

# 基于预测的纯量场数据压缩技术研究

吴国清<sup>1</sup> 陈虹<sup>2</sup>

(中国工程物理研究院研究生部 北京 100088)<sup>1</sup>

(北京应用物理与计算数学研究所高性能计算中心 北京 100088)<sup>2</sup>

**摘要** 大规模数值模拟产生了海量数据,对数据存储空间和 I/O 带宽都形成了挑战。针对纯量场数据,研究了外插与内插预测算子,分析了两种预测算子的优缺点,并提出了基于外插预测的纯量场无损压缩方法以及基于内插预测的纯量场有损压缩方法。提出的压缩方法的突出优点是内存开销比较小,适合于大规模的纯量场数据的压缩。使用光滑数学模型数据和真实物理模拟数据进行的测试实验表明,提出的基于预测的纯量场压缩方法取得了良好效果。

**关键词** 数据压缩,预测编码,纯量场

## Predictor Based Fast and Efficient Compression of Scalar Fields

WU Guo-qing<sup>1</sup> CHEN Hong<sup>2</sup>

(Graduate Department of China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088, China)<sup>1</sup>

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)<sup>2</sup>

**Abstract** Data sets from scientific simulation are growing in size at an ever-increasing pace. We presented a comparative analysis of extrapolating and interpolating predictors. Then we proposed two simple methods for lossless or lossy compressing large and regularly sampled scalar fields. Our method is particularly attractive for its small usage of memory and suitable for extremely large data sets. Experiments using smooth mathematical model data and true plasma physics simulation data indicate that our method performs well and encouraging.

**Keywords** Data compression, Predictive coding, Scalar fields

## 1 引言

技术的进步使得科学家以前所未有的步伐从数值模拟、实验或观测中获取数据,其数据规模很容易突破 GB 量级,对用户来说,分配给他的磁盘空间似乎永远不够。例如,强激光与等离子体相互作用三维数值模拟,目前可以模拟的规模达到  $10^8$  个网格和  $10^9$  亿个粒子,单时间步、单物理量的数据量就可达到 24GB,而为了得到一个真实的三维模拟过程,往往需要上百甚至上千个时间步的数据,整个数据量规模已达 TB 级。在每个时间步中都包含了纯量场与向量场数据,存储或者传输这些数据的时间开销都非常大。尽管我们可以使用很多传统的无损数据压缩算法减少数据存储或传输的时间开销,但是这些传统的压缩算法所考虑的对象通常是图像、文本、视频等,没有考虑科学数据的特点,压缩效果往往不尽如人意。本文中,我们针对纯量场数据研究了基于预测的压缩方法。所谓纯量场就是在空间中的一个区域内的每一个点  $(x, y, z)$  均对应到  $f(x, y, z)$ ,则  $f(x, y, z)$  称为一个纯量场 (scalar field),它在科学数据中非常普遍。

近年来出现了多种压缩科学数据的方法,主要包括基于离散小波变换、离散傅立叶变换和变长编码的方法。Fowler 等人提出了基于外插预测的压缩方法<sup>[1]</sup>,他们使用最近访问

到的 3 个值预测当前值,并对使用的 3 个值计算了优化权重。Lawrence 等人针对  $n$  维纯量场数据提出了基于 Lorenzo 外插预测算子的压缩方法<sup>[2]</sup>,Lorenzo 预测使用了更多的点,效果也更好,它对于光滑的多项式数据具有最高的预测精度,该方法在  $L_\infty$  意义下压缩效果超过了基于小波变换的压缩方法,并且对内存的使用开销也比较小。Vadim 等人提出了基于整型数差分的科学数据压缩方法<sup>[3]</sup>,其主要思想是首先将浮点数通过内存拷贝转换成整型数,然后用高阶差分代替原数据,然后再进行熵编码。Chiueh 等人<sup>[4]</sup>提出了将体数据分成多个子块,分别对子块进行傅立叶变换,然后编码变换后的结果。此外,今年也提出了 3D 流网格的简化与压缩方法、三维体数据的国际压缩标准 JP3D<sup>[6]</sup>等等。

本文针对离散结构网格数据,研究了基于预测的纯量场数据压缩方法。我们分析比较了外插与内插预测算子的优缺点,使用外插预测实现了无损压缩,使用内插预测实现了有损压缩,在本文的数值实验中,我们使用数学模型数据和 Lared\_P 数据进行了测试,取得了比较好的数据压缩效果。

本文第 2 节首先介绍预测编码的基本原理,接着介绍了外插预测算子,然后与之对比介绍了一种内插预测算子;第 3 节介绍如何利用外插预测实现纯量场的无损压缩;第 4 节介绍如何利用内插预测实现纯量场的有损压缩;第 5 节进行测试实

到稿日期:2008-07-29 返修日期:2008-10-17

吴国清 博士研究生,研究方向为科学数据挖掘与科学数据压缩,E-mail:wu.guoqing@gmail.com;陈虹 女,研究员,研究方向为科学数据管理与信息安全。

验,基于实验结果对算法的优缺点进行分析;最后总结全文。

## 2 预测算子

预测编码的原理是利用网格点 $(i, j)$ 邻域的若干网格点计算标量值 $u_{i,j}$ 的预测值 $p_{i,j}$ ,并对预测误差 $e_{i,j} = u_{i,j} - p_{i,j}$ 进行熵编码。如果预测算子设计合理,那么预测误差就较小,可以用较少的码位进行编码,从而达到数据压缩的目的。在数据解压缩阶段,先进行熵解码,然后进行反预测,得到原始值,流程框图如图1所示。在科学计算中,函数及物理量通常是有连续性的,相邻网格点的数据之间有很强的相关性,因此,基于预测的压缩方法可以取得较好的效果。下面,我们以二维离散结构网格数据为例,讨论外插与内插预测算子。

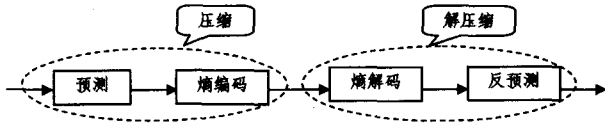


图1 预测编码流程框图

### 2.1 外插预测

本节,我们以二维情形为例,介绍Lorenzo<sup>[2]</sup>外插预测算子 $L^1, L^2$ 。这族预测算子是通过高阶混合偏导项为零而生成的。

考察一维离散网格点 $\{\dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots\}$ ,定义差分算子 $\Delta^x: \Delta^x u_i = u_i - u_{i-1}$ 。 $\Delta^x$ 即为 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的逼近值。令 $\Delta^x = 0$ ,就得到网格点 $u_i$ 的一维Lorenzo预测算子: $L^1_{i,j} = u_{i-1}$ 。类似地,Lorenzo预测算子可以扩展到二维情形:

$$\Delta^x_{i,j} = \Delta^x_{i,j} - \Delta^x_{i,j-1} = u_{i-1,j-1} - u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + u_{i,j} \quad (1)$$

$\Delta^{xy}$ 即为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 的逼近值。令 $\Delta^x_{i,j} = 0$ ,就得到网格点 $u_{i,j}$ 的二维Lorenzo预测算子:

$$L^1_{i,j} = u_{i,j-1} + u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1} \quad (2)$$

从上可以看出,我们可以利用预测算子 $L^1$ 较好地预测具有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ 性质的连续函数。

预测算子 $L^1$ 最高预测精度为2阶,利用了 $(i, j)$ 邻域3个网格点的值。我们可以利用更多个点的值进行预测,达到更高精度。类似 $L^1$ 的推导过程,我们有:

$$\Delta^x_{i,j} = \Delta^x_{i,j} - \Delta^x_{i,j-1} - \Delta^x_{i,j+1} + \Delta^x_{i,j-1} + \Delta^x_{i,j+1} = 2u_{i,j-1} + 2u_{i-1,j} + 2u_{i+1,j} + 2u_{i,j+1} - 4u_{i,j} - u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j+1} \quad (3)$$

令 $\Delta^x_{i,j} = 0$ ,求解 $u_{i+1,j+1}$ ,即得bi-Lorenzian预测算子

$$L^2_{i+1,j+1} = 2u_{i,j-1} + 2u_{i-1,j} + 2u_{i+1,j} + 2u_{i,j+1} - 4u_{i,j} - u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} \quad (4)$$

预测算子 $L^2$ 最高预测精度为4阶,可以较好地预测具有 $\frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 y} = 0$ 性质的连续函数。不同于 $L^1$ 利用了3个网格点进行预测, $L^2$ 利用了8个点进行预测,各网格点的预测权重如图2所示,其中,?表示待预测网格点。对于三维情形<sup>[2]</sup>,我们可以用类似方法得到。

	1	?
	-1	1

(a)  $L^1$

-1	2	?
2	-4	2
-1	2	-1

(b)  $L^2$

图2 Lorenzo与bi-Lorenzian预测算子的各网格点预测权重

在数据压缩阶段进行网格点的预测过程时,利用相邻网格点计算预测值及预测误差,在数据解压缩阶段进行反预测过程时,利用预测误差反演真实值。外插预测算子仅利用了之前处理过的网格点,是一种显式格式,可以用其实现流压缩,避免将整个纯量场预先读入内存,当纯量场的数据量超过内存大小时,这一点具有重要意义。

### 2.2 内插预测

我们在文献[7]中利用泰勒公式构造了二维9点与三维27点的内插预测算子 $R$ 。事实上,我们还可以利用在式(3)中令 $\Delta^{xy} = 0$ ,然后求解 $u_{i,j}$ 的办法得到,即:

$$R_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - \frac{1}{4}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j+1}) \quad (5)$$

虽然二维9点内插预测算子 $R$ 与预测算子 $L^2$ 都具有4阶预测精度,但是由于内插预测算子 $R$ 使用的周围八个网格点具有对称性,如图3所示,因此,事实上,内插预测的效果要好于外插预测。

-0.25	0.5	-0.25
0.5	?	0.5
-0.25	0.5	-0.25

图3 内插预测算子 $R$ 的各网格点预测权重

内插预测算子的预测过程与外插预测算子类似,都比较简单快速。但是,由于内插预测是一种隐格式,在进行反预测过程时,需要利用未知的网格点数据,因此变得比较困难。我们在文献[7]给出的办法是利用Krylov子空间迭代法求解线性方程组进行反预测,导致反预测的时间开销非常大,影响其实际应用价值。因此,本文中,我们提出将内插预测算子 $R$ 进行分裂,分裂为 $x$ 方向与 $y$ 方向,分别进行处理,如图4所示。

0.5	?	0.5

(a)

0.5		
?		
0.5		

(b)

图4 (a) $x$ 方向与(b) $y$ 方向各网格点预测权重

假设二维结构网格点 $u$ 的规模为 $N = n \times n$ ,我们可以将预测过程描述如下:

1)对每一行 $u_i = (u_{i,0}, u_{i,1}, \dots, u_{i,n-1})$ 进行预测过程,即 $p_i = Au_i$ 。其中, $p_i = (p_{i,0}, p_{i,1}, \dots, p_{i,n-1}) \in R^n$ 为原始数据 $u$ 第 $i$ 行的预测值,矩阵 $A \in R^{n \times n}$ ,具体有如下结构:

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & 0.5 & 0 & 0.5 \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \end{bmatrix}_{n \times n}$$

2)对步骤1得到的预测矩阵 $p = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})^T$ 的每一列 $p_j = (p_{0,j}, p_{1,j}, \dots, p_{n-1,j})$ 进行预测过程,即 $e_j = A'p_j$ 。其中, $e_j = (e_{0,j}, e_{1,j}, \dots, e_{n-1,j})$ 为预测误差:

$$A' = \begin{bmatrix} \cdot & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & 0.5 & -1 & 0.5 \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \end{bmatrix}_{n \times n}$$

这样我们就得到原始数据  $u$  的预测误差  $e$ 。

反预测过程是预测过程的逆过程,我们可以将反预测过程描述如下:

1) 对预测误差矩阵  $e$  的每一列,利用追赶法求解线性方程组  $e_j = A^T p_j$ , 得到矩阵  $p$ ;

2) 对矩阵  $p$  的每一行,利用追赶法求解线性方程组  $p_i = A u_i$ , 即得到原始数据  $u$ 。

我们可以看到,将内插预测算子分裂为  $x$  方向与  $y$  方向分别进行预测过程,预测过程可以写成矩阵向量乘的形式。在反预测过程中,由于矩阵  $A$  为三对角矩阵,我们可以利用直接法(追赶法<sup>[11]</sup>)快速求解原始数据  $u$ ,从而避免文献[7]中迭代法所引起的大量时间开销。对于三维离散网格情形,可以类似地,在  $x, y, z$  三个方向上分别进行预测,而反预测过程同样为预测过程的逆过程。此外,由于我们每次仅需要把一行或一列数据调入内存进行处理,内存开销比外插预测方法更小。

### 3 基于外插预测实现无损压缩

大规模数值模拟产生的纯量场数据通常为浮点数。IEEE754 标准中给出了浮点数在内存中的存储方式,以 64 位双精度浮点数为例,  $value = (-1)^s \times 2^{E-1023} \times (1.M)$ , 其中, 1 比特的  $s$  为符号位, 11 比特的  $E$  为指数部分, 52 比特的  $M$  为尾数部分。由于浮点数在内存中进行运算会产生溢出和截断,因此,我们要实现无损压缩,首先通过内存拷贝的方法<sup>[7]</sup>将原始数据浮点数  $u$  转化为整型数  $\tilde{u}$ , 然后利用外插预测得到  $\tilde{u}$  的预测值  $\tilde{p}$ , 通过  $\tilde{e} = \tilde{u} - \tilde{p}$  得到预测误差  $\tilde{e}$ , 替换原始数据  $u$  进行熵编码,从而达到无损压缩的目的,解压缩过程为上述过程的逆过程。使用外插预测算子  $L^1, L^2$  实现无损压缩的原因是其网格点的预测权重为整数,在计算预测误差  $\tilde{e}$  的过程中仅需要进行整数加法与减法运算,而内插预测算子  $R$  中的网格点预测权重为浮点数,需要进行浮点数运算,因此,内插预测算子不适合无损压缩。

### 4 基于内插预测实现有损压缩

内插预测相对于外插预测的预测精度更好,在不要求无损压缩的应用中,使用内插预测实现有损压缩会有更好的压缩效果。压缩解压缩过程与基于外插预测实现无损压缩过程类似,不同点是有损压缩不需要将浮点数转化为整型数,而是直接通过预测算子计算预测误差,对预测误差进行熵编码。在对精度要求不高的前提下,在进行熵编码之前,还可以对预测误差进行量化,以进一步提高压缩比。

## 5 测试实验

我们使用了数学模型数据和物理数值模拟数据进行测试实验,比较其压缩比及压缩/解压缩时间开销,其中熵编码部分,我们使用 deflate 算法。

### 5.1 算例 1

数学模型测试数据:在三维长方体区域  $\Omega(x, y, z) = [0, 5] \times [0, 4] \times [0, 1]$  上计算函数  $f(x, y, z) = 2^x + y^3 + e^{-z}$  离散值。将计算区域均匀剖分成  $200 \times 200 \times 200$  个网格,依次编号为  $(i, j, k); i=1, 2, \dots, 200; j=1, 2, \dots, 200; k=1, 2, \dots, 200$  在网格点上的函数值为:  $f_{i,j,k} = f(x_i, y_j, z_k)$ , 所有  $f_{i,j,k}$  构成函数  $f(x, y, z)$  在计算区域  $\Omega(x, y, z)$  的离散解,如图 5 所示。以 64 位双精度二进制存储离散解,得到的原文件大小为

64005184(Byte)。

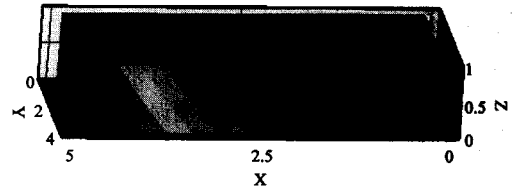


图 5 数学模型测试数据

我们使用上述数学模型测试数据来测试比较基于外插预测的无损压缩方法与几种常用无损压缩算法(gzip, bzip2, lzo)的压缩效果。

表 1 对数学模型测试数据进行无损压缩的效果对比

压缩算法	压缩时间(s)	压缩文件(Byte)	压缩比	解压缩时间(s)
$L^1$	5.91	1523932	41.9	7.61
gzip	14.78	52620338	1.2	4.18
bzip2	27.20	37650109	1.7	5.22
lzo	23.54	55652816	1.14	4.73

从测试结果可以看到,基于外插预测的无损压缩方法得到的压缩比远高于通用无损压缩算法,同时压缩时间也大大减少,而解压缩时间略有增加。此外,我们还分析,虽然基于  $L^1$  的无损压缩方法需要花费一定的时间开销进行预测过程,但是对预测误差的熵编码效率却大大提高,导致总的的时间开销大大减少。几种通用无损压缩算法压缩纯量场数据的压缩效果均很不理想,这也说明了研究适合于纯量场数据特征的压缩方法的重要性。

### 5.2 算例 2

下面,以数值模拟程序 Lared\_P(激光与等离子体相互作用模拟程序)计算的电场强度物理量第 1100 个时间步的数据为例,如图 6 所示,其计算网格规模为  $72 \times 96 \times 72$ 。

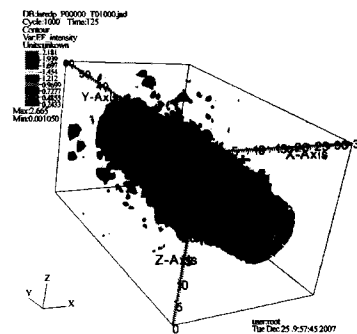


图 6 激光入射等离子体区域数值模拟

我们使用基于内插预测算子  $R$  的有损压缩方法压缩电场强度纯量场数据,为了说明内插预测算子的预测效果,把内插预测算子  $R$  替换为外插预测  $L^2$ ,比较使用两种预测算子的压缩效果,如图 7 所示。

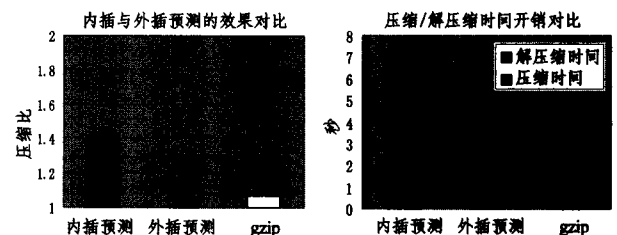


图 7 内插预测算子  $R$  与外插预测算子  $L^2$  的压缩效果

(下转第 184 页)

果比较接近人类的直观认识,更加符合特定领域的语义匹配。

**结束语** 本文提出了一种用于服务匹配中的本体概念之间语义相似度的计算方法,在概念相似度量上,不但考虑了概念之间的继承关系和概念在本体中所处深度对相似度的影响,也考虑概念客观发生的统计信息。实验表明,本文的方法比较符合人类的直观认识,得到了概念间有价值的语义相似度。

在语义服务匹配中,本方法只是考虑了影响语义相似度的几个比较重要的因素,随着语义 Web 和本体驱动的信息系统研究和应用的推广,会有更多的、更复杂的语义结构信息可以利用,如本体中的实例及属性关系对概念语义相似度的影响等,如何构建考虑更多因素的语义相似度量方法是我们下一步的工作重点。

### 参考文献

- [1] Giunchiglia F, Yatskevich M, Shvaiko P. Semantic Matching: Algorithms and Implementation[M]. Journal on Data Semantics IX, Springer Berlin / Heidelberg, 2007; 1-38
- [2] Burstein M, Hobbs J, Lassila O, et al. OWL-S: Semantic Markup for Web Services[OL]. <http://www.daml.org/services/owl-s/1.1/overview>, 2004
- [3] Budanitsky A, Hirst G. Evaluating wordnet-based measures of lexical semantic relatedness [J]. Computational Linguistics, 2006, 32(1): 13-47
- [4] Pease A. Standard Upper Ontology Knowledge Interchange Format[OL]. <http://suo.ieee.org/>, 2000
- [5] Gruber TR. A Translation Approach to Portable Ontology Specifications[J]. Knowledge Acquisition, 1993, 5(2): 199-220
- [6] Cohen W, Ravikummar P, Fienberg S. A comparison of string metrics for matching names and records[C]// Proceeding of KDD Workshop on Data Cleaning and Object Consolidation. 2003; 73-78
- [7] Maynard DG, Ananiadou S. Term extraction using a similarity-based approach[A]// Bourigault D, Jacquemin C, L'Homme

MC, eds. Recent Advances in Computational Terminology[C]. John Benjamins, 1999; 261-278

- [8] Cerbah F, Euzenat J. Traceability between models and texts through terminology[J]. Data and Knowledge Engineering, 2001, 38(1): 31-43
- [9] Tversky A. Feature of similarity[J]. Psychological Review, 1977, 84 (4): 327-352
- [10] 吴健, 吴朝晖, 李莹, 等. 基于本体论和词汇语义相似度的 Web 服务发现[J]. 计算机学报, 2005, 28(4): 2054-2062
- [11] Rada R, Mili H, Bicknell E, et al. Development and application of a metric on semantic nets[J]. IEEE Transaction on System, Man, and Cybernetics, 1989, 19(1): 17-30
- [12] Giunchiglia F, Shvaiko P, Yatskevich M. Discovering missing background knowledge in ontology matching[C]// Proceedings of 16th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI). 2006; 382-386
- [13] Jiang J, Conrath D. Semantic similarity based on corpus statistics and lexical taxonomy[C]// Proceedings of the International Conference on Research in Computational Linguistics. 1997; 19-33
- [14] 杨立, 左春, 王裕国. 基于语义距离的 K-最近邻分类方法[J]. 软件学报, 2005, 16(12): 2054-2062
- [15] 梁敏, 郭新涛, 阮备军, 等. X-Dist——一个柔性语义距离函数[J]. 计算机研究与发展, 2004, 41(10): 1728-1736
- [16] Giunchiglia F, Shvaiko P, Yatskevich M. S-Match: an algorithm and an implementation of semantic matching[C]// Proceedings of 1st European Semantic Web Symposium (ESWS). 2004; 61-75
- [17] Lesk M. Automatic sense disambiguation using machine readable dictionaries: how to tell a pine cone from an ice cream cone [C]// Proceedings of 5th Annual International Conference on Systems Documentation (SIGDOC). 1986; 24-26
- [18] Madche A, Zacharias V. Clustering ontology-based metadata in the semantic web[C]// Proceedings of 6th European Conference on Principles and Practice of Knowledge Discovery in Databases (PKDD). 2002; 348-360

(上接第 180 页)

从测试结果可以看出,对于激光与等离子体相互作用模拟的电场强度物理量使用 gzip 无损压缩的压缩比仅为 1.07, 小的压缩比使得无损压缩变得没有意义。使用内插预测算子 R 的有损压缩可以取得比较理想的压缩比,而且比使用外插预测算子  $L^2$  的压缩比提高约 17%,同时压缩时间开销减少,解压缩时间开销增加,总的时间开销没有明显增加。

**结束语** 我们研究比较了内插预测与外插预测算子,改进了内插预测算子的反预测时间开销比较大的问题,使用外插预测实现了纯量场数据的无损压缩,使用内插预测实现了纯量场数据的有损压缩。本文提出的压缩方法的突出优点是内存开销比较小,适合于大规模数值模拟产生的纯量场数据的压缩。使用光滑的数学模拟测试数据和真实的物理模拟数据进行的测试实验表明,本文方法取得了比较好的效果,具有较高的应用价值。

### 参考文献

- [1] Fowler J, Yagel R. Lossless compression of volume data[C]// Symposium on Volume Visualization. 1994; 43-50
- [2] Lawrence I, Peter L, Jarek R. Out-of-core compression and de-compression of large n-dimensional scalar fields[J]. EURO-

GRAPHICS, 2003, 22(2): 89-97

- [3] Vadim E, Dag F, Peter F. Lossless Compression of high volume data from simulation[A]// IEEE Computer Society[C]. 2000; 754-765
- [4] Chiueh T, Yang C, He T, et al. Integrate volume compression and visualization[C]// Visualization'97. 1997; 329-336
- [5] Aaron T, Robert M, John M. Wavelets applied to lossless compression and progressive transmission of float point data in 3D curvilinear data[M]. IEEE Computer Society Press, 1996; 385-388
- [6] Manuel N. Gamitoa and Miguel Salles Dias, Lossless Coding of Floating Point data with JPEG 2000 Part 10, 2004
- [7] 吴国清, 陈虹. 基于最优内插预测的科学数据压缩方法[J]. 计算机科学, 2007, 34(8): 15-17
- [8] 吴国清, 陈虹. 一种科学数据无损压缩方法[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(5): 172-175
- [9] Lawrence I, Peter L. Predictors for streaming compression of scalar fields[J]. EUROGRAPHICS, 2006, 25(3): 1077-1084
- [10] Peter L, Martin I. Fast and efficient compression of floating point data[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2006, 12(5): 869-875
- [11] 李庆扬, 关治, 白峰杉. 数值计算原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002; 185-191