第36卷 第6期 2009年6月 计算机科学 Computer Science Vol. 36 No. 6 June 2009

基于初始聚类中心选取的改进 FCM 聚类算法

张慧哲 王 坚
(同济大学CIMS研究中心 上海 201804)

摘 要 针对模糊C-均值(Fuzzy C-Means,FCM)算法聚类效果往往受到初始聚类中心影响,收敛结果易陷入局部极小的问题,提出了一种改进的模糊C均值聚类算法。算法给出了一种简洁快速的初始聚类中心的选取规则,并根据聚类中心的分离特性改进了目标函数,从而使获得的聚类结果为全局最优。仿真结果证明新算法与传统FCM方法相比,迭代次数少,准确率高,同时也更加适用于样本数据分类不均衡的聚类问题。

关键词 聚类,FCM聚类,目标函数,初始聚类中心,分离度
中图法分类号 TP311.13 **文献标识码** A

Improved Fuzzy C Means Clustering Algorithm Based on Selecting Initial Clustering Centers

ZHANG Hui-zhe WANG Jian
(CIMS Research Center, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract This paper proposed an improved FCM algorithm aiming at many problems in Fuzzy C Means algorithm, such as being sensitive to initial conditions, usually leading to local minimum results. The new algorithm can obtain global optimal solutions through a new simple and efficient select rule of the initial cluster centers, furthermore alternating optimization in terms of a novel separable criterion. By comparative testing with custom FCM, the new algorithms not only have fewer numbers of iterations and have higher accuracy, but also more suitable for problems with not balanced classified samples.

Keywords Clustering, Fuzzy C mean clustering, Objective function, Initial cluster centers, Separative degree

1 引言

聚类方法是模式分类与系统建模的基本方法之一[1]。聚类就是将物理或抽象的对象,根据某种准则进行区分和分类的过程,在这一过程中没有教师指导,因此是一种无监督的分类,聚类所生成的是一些子集,在同一子集中的对象之间具有较高的相似度,而不同子集间对象的差别较大。模糊聚类由于能够描述样本类的中介性,能更客观地反映现实世界,目前已成为聚类分析的主流,成为非监督模式识别的一个重要分支。众多的模糊聚类方法中,应用最广泛的是模糊C均值(FCM)算法,但是FCM算法还存在多方面问题亟待解决[2]。如聚类数目难确定;初始值敏感,迭代容易陷入局部极值,难以取得全局最优;样本中含有噪声时分类效果较差等。

针对上述FCM存在的问题,国内外学者进行了广泛且深入的研究,并取得了较多的成果。ROSE[3]提出了考虑类中心之间的距离,将全局优化方法中的模拟退火算法用于聚类分析,这种方法虽能达到效果,但由于模拟退火算法只有当温度下降足够慢时才能收敛到全局最优,因而整个聚类过程需要极大的运算时间,使得该方法实用性不强;Krishnapuram和Keller[4]在1993年提出了PCM(possibilistic c-means),这种算法克服了FCM算法对噪声数据尤为敏感的缺点,有效地解决了样本中包含噪音时聚类效果不好的问题;2002年Timm和Kruse[5,6]为了避免产生一致的类中心,在PCM算法的目标函数中也加入类中心的排斥项,得到新的目标函数,但类中的对象没有任何联系,聚类结果不是很理想;2001年Ozdemir和Akarun[7]在聚类算法中引入了规则化的概念,但其不足在于需要根据规则项的不同对各聚类中心给出不同的目标函数;2005年Kuo-Lung Wu和Jian Yu[8]等提出FCS(fuzzy compactness and separation)算法,但FCS算法规定有固定的核边界,而一个核中的所有对象具有相同的隶属度值而不能被辨识,所以造成分类准确率下降;王涛等[9]提出了一种冗余聚类中心初始化方法,以扩大解空间的搜索范围,该方法在分类数目不大的情况下确实能取得比较好的效果,但由于方法中冗余的初始聚类中心依旧是采用随机化方法,当分类数较大时,方法的计算量大,且难以保证全局最优。张新波[10]在总结前人不足的基础上对初始聚类中心的选择进行了研究,采用改进的基于相似性阈值和最小距离原则的聚类方法对样本进行粗聚类,并对聚类结果计算,得到各类的类中

到稿日期:2008-07-28 返修日期:2008-10-08 本文受国家"863"计划基金资助项目(2003AA414120),国家科技支撑计划项目(2006BAF01A46),国家"863"计划基金资助项目(2003AA414120),上海市社会发展重大专项项目(06DZ12001),上海市基础研究重点项目(06JC14066),上海市科技发展基金重点项目(061612058),上海市登山行动计划项目(061111006)资助。

张慧哲(1979-),女,博士研究生,研究方向为数据仓库、数据挖掘及智能交通系统,E-mail:zhanghuizhe168@163.com;王 坚(1961-),男,研究员,博士生导师,主要研究方向为先进制造技术、企业信息化、数据仓库技术。

心。但在粗聚类的过程中需要反复进行调整最小距离值 T 及系数 α，直到所有样本被聚成 C 类，这大大增加了聚类计算的计算量，不适合类别数目已经确定的聚类计算。

本文提出一种改进的模糊 C 均值聚类算法，在算法的聚类中心选取和优化过程中充分考虑到对聚类中心的约束，既要保证同一类别之间对象的紧密性，又要确保各聚类中心之间的分离性。实施的步骤为：第一阶段通过所设定的聚类中心选取规则，即各中心之间应保持设定的最小距离，算法按照规则有目的地进行初选聚类中心，这样可以避免随机求取初始聚类中心时容易使算法收敛到局部极小的情况；第二阶段利用第一阶段所得的初始聚类中心执行新的目标函数，其中增加了聚类中心之间的分离度一项，这样既保证了类中数据的紧密性，又可以保证聚类中心之间的分离性，进一步体现了对聚类中心的约束。

2 模糊 C 均值算法(FCM)

在普通分类的基础上，J. C. Bezdek 利用模糊集合的概念提出了模糊分类的方法[1]，认为被分类样本集合中的每一个样本均以不同的隶属度隶属于某一类。因此某一类就认为是样本集合上的一个模糊子集，于是每一种这样的分类结果所对应的分类矩阵，就是一个模糊分类矩阵。

设 $U=(\mu_{ij})_{n\times c}$ 为模糊分类矩阵(其中，n 表示样本个数，c 表示分类数，μ_{ij} 为第 j 个样本属于第 i 个分类的隶属度，设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为被分类样本集合，其中每一个样本 x_j 可以是多维向量。将样本集合 X 分成 c 类($2\leqslant c\leqslant n$)，设 c 个聚类中心向量为 ω，为了得到最优模糊分类，J. C. Bezdek 定义了一个目标函数 J_m。

$$J_m=\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{c}(\mu_{ij})^m d_{ij}{}^2(x_j,\omega_i),$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{c}(\mu_{ij})=1,\ \forall j\\ \mu_{ij}\in[0,1],\ \forall i,j\\ \sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij})>0,\ \forall i\end{cases}$$

其中：x_j 为样本空间数据 $j=1,2,\cdots,N$；ω_i 为聚类中心，$i=1,2,\cdots,c$；μ_{ij} 为 x_j 对 ω_i 的隶属度，$m\in(1,\infty)$ 为模糊指数，控制分类矩阵的模糊程度，m 越大，分类的模糊程度越高，通常取值为 2，即 $d_{ij}(x_j,w_i)=\|x_j-\omega_i\|^2$，表示数据点 x_j 与第 i 类中心 ω_i 之间的欧氏距离，欧氏距离准则适合于类内数据点为超球形分布的情况，d_{ij} 采用不同的距离定义，可将聚类算法用于不同分布类型数据的聚类问题[11]。目标函数 $J_m(U,\omega)$ 为每个数据点到各聚类中心的加权距离平方和。

FCM 算法就是一个使目标函数 $J_m(U,\omega)$ 最小化的迭代求解过程。应用 Lagrange 乘数法求解 $J_m(U,\omega)$ 在隶属度函数约束下的优化问题，可得到隶属度计算公式为：

$$\mu_{ij}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{c}[d_{ij}{}^2(x_j,\omega_i)/d_{kj}{}^2(x_j,\omega_k)]^{1/(m-1)}}\quad i=1,\cdots,c,\ j=1,\cdots,N$$

聚类中心计算公式为：

$$\omega_i=\sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m x_k\Big/\sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m,\ i=1,\cdots,c$$

FCM 算法的过程就是最小化 J_m 的过程，算法步骤如下：

Step 1　给定类别数 c，参数 m，容许误差 ξ 的值；

Step 2　随机初始化聚类中心 $\omega_i(k)$，$i=1,2,\cdots,C$，并令循环次数 $k=1$；

Step 3　按隶属度计算式 $\mu_{ij}(k)=\frac{1}{\sum_{k=1}^{c}[d_{ij}{}^2(x_j,\omega_i)/d_{kj}{}^2(x_j,\omega_k)]^{1/(m-1)}}$，$i=1,\cdots,c$，$j=1,\cdots,N$；

Step 4　按式 $\omega_i=\frac{\sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m x_k}{\sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m}$ 修正所有的聚类中心 $\omega_i(k+1)$，$i=1,\cdots,c$；

Step 5　计算误差 $e=\sum_{i=1}^{c}\|\omega_i(k+1)-\omega_i(k)\|^2$，如果 $e<\xi$，算法结束；否则 $k=k+1$，转 Step3；

Step 6　样本归类，算法结束后，可按下列方法将所有样本归类：$d_{ij}{}^2(x_j,\omega_i)<d_{ij}{}^2(x_j,\omega_k)$，$k=1,2,\cdots,C$，$k\neq i$，则将 x_j 归入第 i 类。

算法停止迭代的条件是相邻两次迭代所得的聚类中心变化很小，则认为算法已收敛。由于算法的每一次迭代都是沿着使目标函数减小的方向进行的，而 $J_m(U,\omega)$ 可能有多个极值点，若初始聚类中心选在了一个局部极小点附近，就可能会使算法收敛到局部极小，也就是说，FCM 算法对初始值敏感，有时得不到理想的结果，这种情况多发生于数据集中各类样本数目相差较大时进行分类。而且在目标函数 $J_m(U,\omega)$ 中只考虑了每个数据点到各聚类中心的距离，却没有考虑聚类中心之间的影响，这样容易造成分类准确率下降。针对以上问题，本文提出一种改进的 FCM 算法，变随机设置为有目的地选择初始聚类中心，并将目标函数添加了聚类中心分离度一项，以保证获得的聚类结果为全局最优解。

3 改进的模糊 C 均值算法原理

3.1 初始聚类中心的选择

本文中初始聚类中心的选择的原则是，尽量使各类初始聚类中心之间的距离大于所设定的阈值，这样在接下来的聚类算法中就可以在多个可行性域内对聚类中心进行求取，避免了 FCM 随机求取初始聚类中心时容易使算法收敛到局部极小的情况，变随机设置初始值为满足设定条件的有目的地选择初始聚类中心。

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为被分类样本集合，设定类间的最小距离阈值为 α，聚类中心选择的步骤为：

step1　计算任意两个样本间的距离，并生成距离矩阵 D，将距离最近的两个样本定为一类，并取两个样本的中点作为第一类聚类中心；

step2　选定距离阈值 α，利用距离矩阵 D 计算与第一类中的两样本的距离都大于 α 的所有样本，并在这些样本中选择距离最近的两个点定为一类，取两个样本的中点作为第二类聚类中心；

step3　同理，在剩下的样本中找到与已经找到的样本的距离都大于 α 的样本，并选择这些样本中的距离最短的两个点定为一类，并取两个样本的中点作为其聚类中心；

step4　重复步骤 3，直到找到 C 类为止。

图 1 为二维数据初始聚类中心选择的过程，要求将下列数据分为两类。首先求取距离最近的两个样本，然后再选择那些和所选样本之间距离大于距离阈值 α 的样本点，并取这些点中距离最近的一对作为第二类初始的聚类中心。可以看

出通过调整距离阈值 α 使聚类中心的求取跳出原有的可行性域，实现在多个可行性域上进行初始聚类中心的求取，进而可以避免局部收敛的缺点。

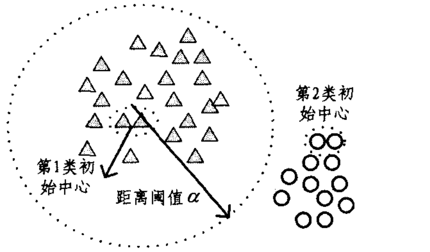

图 1　初始聚类中心选择示例

当选定了距离最近且距离在阈值 α 之内的一对样本作为一类后，本文采用搜索距离矩阵 D 的方法来判断样本点和所确定的样本点的距离是否大于阈值 α，即在所确定类别的可行域以外找出其他的可行域，而没有使用聚类中心到各样本点的距离进行判断，这样做避免了大量的欧氏距离的计算，会存在一定误差，考虑到这一部分算法在本文的整个方法中的作用就是有目的地选择初始聚类中心，精确的聚类可由接下来的步骤来完成，这样的误差是允许的。值得注意的是如果样本点中不存在距离在阈值 α 之内的一对样本时，需要减小 α 的取值。

3.2　改进的目标函数

FCM 聚类过程是基于目标函数方法来寻找最优分类的，如前面所述目标函数表示各类数据到相应聚类中心的加权距离平方和，而没有考虑到各聚类中心之间的影响[12,13]，本文提出了一种目标函数，综合考虑数据点到各聚类中心的距离和各聚类中心之间距离对聚类结果的影响。这样可以在保证每一类数据的紧密性的同时确保了不同类之间的分离度，可以较好地避免所求取的聚类结果为局部最优解的情况。新的目标函数为：

$$\overline{J_m}(U,\omega,\eta) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{c}(\mu_{ij})^m d_{ij}^{\,2}(x_j,\omega_i) - \frac{1}{c(c-1)}\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{c}(\eta_{ik})^m d_{ik}^{\,2}(\omega_i,\omega_k) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{c}(\mu_{ij})=1,\ \forall j\\ \mu_{ij}\in[0,1],\ \forall i,j,\\ \sum_{j=1}^{n}(\mu_{ij})>0,\ \forall i\end{cases}$$

其中，$\eta_{ik}=\beta\dfrac{\min\{\underset{\forall j\neq i}{d_{ij}(\omega_i,\omega_j)},\underset{\forall m\neq k}{d_{km}(\omega_k,\omega_m)}\}}{\underset{\forall m,n\in c}{\max}\{d_{mn}(\omega_m,\omega_n)\}}\quad 0\leqslant\beta\leqslant 1$

改进的目标函数比 FCM 的目标函数多了一项，增加的一项可以看作是一种罚函数，它描述了各聚类中心在聚类过程中的影响。当 $\beta=0$ 时，改进的目标函数退化为 FCM 的目标函数。优化过程的目的是使每个数据点到各聚类中心的加权距离平方和最小，同时使各聚类中心之间的权重距离平方和最大。

应用 Lagrange 乘数法求解 $\overline{J_m}(U,\omega,\eta)$ 在隶属度函数约束下的优化问题，通过对隶属度和聚类中心求偏微分并使得到的等式为零，可得到隶属度和聚类中心的更新公式为：

$$\frac{\partial\overline{J_m}}{\partial\omega_i}=0\Rightarrow\omega_i=\frac{\sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m x_k-\frac{1}{c(c-1)}\sum_{j=1}^{c}(\eta_{ij})^m\omega_j}{\sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m-\frac{1}{c(c-1)}\sum_{j=1}^{c}(\eta_{ij})^m} \tag{2}$$

由于 $\sum_{i=1}^{c}(\mu_{ij})=1,\forall j$，当 $\dfrac{\partial[\overline{J_m}+\lambda(\sum_{i=1}^{c}\mu_{ij}-1)]}{\partial\mu_{ij}}=0\Rightarrow$

$$\mu_{ij}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{c}\left[\frac{d_{ij}^{\,2}(x_j,\omega_i)}{d_{ij}^{\,2}(x_j,\omega_k)}\right]^{1/(m-1)}} \tag{3}$$

3.3　改进模糊 C 均值算法步骤

本文所提出的聚类算法分两个阶段：在算法的第一阶段，采用最小距离原则的方法对样本进行比较粗的初始聚类中心的选取；第二阶段，以第一阶段所得的类中心作为初始聚类中心，执行改进的 FCM 算法。

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为被分类样本集合，所提出的 FCM 算法的步骤为：

Step1　设定类间的最小距离阈值为 $\alpha>0$，计算任意两个样本间的距离，并生成距离矩阵 D，将距离最近的两个样本定为一类，并取两个样本的中点作为第一类聚类中心；

Step2　利用距离矩阵 D 计算与第一类中的两样本的距离都大于 α 的所有样本，并在这些样本中选择距离最近的两个点定为一类，取两个样本的中点作为第二类聚类中心；

Step3　同理，在剩下的样本中找到与已经找到的样本的距离都大于 α 的样本，并选择这些样本中的距离最短的两个点定为一类，并取两个样本的中点作为其聚类中心；

Step4　重复步骤 3，直到找到 C 类聚类中心 $\omega_i(k)$，$i=1,2,\cdots,C$ 为止；

Step5　置迭代次数 $k=1$，以 Step4 的结果作为初始聚类中心 $\omega_i(k)$，$i=1,2,\cdots,C$；

Step6　根据 $\omega_i(k)$ 按式(3)计算隶属度 $\mu_{ij}(k)$，$i=1,\cdots,c$，$j=1,\cdots,N$；

Step7　根据 $\mu_{ij}(k)$ 按式(2) 修正所有的聚类中心 $\omega_i(k+1)$，$i=1,\cdots,c$；

Step8　计算误差 $e=\sum_{i=1}^{c}\|\omega_i(k+1)-\omega_i(k)\|^2$，如果 $e<\xi$，算法结束，按 Step6 输出聚类结果；否则 $k=k+1$，转 Step6；

Step 9　样本归类，算法结束后，可按下列方法将所有样本归类：$d_{ij}^{\,2}(x_j,\omega_i)<d_{ij}^{\,2}(x_j,\omega_k)$，$k=1,2,\cdots,C$，$k\neq i$，则将 x_j 归入第 i 类。

4　试验结果

分别对 3 组正态分布型数据样本进行仿真实验，分别用 FCM 算法和本文改进的算法对数据集样本进行聚类，聚类如图 2 所示，并标注出各自的聚类中心。可以看出应用 FCM 没有将数据正确分类，而所提出的聚类算法对数据的分类是正确的，这并不是偶然现象。表 1 为 20 次试验的结果。

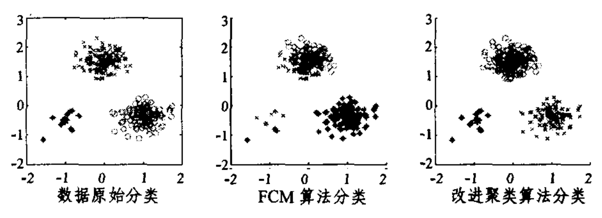

图 2　数据集聚类图

表 1　聚类试验结果

仿真序列	采用方法	分类是否正确	迭代次数	MSE 值

1	FCM算法	否	46	0.345434
	本文的FCM算法	是	11	0.091434
2	FCM算法	是	18	0.060578
	本文的FCM算法	是	13	0.109996
3	FCM算法	否	25	0.398679
	本文的FCM算法	是	15	0.174943
4	FCM算法	否	19	0.43618
	本文的FCM算法	是	16	0.2973
5	FCM算法	是	18	0.165696
	本文的FCM算法	是	12	0.119673
6	FCM算法	是	48	0.129645
	本文的FCM算法	是	12	0.096729
7	FCM算法	是	28	0.165567
	本文的FCM算法	是	14	0.128063
8	FCM算法	否	42	0.362489
	本文的FCM算法	是	12	0.106727
9	FCM算法	否	24	0.394597
	本文的FCM算法	是	12	0.244384
10	FCM算法	否	28	0.425329
	本文的FCM算法	是	11	0.098775
11	FCM算法	否	27	0.419897
	本文的FCM算法	是	13	0.147179
12	FCM算法	是	18	0.185628
	本文的FCM算法	是	15	0.137559
13	FCM算法	否	33	0.370963
	本文的FCM算法	是	14	0.262661
14	FCM算法	否	33	0.635626
	本文的FCM算法	是	17	0.134647
15	FCM算法	是	16	0.154437
	本文的FCM算法	是	11	0.114687
16	FCM算法	否	80	0.372068
	本文的FCM算法	是	16	0.139304
17	FCM算法	否	30	0.403245
	本文的FCM算法	是	14	0.092422
18	FCM算法	是	27	0.203187
	本文的FCM算法	是	11	0.160997
19	FCM算法	是	25	0.090149
	本文的FCM算法	是	11	0.101655
20	FCM算法	否	55	0.387513
	本文的FCM算法	是	10	0.164109

其中，聚类中心的均方差计算公式为 $MSE=\sqrt{\sum_{i=1}^{c}\|\overline{\omega_i}-\omega_i\|^2}$，其中$\overline{\omega_i}$为真实的聚类中心，$\omega_i$ 为所计算的聚类中心。实验结果表明，采用标准的FCM算法，有些时候不能找到得到正确的分类数据子集，从而陷入局部极小；而本文的FCM算法能够保证每次收敛的结果都是正确一致的，并且，当样本的可分性较好时，本文FCM算法可以大大减少迭代次数，节省运算时间。

结束语 本文通过简洁快速的初始聚类中心选取规则，变随机选取初始聚类中心为有目的地确定FCM算法的聚类中心，解决了FCM算法对初始值敏感且易陷入局部最优解的问题；并且在目标函数中考虑了各聚类中心之间的影响，这样在保证每一类数据的紧密性的同时可以确保不同类之间的分离度，还可以较好地避免所求取的聚类结果为局部最优解。仿真结果证明了此FCM算法的有效性和优越性。

参考文献

[1] Bezdek J C. Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms[M]. Plenum Press, NewYork, 1981

[2] Duda R, Hart P, Stork D. Pattern Classification (2 nd Edition) [M]. New York, USA: John Wiley& Sons, 2001

[3] Rose K, Gurewitz E, Fox GC. Constrained clustering as optimization method[J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1993, 15(8): 785-794

[4] Krishnapuram R, Keller J M. A possibilistic approach to clustering[J]. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 1993, 1(2): 98-110

[5] Timm H, Kruse R. A modification to improve possibilistic fuzzy cluster analysis[C]// Proc. of the 2002 IEEE Int'l Conf. on Fuzzy Systems, (2). Honululu: IEEE, 2002: 1460-1465

[6] Timm H, Borgelt C, Dorring C, et al. Fuzzy cluster analysis with cluster repulsion[C]// Proc. of the Eruopean Symp. On Intelligent Technologies, Tenerife. 2001. CD-ROM

[7] Ozdemir D, Akarun L. Fuzzy algorithms for combined quantization and dithering[J]. IEEE Trans. Image Processing, 2001, 10(6): 923-931

[8] Wu Kuo-Lung, Yu Jian, Yang Miin-Shen. A novel fuzzy clustering algorithm based on a fuzzy scatter matrix with optimality tests[J]. Pattern Recognition Letters, 2005(26): 639-652

[9] 王涛，沈谦，冯焕清. 一种改进的模糊聚类算法[J]. 电路与系统学报，1999，4(1)：64-69

[10] 张新波. 两阶段模糊C-均值聚类算法[J]. 电路与系统学报，2005，10(2)：117-121

[11] 张敏，于剑. 基于划分的模糊聚类算法[J]. 软件学报，2004，15(6)：859-868

[12] Yin Zhonghang, Tang Yuangang, Sun Fuchun, et al. Fuzzy Clustering with Novel Separable Criterion[J]. Tsinghua Science and Technology, 2006, 11(1): 50-53

[13] Berget I, Mevik B-H, Nas T. New modifications and applications of fuzzy C-means Methodology[J]. Computational statistics & data analysis, 2008(52): 2403-2418

（上接第198页）

参考文献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96

[3] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982(11): 341-356

[4] Vauhgan P. Chu spaces as a semantic bridge between linear logic and mathematics [J]. Theoretical Computer Science, 2003, 294(3): 439-471

[5] 雷英杰，王宝树. 直觉模糊逻辑的语义算子研究[J]. 计算机科学，2004，31(11)：4-6

[6] 王艳平，盖如栋. 直觉模糊逻辑算子的研究[J]. 辽宁工程技术大学学报：自然科学版，2002，21(3)：395-397

[7] 刘新. 直觉模糊时态逻辑算子及其性质[J]. 吉林师范大学学报：自然科学版，2003，24(2)：37-38，54

[8] 史开泉，崔玉泉. S-粗集和它的一般结构[J]. 山东大学学报：理学版，2002，37(6)：471-474

[9] 史开泉，崔玉泉. S-粗集与粗决策[M]. 北京：科学出版社，2006

[10] 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法. 北京：科学出版社，2001