是相对独立的，且子矩阵的列数为 $n=N/M$，其中 M 和 N 分别表示观测矩阵的行和列。按照以下方，计算 DCT 逆矩阵(IDCT)与 3 种观测矩阵的相关性系数：1)由独立同分布高斯生成的随机高斯矩阵，记作 $\Phi_{高斯}$；2)传统置乱对角块矩阵，记作 $\Phi_{置乱对角块}$；3)LDPC 对角块矩阵，记作 $\Phi_{LDPC对角块}$。

3 种观测矩阵与 DCT 逆矩阵的相关性系数如图 4 所示。从图中可以看出，高斯随机观测矩阵与稀疏基的相关性系数较小，并且相关性系数基本与 M 的大小无关，同时置乱对角块矩阵与 LDPC 对角块矩阵的相关性系数走势基本相同。由此可以看出，去除传统方法中置乱各列元素的过程，对观测矩阵与稀疏基之间的相关性系数没有太大影响。



$(N=1024,M$ 为 $100\sim1000)$

图 4　3 种观测矩阵与稀疏基的相关性系数

4　实验结果

实验选用 DCT 字典作为稀疏基，选用 OMP 算法作为重构算法，整体流程采用分块压缩感知的方法，进行多组对比实验。实验结果通过峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio，PSNR)和结构相似性(Structural Similarity Index，SSIM)两种评判指标来判断。峰值信噪比(PSNR)是一种评价图像质量的客观测量法，通过原图像与被处理图像之间的均方误差相对于 $(2^n-1)^2$ 的对数值来衡量处理后的图像的质量。结构相似性(SSIM)是一种衡量两幅图像相似度的指标，相似度越大越好，最大为 1。

由上文可知，LDPC 对角块矩阵尺度小(只有 16×64 大小)，因此适用于像素是 4 的倍数的图像，若图像像素不是 4 的倍数，则可填充 0 使图像大小为 4 的倍数。对一幅大小为 512×512 的图像进行重构时，首先进行图像分块，然后对每个图像块进行采样，采样时可采用相同或不同的观测矩阵。通过 100 次实验对比发现，对每个图像块每次采用相同或不同的观测矩阵，其重构图像的 PSNR 相差不超过 1dB，故在下列实验中对每个图像块均采用相同的观测矩阵，这样更节省时间和存储空间。

实验 1　采用分块压缩感知的方法对 512×512 的 Lena 图进行重构。用相同的 16×64 观测矩阵对每个图像块进行重构，最后还原成用不同观测矩阵生成的各图，如图 5 所示。

图 5　5 种不同观测矩阵对 Lena 图像重构后的效果图

从图 5 中可以肉眼看出不同观测矩阵对 Lena 图像重构的效果，由于人眼观察存在主观性，为了更加客观地分析图像的重构质量，通过 PSNR 和 SSIM 两种指标评价图像的重构

质量。测试图像评判参数比较图如图6所示。从图6中可以明显看出，对角化LDPC观测矩阵较其他观测矩阵具有明显优势。

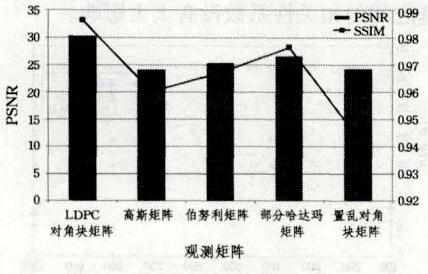


图6 不同观测矩阵重构Lena图的PSNR和SSIM对比图

实验2 几种常用观测矩阵的性能对比。采用分块压缩感知的方法对下列3种不同类型的自然图像进行重构，如图7所示。重构时每个图像块采用相同的观测矩阵(大小均为16×64)，每种方法均测试100次，比较各种方法的PSNR，SSIM和时间的平均值，并计算100次PSNR的标准差。

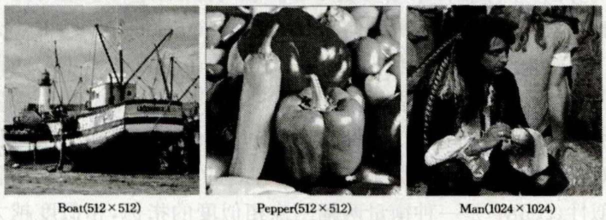


图7 3种不同类型的测试图像

重构后的图像参数对比如表1所列。

表1 不同观测矩阵重构相同自然图像的参数对比

图像	观测矩阵	测试参数			
		PSNR	SSIM	标准差	时间
Boat	LDPC对角块矩阵	29.9613	0.95859	2.28680	9.8013
	置乱二值对角矩阵	22.6318	0.80691	0.85670	9.4215
	随机二值稀疏矩阵	23.1241	0.82378	1.12240	9.4890
	部分哈达玛矩阵	23.9390	0.84817	0.84137	9.6362
	伯努利矩阵	22.5757	0.80401	0.78381	9.4890
	高斯矩阵	23.1380	0.82318	0.93621	9.5520
Pepper	LDPC对角块矩阵	29.0553	0.96619	0.86260	9.9649
	置乱二值对角矩阵	23.0794	0.82064	0.91463	9.0031
	随机二值稀疏矩阵	23.7930	0.84092	0.77101	9.8415
	部分哈达玛矩阵	23.7427	0.83651	0.91026	9.6631
	伯努利矩阵	23.0089	0.81287	1.09390	10.4149
	高斯矩阵	23.6686	0.83547	0.85954	9.6961
Man	LDPC对角块矩阵	28.4029	0.98574	0.27503	38.3099
	置乱二值对角矩阵	22.8578	0.91142	0.80170	36.9350
	随机二值稀疏矩阵	23.2181	0.91998	0.37524	38.4991
	部分哈达玛矩阵	23.9542	0.93409	0.79473	38.3941
	伯努利矩阵	23.5148	0.92601	0.60511	37.6848
	高斯矩阵	23.6558	0.93215	0.35758	39.8995

通过上述两组实验可以看出，LDPC对角块矩阵重构后图像的PSNR和SSIM值较其他观测矩阵有明显提高，肉眼观察实验1的重构结果也优于其他观测矩阵的重构结果。

结束语 本文利用LDPC校验码在通信传输中的优良性能，用其取代传统置乱对角块矩阵中的对角块，同时去除置乱的过程，进一步简化了观测矩阵的生成过程，通过仿真实验验证了其效果与置乱后的效果无明显差异。图像重构仿真实验中，在使用相同规模观测矩阵的情况下，LDPC对角块观测矩阵的重构效果优于其他观测矩阵。LDPC对角块观测矩阵不仅提高了重构图像的质量，还大大减小了观测矩阵的存储空间，降低了现实应用中数据传输的数据量及损耗，同时其简单的二值构造方式为后期硬件的实现提供了可行性。

下一步将继续提高LDPC对角块观测矩阵的重构速度，优化其在遥感图像重构中的重构性能。

参考文献

[1] CANDES E J,ROMBERG J,TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2004,52(2):489-509.

[2] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2006,52(4):1289-1306.

[3] MA J. Compressed Sensing for Surface Characterization and Metrology[J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement,2010,59(6):1600-1615.

[4] KHWAJA A S,MA J. Applications of Compressed Sensing for SAR Moving-Target Velocity Estimation and Image Compression[J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement,2011,60(8):2848-2860.

[5] CANDES E J,TAO T. Decoding by Linear Programming[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2005,51(12):4203-4215.

[6] CANDES E J,WAKIN M B. An Introduction To Compressive Sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine,2008,25(2):21-30.

[7] BANDEIRA A S,DOBRIBAN E,MIXON D G,et al. Certifying the Restricted Isometry Property is Hard[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2013,59(6):3448-3450.

[8] YAN W,WANG Q,SHEN Y. Shrinkage-Based Alternating Projection Algorithm for Efficient Measurement Matrix Construction in Compressive Sensing[J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement,2014,63(5):1073-1084.

[9] BAH B,TANNER J. Vanishingly Sparse Matrices and Expander Graphs, With Application to Compressed Sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2013,59(11):7491-7508.

[10] MAMAGHANIAN H,KHALED N,ATIENZA D,et al. Compressed sensing for real-time energy-efficient ECG compression on wireless body sensor nodes[J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering,2011,58(9):2456-2466.

[11] FAN F. Toeplitz-structured measurement matrix construction for chaotic compressive sensing[C]// International Conference on Intelligent Control & Information Processing. IEEE,2015.

[12] LI S,GE G. Deterministic Sensing Matrices Arising From Near Orthogonal Systems[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2014,60(4):2291-2302.

[13] YU N Y,LI Y. Deterministic construction of Fourier-based compressed sensing matrices using an almost difference set[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing,2013,2013(1):1-14.

[14] 田沛沛. 基于压缩感知的测量矩阵设计及在成像系统中的应用[D]. 天津:天津大学,2014.