一种广义直觉模糊粗糙集模型

路艳丽　雷英杰　周　炜
（空军工程大学防空反导学院　西安 710051）

摘　要　Atanassov 直觉模糊集是对 Zadeh 模糊集最有影响的一种扩充和发展。为进一步拓展 Pawlak 粗糙集对多重不确定性信息的处理能力，将直觉模糊集引入粗糙集，采用构造性方法提出了一种广义直觉模糊粗糙集模型。首先，介绍了直觉模糊集在一个特殊格上的等价定义，对直觉模糊近似空间的两个基本要素（直觉模糊逻辑算子和直觉模糊关系）进行了研究，证明了一些重要的性质定理；在此基础上，建立了等价关系下的直觉模糊粗糙集模型；最后，对所提模型的性质进行了分类验证与讨论。

关键词　粗糙集，模糊集，直觉模糊集，直觉模糊关系

中图法分类号　TP391　　**文献标识码**　A　　**DOI**　10.11896/j.issn.1002-137X.2017.07.041

Generalized Intuitionistic Fuzzy Rough Set Model

LU Yan-li　LEI Ying-jie　ZHOU Wei
(College of Air and Missile Defense, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract　Intuitionistic fuzzy set, proposed by Atanassov, is one of the most influential generalizations of Zadeh's fuzzy sets. To extend the capability of Pawlak's rough set theory in processing multiple uncertainties, intuitionistic fuzzy set and rough set were combined and a general model of intuitionistic fuzzy rough set was discussed by using constructive approach. Firstly, an equivalent definition of intuitionistic fuzzy set on a special lattice was introduced. Secondly, several important properties of intuitionistic fuzzy logic operators and intuitionistic fuzzy relation which are the two fundamental elements of intuitionistic fuzzy approximation space were proved, and then the model of intuitionistic fuzzy rough sets was constructed. Finally, the properties of proposed model were classified and examined respectively.

Keywords　Rough set, Fuzzy set, Intuitionistic fuzzy set, Intuitionistic fuzzy relation

1　引言

大量不确定性问题的存在是现代信息融合、工业控制、军事运筹等领域的一大特点。Pawlak 粗糙集理论[1]是描述和处理不确定性问题的重要工具之一，其优势在于无需提供除问题所需数据集之外的任何先验信息。然而，单纯地使用粗糙集理论不能完全有效地描述各种不确定性问题，因此在 Pawlak 粗糙集的发展过程中出现了各种拓展形式，如变精度粗糙集[2]、概率粗糙集、基于随机集的粗糙集[3]以及模糊粗糙集[4-5]（Fuzzy Rough Set，FRS）等。前 3 种扩展模型所涉及的概念和知识都是清晰的，然而在实际问题中往往更多地涉及到一些模糊概念和模糊知识。因而，FRS 理论的研究近年来十分活跃，并在系统控制[6]、特征选择[7-9]、故障诊断[10]等方面取得了许多应用成果。

Atanassov 直觉模糊集（Intuitionistic Fuzzy Set, IFS）[11-12]在 Zadeh模糊集的基础上增加了一个新的属性参数——非隶属度，从而可以描述“非此非彼”的“模糊概念”，更加细腻地刻画了客观世界的模糊性本质，是对 Zadeh 模糊集最有影响的一种扩充和发展。进一步将 FRS 发展为直觉模糊粗糙集（Intuitionistic Fuzzy Rough Set，IFRS）具有重要的理论研究价值和实用价值。Charkrabarty 等人[13]将 FRS 推广到 IFRS；Tripath[14]研究了直觉模糊近似空间上的粗糙集模型；Cornelis 等人[15]将文献[5]提出的广义 FRS 模型推广到了直觉模糊环境下，但未针对常用的 S-蕴涵与 R-蕴涵进行研究；徐伟华等人[16]研究了基于直觉模糊 T 等价信息系统的上近似约简；吴伟志等人[17]通过直觉模糊蕴含算子研究了对偶直觉模糊粗糙近似算子；薛占熬等人[18]结合模糊等价关系构造了直觉模糊粗糙近似算子；黄兵等人[19]研究了多个关系下的直觉模糊多粒度粗糙集。

本文采用面向应用的构造性方法，基于直觉模糊逻辑算子对直觉模糊等价关系下的 IFRS 模型进行研究。首先，简要介绍 IFS 在特殊格上的等价定义，对直觉模糊三角模、直觉模糊 S-蕴涵、R-蕴涵以及直觉模糊关系的一些重要性质进行了分析；在此基础上建立了等价关系下的 IFRS 模型；IFS 二维约束的限制使得 IFRS 中近似算子的性质与 FRS 中近似算子的性质有所不同，因此对 IFRS 模型的性质进行了分类证明与讨论。

到稿日期：2016-07-23　返修日期：2016-10-24　本文受国家自然科学基金项目（61273275，61272011）资助。

路艳丽（1979－），女，博士，讲师，主要研究方向为智能信息处理与信息融合等，E-mail：luyanlihgh@163.com；**雷英杰**（1956－），男，博士，教授，主要研究方向为智能信息处理与信息融合等；**周　炜**（1962－），男，副教授，主要研究方向为智能信息处理与网络信息安全等。

2 直觉模糊逻辑算子与直觉模糊关系

Atanassov 直觉模糊集的基本理论请参见文献[10-11]。这里主要介绍 IFS 在一个特殊格 L^* 上的定义[20]，该定义简化了后续直觉模糊逻辑算子的表示。本文使用 L 表示 L^*，使用 $IFS(U)$ 表示 U 上直觉模糊子集的全体。

定义 1(完备有界格)　设 $L=\{(x_1,x_2)\in[0,1]^2 \mid x_1+x_2\leqslant 1\}$，$\forall x,y\in L$，$x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$，$(x_1,x_2)\leqslant_L(y_1,y_2)\Leftrightarrow x_1\leqslant y_1$ 且 $x_2\geqslant y_2$，则 $\langle L,\leqslant_L\rangle$ 为一完备有界格。

设 $\langle L,\leqslant_L\rangle$ 是一完备有界格，其中，最大元 $1_L=(1,0)$，最小元 $0_L=(0,1)$。将直觉模糊集合 A 定义为论域 U 到 L 的一个映射 $A:U\to L$，记为 $A(x)=(A(x)_1,A(x)_2)=(\mu_A(x),\gamma_A(x))$，$\forall x\in U$，$(\mu_A(x),\gamma_A(x))\in L$，$\mu_A(x)$ 为 $x\in U$ 对 A 的隶属度，$\gamma_A(x)$ 为 $x\in U$ 对 A 的非隶属度。

2.1 直觉模糊逻辑算子[21]

本文用 T,S 表示直觉模糊 t-模、s-模，用 t,s 表示模糊 t-模、6s-模。

设映射 $T:L\times L\to L$，$\forall x,y,z,l\in L$，若 T 满足以下条件：

1)两极律：$T(0_L,0_L)=0_L$，$T(1_L,1_L)=1_L$；

2)交换律：$T(x,y)=T(y,x)$；

3)结合律：$T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$；

4)单调律：$x\leqslant_L z,y\leqslant_L l\Rightarrow T(x,y)\leqslant_L T(z,l)$；

且 T 满足 $T(x,1_L)=x(T(x,0)=x)$，则称 T 为直觉模糊t-模(s-模)。直觉模糊 t-模与 s-模统称为直觉模糊三角模。

称 $T(S)$ 为 t-可表示的[22]，若存在对偶模糊 t-模 t 和 s-模 s 满足($\forall x,y\in L$)：

$$T(x,y)=(t(x_1,y_1),s(x_2,y_2))$$

$$S(x,y)=(s(x_1,y_1),t(x_2,y_2))$$

对常用的模糊 t-模与 s-模(Zadeh 算子)进行直觉模糊化扩展，即可得到 t-可表示的直觉模糊三角模：$T_M(x,y)=(\min\{x_1,y_1\},\max\{x_2,y_2\})$，$S_M(x,y)=(\max\{x_1,y_1\},\min\{x_2,y_2\})$。

设 T,S 是 t-可表示直觉模糊三角模，易得如下性质($\forall x,y,z\in L$)：

1)$T(x\vee y,z)=T(x,z)\vee T(y,z)$

$S(z\wedge y,z)=S(x,z)\wedge S(y,z)$

2)$T(x\wedge y,z)=T(x,z)\wedge T(y,z)$

$S(x\vee y,z)=S(x,z)\vee S(y,z)$

3)若模糊三角模 t 是左连续的，s 是右连续的，则($\forall x\in L$)：

$$T(x,\sup_{y\in Y} y)=\sup_{y\in Y} T(x,y),Y\subseteq L$$

若递减映射 $N:L\to L$，且满足 $N(0_L)=1_L$，$N(1_L)=0_L$，则称 N 为直觉模糊否定算子。若 $\forall x\in L$，有 $N(N(x))=x$，则称 N 为对合否定算子。

定义 2(直觉模糊蕴涵算子)　映射 $\Psi:L\times L\to L$，且满足($\forall x\in L$)：1)$\Psi(0_L,1_L)=1_L$，2)$\Psi(1_L,x)=x$，则称 Ψ 为直觉模糊蕴涵算子。

定义 3(直觉模糊 S-蕴涵)　设 S 和 N 分别为直觉模糊 s-模和否定算子，将映射 $\Psi_{S,N}:L\times L\to L$ 定义为 $\Psi_{S,N}(x,y)=S(N(x),y)$，则 $\Psi_{S,N}$ 为一个直觉模糊蕴涵算子，称为直觉模糊 S-蕴涵(强蕴涵)算子。

定义 4(直觉模糊 R-蕴涵)　设 T 是直觉模糊 t-模，将映射 $\Psi_T:L\times L\to L$ 定义为：

$$\Psi_T(x,y)=\sup\{\lambda\in L \mid T(x,\lambda)\leqslant_L y\}$$

则 Ψ_T 为一个直觉模糊蕴涵算子，称为直觉模糊 R-蕴涵(剩余蕴涵)算子。

设 Ψ 为直觉模糊 S-蕴涵或 R-蕴涵，根据以上直觉模糊逻辑算子的定义，可得到直觉模糊 S-蕴涵及 R-蕴涵的如下性质：

1)$\Psi(x,1_L)=1_L$；

2)右单调：$x\leqslant_L y\Rightarrow\Psi(z,x)\leqslant_L\Psi(z,y)$，

左单调：$x\leqslant_L y\Rightarrow\Psi(y,z)\leqslant_L\Psi(x,z)$；

3)$\Psi(x\vee y,z)\leqslant_L\Psi(x,z)\wedge\Psi(y,z)$；

4)$\Psi(x,y\wedge z)\leqslant_L\Psi(x,y)\wedge\Psi(x,z)$；

5)$\Psi(x\wedge y,z)\geqslant_L\Psi(x,z)\vee\Psi(y,z)$；

6)$\Psi(x,y\vee z)\geqslant_L\Psi(x,y)\vee\Psi(x,z)$；

7)$T(x,\Psi_T(y,z))\leqslant_L\Psi_T(\Psi_T(x,y),z)$，

$\Psi_{S,N}(T(x,y),z)=\Psi_{S,N}(x,\Psi_{S,N}(y,z))$。

若 T 满足 $T(x,\sup_{y\in Y} y)=\sup_{y\in Y} T(x,y)$，则性质 3)，4)，5)对应有：

3')$\Psi_T(x\vee y,z)=\Psi_T(x,z)\wedge\Psi_T(y,z)$；

4')$\Psi_T(x,y\wedge z)=\Psi_T(x,y)\wedge\Psi_T(x,z)$；

5')$\Psi_T(T(x,y),z)=\Psi_T(x,\Psi_T(y,z))$。

2.2 直觉模糊关系

直觉模糊关系也是一种 IFS，但其论域是 N 个集合的叉积[23]，$U\times U$ 上的直觉模糊关系表示为：

$$R(x,y)=\{\langle\mu_R(x,y),\gamma_R(x,y)\rangle \mid (x,y)\in U\times U\}$$

其中，$(\mu_R(x,y),\gamma_R(x,y))\in L$。用 $IFR(U\times U)$ 表示 $U\times U$ 上直觉模糊关系的全体。

定义 5　设 $R\in IFR(U\times U)$，$\forall x,y,z\in U$，则 R 是

1)自反的：若 $R(x,x)=1_L$；

2)对称的：若 $R(x,y)=R(y,x)$；

3)传递的：若 $R{}^{\vee}_{\wedge}\circ^{\beta}_{\rho}R\leqslant_L R$，$R{}^{\vee}_{\wedge}\circ^{\beta}_{\rho}R$ 表示关系的合成，$\wedge$ 和 $\vee$ 是 Zadeh 算子，β 和 ρ 是普通模糊 t-模或 s-模；

4)T 传递的：若 $T(R(x,z),R(z,y))\leqslant_L R(x,y)$；

5)sup-min 传递的：若 $\sup_{z\in U} T_M(R(x,z),R(z,y))\leqslant_L R(x,y)$。

容易验证，3)传递性包含了 4)T 传递性，T 传递性是传递性的一种特殊情况。对于 sup-min 传递性，$\sup_{z\in U} T_M(R(x,z),R(z,y))\leqslant_L R(x,y)$，即 $T_M(R(x,z),R(z,y))\leqslant_L R(x,y)$，因此，sup-min 传递性是 T 传递性的一种特殊情况，也是传递性的一种特殊情况。因此，定义 5 的 T 传递性和 sup-min 传递性都是传递性的特殊情况。

设 $R\in IFR(U\times U)$，若 R 满足自反性、对称性和传递性，则称 R 是 U 上的直觉模糊等价关系。

根据等价关系的自反性和传递性以及三角模的边界性质，可得直觉模糊等价关系的一条有用性质。

定理 1 设 T 是一个直觉模糊 t-模，则对于论域 U 上的任一直觉模糊等价关系 $R(\forall x,y\in U)$：

$$R(x,y)=\sup_{z\in U} T(R(x,z),R(z,y))$$

定理 2 设直觉模糊 t-模 T 满足 $T(a,\sup_{b\in Y} b)=\sup_{b\in Y} T(a,b)$，$\Psi_T$ 是一个基于 T 的直觉模糊 R-蕴涵，则对于论域 U 上的任一直觉模糊等价关系 $R(\forall x,y\in U)$：

$$\inf_{z\in U} \Psi_T(R(x,z),R(z,y))=R(x,y)$$

证明：根据 R 的自反性可得：

$$\inf_{z\in U} \Psi_T(R(x,z),R(z,y))\leqslant_L \Psi_T(R(x,x),R(x,y))=\Psi_T(1_L,R(x,y))=R(x,y)$$

因此

$$\inf_{z\in U} \Psi_T(R(x,z),R(z,y))\leqslant_L R(x,y) \tag{1}$$

根据定理 1 和 R 的对称性，可得：

$$T(R(x,z),R(x,y))=T(R(z,x),R(x,y))\leqslant_L \sup_{x\in U} T(R(z,x),R(x,y))=R(z,y)$$

即 $T(R(x,z),R(x,y))\leqslant_L R(z,y)$。

根据已知，可得：

$$\sup\{\lambda\mid\lambda\in L,T(R(x,z),\lambda)\leqslant_L R(z,y)\}\geqslant_L R(x,y)$$

因此

$$\inf_{z\in U} \Psi_T(R(x,z),R(z,y))\geqslant_L R(x,y) \tag{2}$$

由式(1)和式(2)可得：

$$\inf_{z\in U} \Psi_T(R(x,z),R(z,y))=R(x,y)$$

证毕。

值得一提的是，由于 S-蕴涵的强蕴涵性质，定理 2 对于 S-蕴涵并不成立。

3 直觉模糊粗糙集

本节研究直觉模糊近似空间上 IFS 的近似算子及其性质。

3.1 直觉模糊近似算子

设 U 是一非空有限论域，$\boldsymbol{R}$ 是 U 上的一族直觉模糊等价关系，Ψ 为直觉模糊蕴涵算子（本文的蕴涵算子选择 R-蕴涵 Ψ_T 或 S-蕴涵 $\Psi_{S,N}$），T 为直觉模糊三角模，则称 $IFAS=(U,\boldsymbol{R},\Psi,T)$ 为直觉模糊近似空间（Intuitionistic Fuzzy Approximation Space，IFAS）。

定义 6（近似算子） 设 $IFAS=(U,\boldsymbol{R},\Psi,T)$，对于 $\forall x\in U$，$\forall A\in IFS(U)$，$\forall R\in\boldsymbol{R}$，定义论域 U 上的两个直觉模糊子集：

$$\underline{R}A(x)=\inf_{y\in U} \Psi(R(x,y),A(y)) \tag{3}$$

$$\overline{R}A(x)=\sup_{y\in U} T(R(x,y),A(y)) \tag{4}$$

称 $(\underline{R}A(x),\overline{R}A(x))$ 为直觉模糊集 A 在近似空间 IFAS 上的一个粗糙近似，其中 $\underline{R}A(x)$ 和 $\overline{R}A(x)$ 分别为 A 的 R 下近似和 R 上近似。

定义 6 的 IFRS 模型是对 FRS 和粗糙集模型的扩展，当近似空间 $IFAS=(U,\boldsymbol{R},\Psi,T)$ 的直觉模糊关系族退化为模糊关系族时，直觉模糊蕴涵算子 Ψ 和三角模 T 也退化为模糊蕴涵算子和模糊三角模，被近似集由直觉模糊集退化为模糊集，这时 IFRS 退化为 FRS；若直觉模糊关系退化为普通等价关系，直觉模糊蕴涵算子 Ψ 和三角模 T 也退化为普通的蕴涵算子和合取算子，被近似集由直觉模糊集退化为普通集，这时 IFRS 退化为经典粗糙集模型。

3.2 近似算子的性质

对 Pawlak 粗糙集理论的拓展不是随意的，其必须满足一些基本的性质。下面对直觉模糊近似空间 $IFAS=(U,\boldsymbol{R},\Psi,T)$ 中上、下近似算子的基本性质、单调性、幂等性、对偶性等进行分类验证与讨论。首先给出基本性质。

定理 3 设近似空间 $IFAS=(U,\boldsymbol{R},\Psi,T)$，$\forall A\in IFS(U)$，$\forall R\in\boldsymbol{R}$：

P1) $\underline{R}A\subseteq A\subseteq\overline{R}A$；

P2) $\underline{R}\varnothing=\varnothing=\overline{R}\varnothing$；$\underline{R}U=U=\overline{R}U$。

证明：P1) 由定义 6 及 R 的自反性，$\forall x\in U$：

$$\underline{R}A(x)=\inf_{y\in U} \Psi(R(x,y),A(x))\leqslant_L \Psi(R(x,x),A(x))=\Psi(1_L,A(x))=A(x)$$

$$\overline{R}A(x)=\sup_{y\in U} T(R(x,y),A(y))\geqslant_L T(R(x,x),A(x))\geqslant_L T(1_L,A(x))=A(x)$$

故 $\underline{R}A\subseteq A\subseteq\overline{R}A$。

P2) $\varnothing(x)=0_L$，根据定义 6 及 T 的性质，可得 $\overline{R}\varnothing(x)=\sup_{y\in U} T(R(x,y),0_L)=0_L$，根据 P1)，可得 $\overline{R}\varnothing(x)\subseteq\varnothing(x)$，因此有 $\underline{R}\varnothing=\varnothing=\overline{R}\varnothing$。

$U(x)=1_L$，根据 R 的自反性以及 T 的性质，$\overline{R}U(x)=\sup_{y\in U} T(R(x,y),1_L)=\sup_{y\in U} R(x,y)=1_L$，故 $\overline{R}U=U$；根据 S-蕴涵和 R-蕴涵的边界性质可得 $\underline{R}U(x)=\inf_{y\in U} \Psi(R(x,y),1_L)=1_L$。

故 $\underline{R}U=U=\overline{R}U$。证毕。

性质 P1) 说明，直觉模糊知识 R 将一个直觉模糊概念 A 限定在下近似 $\underline{R}A$ 和上近似 $\overline{R}A$ 之间，而这里的上近似和下近似是用直觉模糊知识可表示的。

定理 4 设 $IFAS=(U,\boldsymbol{R},\Psi,T)$，$\forall A,B\in IFS(U)$，$\forall R,Q\in\boldsymbol{R}$：

P3) 单调性

若 $A\subseteq B$，则 $\underline{R}A\subseteq\underline{R}B$ 且 $\overline{R}A\subseteq\overline{R}B$；

若 $R\subseteq Q$，则 $\underline{R}A\supseteq\underline{Q}A$，$\overline{R}A\subseteq\overline{Q}A$。

证明：$\forall A,B\in IFS(U)$，若 $A\subseteq B$，根据直觉模糊 t-模的单调性，可得：

$$\overline{R}A(x)=\sup_{y\in U} T(R(x,y),A(y))\leqslant_L \sup_{y\in U} T(R(x,y),B(y))=\overline{R}B(x)$$

根据 R-蕴涵与 S-蕴涵的右单调性质，可得：

$$\underline{R}A(x)=\inf_{y\in U} \Psi(R(x,y),A(y))\leqslant_L \inf_{y\in U} \Psi(R(x,y),B(y))=\underline{R}B(x)$$

故 $\underline{R}A\subseteq\underline{R}B$ 且 $\overline{R}A\subseteq\overline{R}B$。

同理，根据 $\Psi(\cdot,y)$ 的单调递减性，即可证明若 $R\subseteq Q$，

则$\underline{R}A\supseteq\underline{Q}A$，$\overline{R}A\subseteq\overline{Q}A$ 成立。证毕。

性质 P3)揭示了直觉模糊近似算子的单调性，即被近似概念以及知识的包含关系在上、下近似算子上的体现，这均继承了 Pawlak 粗糙集的基本思想。近似空间 $IFAS$ 中 $\boldsymbol{R}$ 包含了一族直觉模糊等价关系，当 $\boldsymbol{P}=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，$\boldsymbol{P}\subseteq\boldsymbol{R}$ 时，容易验证，$\bigcap\boldsymbol{P}=\bigcap_{i=1}^{n}P_i$ 仍是直觉模糊等价，称$\bigcap_{i=1}^{n}P_i$ 为直觉模糊不可区分关系。另外，由于$\bigcap_{i=1}^{n}P_i=P\subseteq P_i$，根据 P3)可得，$\underline{P}A\supseteq\underline{P_i}A$，$\overline{P}A\subseteq\overline{P_i}A$。

定理 5　设 $IFAS=(U,\boldsymbol{R},\Psi,T)$，$T(a,\sup_{b\in Y}b)=\sup_{b\in Y}T(a,b)$，$\forall A\in IFS(U)$，$\forall R\in\boldsymbol{R}$：

P4)幂等性

$\underline{R}(\underline{R}A)(x)=\underline{R}A(x)$；$\overline{R}(\overline{R}A)(x)=\overline{R}A(x)$

证明：$\forall x\in U$，根据已知及蕴涵算子的性质，可得：

$$\begin{aligned}\underline{R}(\underline{R}A)(x)&=\inf_{y\in U}\Psi(R(x,y),\inf_{z\in U}\Psi(R(y,z),A(z)))\\&=\inf_{y\in U}\inf_{z\in U}\Psi(R(x,y),\Psi(R(y,z),A(z)))\\&=\inf_{y\in U}\inf_{z\in U}\Psi(T(R(x,y),R(y,z)),A(z)))\\&\leqslant_L\inf_{z\in U}\Psi(R(x,z),A(z))=\underline{R}A(x)\end{aligned}$$

即$\underline{R}(\underline{R}A)\subseteq\underline{R}A$，根据 P1)可得$\underline{R}A\subseteq\underline{R}(\underline{R}A)$，故$\underline{R}A=\underline{R}(\underline{R}A)$。

根据定义 6 以及已知条件，利用直觉模糊三角模 T 的结合律，可得：

$$\begin{aligned}\overline{R}(\overline{R}A)(x)&=\sup_{y\in U}T(R(x,y),\sup_{z\in U}T(R(y,z),A(z)))\\&=\sup_{y\in U}\sup_{z\in U}T(R(x,y),T(R(y,z),A(z)))\\&=\sup_{z\in U}T(\sup_{y\in U}T(R(x,y),R(y,z)),A(z))\\&=\sup_{z\in U}T(R(x,z),A(z))=\overline{R}A(x)\end{aligned}$$

故$\overline{R}(\overline{R}A)=\overline{R}A$。证毕。

定理 6　设 $IFAS=(U,\boldsymbol{R},\Psi_T,T)$，$T(a,\sup_{b\in Y}b)=\sup_{b\in Y}T(a,b)$，$\forall A\in IFS(U)$，$\forall R\in\boldsymbol{R}$：

P5)$\overline{R}(\underline{R}A)=\underline{R}A$；$\underline{R}(\overline{R}A)=\overline{R}A$

证明：根据定义 6 及已知，可得($\forall x\in U$)：

$$\begin{aligned}\overline{R}(\underline{R}A)(x)&=\sup_{y\in U}T(R(x,y),\inf_{z\in U}\Psi_T(R(y,z),A(z)))\\&=\inf_{z\in U}\sup_{y\in U}T(R(x,y),\Psi_T(R(y,z),A(z)))\\&\leqslant_L\inf_{z\in U}\sup_{y\in U}\Psi_T(\Psi_T(R(x,y),R(y,z)),A(z))\\&\leqslant_L\inf_{z\in U}\Psi_T(\inf_{y\in U}\Psi_T(R(x,y),R(y,z)),A(z))\\&=\inf_{z\in U}\Psi_T(R(x,z),A(z))=\underline{R}A(x)\end{aligned}$$

即$\overline{R}(\underline{R}A)\subseteq\underline{R}A$，由 P1)得$\overline{R}(\underline{R}A)\supseteq\underline{R}A$，故$\overline{R}(\underline{R}A)=\underline{R}A$。

$\underline{R}(\overline{R}A)(x)=\inf_{y\in U}\sup\{\lambda\in L\mid T(R(x,y),\lambda)\leqslant_L\overline{R}A(y)\}$

根据已知及 T 的交换律和结合律，可得：

$$\begin{aligned}T(R(x,y),\overline{R}A(x))&=T(R(x,y),\sup_{z\in U}T(R(x,z),A(z)))\\&=\sup_{z\in U}T(T(R(x,y),R(x,z)),A(z))\\&=\sup_{z\in U}T(T(R(y,x),R(x,z)),A(z))\\&\leqslant_L\sup_{z\in U}T(R(y,z),A(z))=\overline{R}A(y)\end{aligned}$$

即 $T(R(x,y),\overline{R}A(x))\leqslant_L\overline{R}A(y)$，由已知可得，$\sup\{\lambda\in L\mid T(R(x,y),\lambda)\leqslant_L\overline{R}A(y)\}\geqslant_L\overline{R}A(x)$，因此$\underline{R}(\overline{R}A)(x)\geqslant_L\inf_{y\in U}\overline{R}A(x)=\overline{R}A(x)$。亦即$\underline{R}(\overline{R}A)\supseteq\overline{R}A$，根据 P1)得$\underline{R}(\overline{R}A)\subseteq\overline{R}A$，故$\underline{R}(\overline{R}A)=\overline{R}A$。证毕。

性质 P4)揭示了近似算子的幂等性。性质 P4)与性质 P5)反映了上、下近似本身是可定义的这一事实，但是由于 IFRS 中直觉模糊集的二维约束，这种可定义性需添加必要的前提条件才能成立。值得一提的是，这些性质的成立还得益于关系 R 的自反性、对称性和传递性，若 R 不具有这些性质，P4)与 P5)将不成立。另外，当 $\Psi=\Psi_{S,N}$时，性质 P5)不成立。

定理 7　设 $IFAS=(U,\boldsymbol{R},\Psi_{S,N},T)$，其中 N 为对合否定算子，$\forall A\in IFS(U)$，$\forall R\in\boldsymbol{R}$：

P6)对偶性

$\underline{R}N(A(x))=N(\overline{R}A(x))$；$\overline{R}N(A(x))=N(\underline{R}A(x))$

证明：由定义 6，$\forall x\in U$，$\underline{R}(N(A(x)))=\inf_{y\in U}\Psi_{S,N}(R(x,y),N(A(y)))$，由于 $S(N(x),y)=N(T(x,N(y)))$，因此

$\Psi_{S,N}(R(x,y),N(A(y)))=N(T(R(x,y),A(y)))$

N 为对合否定算子，因此：

$$\begin{aligned}\underline{R}(N(A(x)))&=\inf_{y\in U}N(T(R(x,y),A(y)))\\&=N(\sup_{y\in U}T(R(x,y),A(y)))\\&=N(\overline{R}(A(x)))\end{aligned}$$

同理可证，$\overline{R}N(A(x))=N(\underline{R}A(x))$。证毕。

性质 P6)给出了直觉模糊上、下近似算子之间存在的对偶性质，蕴涵算子取 $\Psi_{S,N}$时对偶性成立，蕴涵算子取 Ψ_T 时 P6)的等号并不成立。

定理 8　设 $IFAS=(U,\boldsymbol{R},\Psi,T)$，$T(a,\sup_{b\in Y}b)=\sup_{b\in Y}T(a,b)$，$\forall A\in IFS(U)$，$\forall R\in\boldsymbol{R}$：

P7)$\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}A\cap\underline{R}B$；

P8)$\overline{R}(A\cup B)=\overline{R}A\cup\overline{R}B$。

证明：P7)由已知、直觉模糊 S-蕴涵以及 R-蕴涵的性质，可得($\forall x\in U$)：

$$\begin{aligned}\underline{R}(A\cap B)(x)&=\inf_{y\in U}\Psi(R(x,y),A(y))\wedge\inf_{y\in U}\Psi(R(x,y),B(y))\\&=\underline{R}A(x)\cap\underline{R}B(x)\end{aligned}$$

P8)根据已知，可得($\forall x\in U$)：

$$\begin{aligned}\overline{R}(A\cup B)(x)&=\sup_{y\in U}(T(R(x,y),A(y))\vee T(R(x,y),B(y)))\\&=\sup_{y\in U}T(R(x,y),A(y))\vee\sup_{y\in U}T(R(x,y),B(y))\\&=\overline{R}A(x)\cup\overline{R}B(x)\end{aligned}$$

证毕。

定理 9　设 $IFAS=(U,\boldsymbol{R},\Psi,T)$，$\forall A\in IFS(U)$，$\forall R\in\boldsymbol{R}$：

P9)$\overline{R}(A\cap B)\subseteq\overline{R}A\cap\overline{R}B$；

P10)$\underline{R}(A\cup B)\supseteq\underline{R}A\cup\underline{R}B$。

证明：P9)根据定义 6 及直觉模糊三角模 T 的单调性，可得($\forall x\in U$)：

$$\begin{aligned}\overline{R}(A\cap B)(x)&=\sup_{y\in U} T(R(x,y),A(y)\wedge B(y))\\&\leqslant\sup_{y\in U}(T(R(x,y),A(y))\wedge T(R(x,y),B(y)))\\&=\sup_{y\in U} T(R(x,y),A(y))\wedge\sup_{y\in U} T(R(x,y),B(y))\\&=\overline{R}A(x)\cap\overline{R}B(x)\end{aligned}$$

P10)由定义6及蕴含算子的性质可得($\forall x\in U$):

$$\begin{aligned}\underline{R}(A\cup B)(x)&=\inf_{y\in U}\Psi(R(x,y),A(y)\vee B(y))\\&\geqslant\inf_{y\in U}\Psi(R(x,y),A(y))\vee\inf_{y\in U}\Psi(R(x,y),B(y))\\&=\underline{R}A(x)\cup\underline{R}B(x)\end{aligned}$$

证毕。

性质P7)至P10)给出了被近似集的交、并的上、下近似与其上、下近似的交、并之间的关系,其中性质P7)和P8)只有在具备前提条件时才成立。

结束语 现实世界中存在的不确定性问题往往带有多重不确定性,如既有模糊性又有粗糙性。对此,需将多种理论进行有效融合才能对其进行描述和处理。本文将直觉模糊集理论与粗糙集理论相结合,验证了直觉模糊关系的若干有用性质,研究了直觉模糊等价关系下的IFRS模型,对模型的5类重要性质进行了证明,为IFRS的进一步应用建立了理论支撑。分析表明,FRS模型与粗糙集模型均为IFRS模型的特殊情形,IFRS能处理更加一般的数据,具有广阔的应用前景。

参考文献

[1] PAWLAK Z. Rough Sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[2] ZIARKO W. Variable Precision Rough Set Model[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1993, 46(1): 39-59.

[3] 张文修,吴伟志,梁吉业,等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2001

[4] DUBOIS D, PRADE H. Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets[J]. Internatioanl Journal of General Systems, 1990, 17(2): 191-209.

[5] RADZIKOWSKA A M, KERRE E E. A Comparative Study of Fuzzy Rough Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 126(1): 137-155.

[6] PETERS J F, ZIAEI K, RAMANNA S, et al. Adaptive Fuzzy Rough Approximate Time Controller Design Methodology: Concepts, Petri Net Model and Application[C]// Proc. IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics. 1998: 2101-2106.

[7] HU Q H, XIE Z X, YU D R. Hybrid Attributes Reduction Based on a Novel Fuzzy-rough Model and Information Granulation[J]. Pattern Recognition, 2007, 40(12): 3509-3521.

[8] JENSEN R, SHEN Q. Fuzzy-Rough Sets Assisted Attribute Selection[J]. IEEE Trans. on fuzzy System, 2007, 15(1): 73-89.

[9] QIAN Y H, WANG Q, CHENG H H, et al. Fuzzy-rough Feature Selection Accelerator[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015, 9437(258): 61-78.

[10] WANG X F, WANG S H, DU H Z, et al. Fault Diagnosis of Chemical Industry Process Based on FRS and SVM[J]. Control and Decision, 2015, 30(2): 353-356. (in Chinese)
王鲜芳,王岁花,杜昊泽,等. 基于模糊粗糙集和支持向量机的化工过程故障诊断[J]. 控制与决策,2015,30(2):353-356.

[11] ATANASSOV K. Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[12] ATANASSOV K. Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications[M]. Heidelberg, Germany: Physica-Verlag, 1999.

[13] CHAKRABARTY K, GEDEON T, KOCZY L. Intuitionistic Fuzzy Rough Sets[C]// Proc. 4th Joint Conf. on Information Sciences. Durham, NC: JCIS, 1998: 211-214.

[14] TRIPATHY B K. Rough Sets on Intuitionistic Fuzzy Approximation Spaces[C]// 3rd Int. IEEE Conf. Intelligent Systems. September 2006: 776-779.

[15] CORNELIS C, DE COCK M, KERRE E E. Intuitionistic Fuzzy Rough Sets: at the Crossroads of Imperfect Knowledge[J]. Expert Systems, 2003, 20(5): 260-270.

[16] XU W H, LIU Y F, SUN W X. Upper Approximation Reduction Based on Intuitionistic Fuzzy *T* Equivalence Information Systems[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2012, 7414(1): 63-70.

[17] WU W Z, GAO C J, LI T J, et al. On Dual Intuitionistic Fuzzy Rough Approximation Operators Determined by an Intuitionistic Fuzzy Implicator[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2013, 8170(1): 147-156.

[18] XUE Z A, CHENG H R, HUANG H S, et al. Rough Approximations of Intuitionistic Fuzzy Approximation Space[J]. Computer Science, 2013, 40(4): 221-226, 255. (in Chinese)
薛占熬,程惠茹,黄海松,等. 模糊空间中的直觉模糊粗糙近似[J]. 计算机科学,2013,40(4):221-226,255.

[19] HUANG B, GUO C X, et al. Intuitionistic Fuzzy Multigranulation Rough Sets[J]. Information Sciences, 2014, 277: 299-320.

[20] DESCHRIJVER G, CORNELIS C, KERRE E E. Intuitionistic Fuzzy Connectives Revisited[C]// Proc. 9th Int. Conf. Information Processing Management Uncertainty Knowledge-Based Systems. 2002: 1839-1844.

[21] LU Y L, LEI Y J, TIAN Y. Research on Intuitionistic Fuzzy Logic Operators[J]. Computer Science, 2008, 35(11): 151-153. (in Chinese)
路艳丽,雷英杰,田野. 直觉模糊逻辑算子研究[J]. 计算机科学,2008,35(11):151-153.

[22] DESCHRIJVER G, CORNELIS C, KERRE E E. On the Representation of Intuitionistic Fuzzy t-norms and t-conorms[J]. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2004, 12(1): 45-61.

[23] BURILLO P, BUSTINCE H. Intuitionistic Fuzzy Relations (part1) [J]. Mathware and Soft Computing, 1995, 2(1): 5-38.