

# 覆盖粗糙集的公理化

杨勇<sup>1</sup> 朱晓钟<sup>1</sup> 李廉<sup>2</sup>

(西北师范大学数学与信息科学学院 兰州 730070)<sup>1</sup> (合肥工业大学 合肥 230009)<sup>2</sup>

**摘要** 粗糙集的公理系统是粗糙集理论与应用的基础。覆盖粗糙集是粗糙集理论的自然有意义的推广。基于 Xu 等提出的新的覆盖粗糙集模型,研究了新模型的公理系统,用 4 条简洁且相互独立的公理刻画了覆盖粗糙集。这些研究有助于覆盖粗糙集理论研究的深入和完善。

**关键词** 粗糙集,覆盖粗糙集,公理

**中图分类号** TP18 **文献标识码** A

## Axiomatization of Covering Rough Sets

YANG Yong<sup>1</sup> ZHU Xiao-zhong<sup>1</sup> LI Lian<sup>2</sup>

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)<sup>1</sup>

(Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)<sup>2</sup>

**Abstract** Based on the new model of covering rough sets proposed by xu and zhang, the axiomatic system of covering rough sets on covering approximation space was studied, it consists of 4 axioms which are simple and independent. The research is helpful to covering rough set theory.

**Keywords** Rough sets, Covering rough sets, Axioms

### 1 引言

粗糙集理论是由波兰数学家 Pawlak 提出的一种新的处理模糊和不确定性知识的数学工具,其主要思想就是在保持分类能力不变的前提下,通过知识约简,导出问题的决策或分类规则。目前,粗糙集理论已被成功地应用于机器学习、决策分析、过程控制、模式识别与数据挖掘等领域<sup>[1]</sup>。上下近似是粗糙集理论的核心概念,它们满足许多性质<sup>[2]</sup>。同时,学者们考虑相反的问题,即用这些性质来刻画粗糙集。较早的结论是 Lin 和 Liu<sup>[3]</sup>提出的,它们是由 6 条公理组成的粗糙集公理组。尔后文献[4,5]对公理组的冗余性进行了深入研究,提出了几组粗糙集的公理组和极小公理组。

在粗糙集模型中,论域上的等价关系起着至关重要的作用。但在许多实际问题中,论域上的二元关系不是等价的,其应用受到极大限制。为此文献[6]将等价关系推广到覆盖关系,提出覆盖粗糙集模型。后来 William 等人<sup>[7]</sup>对该模型进行研究,提出了约简覆盖粗糙集及其下近似的公理化。但该覆盖模型不满足对偶原理,从而使得对覆盖上下近似性质研究遇到很多困难。最近 Xu 和 Zhang<sup>[8]</sup>提出了一种全新的覆盖粗糙集概念,其许多性质与 Pawlak 粗糙集性质相同。本文的主要工作是建立文献[8]中覆盖粗糙集的公理化系统,所作的讨论是针对覆盖下近似来进行的,提出覆盖近似空间中下近似的相互独立的公理体系,最后通过对偶原理,得到覆盖上下近似的公理体系。

### 2 基本知识

设  $U$  是非空有限论域,  $C$  是  $U$  的子集类,如果  $C$  中的元素非空且  $\cup C = U$ ,则  $C$  是  $U$  的一个覆盖,序对  $(U, C)$  称覆盖近似空间。

**定义 1** 设  $(U, C)$  为覆盖近似空间。对任意的  $x \in U$ , 集类

$$Md(x) = \{K \in C \mid x \in K \wedge (\forall S \in C \wedge x \in S \wedge S \subseteq K \Rightarrow K = S)\}$$

称元素  $x$  的最小描述。

**定义 2** 设  $(U, C)$  为覆盖近似空间。对任意的  $X \subseteq U$ , 集合

$$C_*(X) = \{x \in U \mid \cap Md(x) \subseteq X\},$$

$$C^*(X) = \{x \in U \mid (\cap Md(x)) \cap X \neq \emptyset\}$$

分别称为  $X$  在  $(U, C)$  中的覆盖下近似和覆盖上近似。

在定义 2 中,若覆盖是划分,则覆盖上下近似就退化为 Pawlak 上下近似。因此,覆盖粗糙集是 Pawlak 粗糙集的一种推广。

**定理 1** 设  $(U, C)$  为覆盖近似空间。对任意的  $X, Y \subseteq U$ , 覆盖上下近似满足:

$$(1L) C_*(\emptyset) = \emptyset, (1U) C^*(\emptyset) = \emptyset;$$

$$(2L) C_*(U) = U, (2U) C^*(U) = U;$$

$$(3L) C_*(X) \subseteq X, (3U) X \subseteq C^*(X);$$

$$(4L) C_*(X \cap Y) = C_*(X) \cap C_*(Y),$$

到稿日期:2008-06-18 本文受国家自然科学基金(10771171),甘肃省教育厅科研基金(0701-16),兰州市科技计划项目(2008-1-34)资助。

杨勇(1967-),男,博士,副教授,主要研究方向为粗糙集理论及其应用,E-mail:zt-yang@163.com;朱晓钟(1978-),男,硕士生,主要研究方向为粗糙集理论;李廉(1952-),男,博士生导师,教授,主要研究方向为代数逻辑。

- (4U)  $C^*(XUY) = C^*(X) \cup C^*(Y)$ ;
- (5L)  $X \subseteq Y \Rightarrow C^*(X) \subseteq C^*(Y)$ ;
- (5U)  $X \subseteq Y \Rightarrow C^*(X) \subseteq C^*(Y)$ ;
- (6L)  $C^*(C^*(X)) = C^*(X)$ ;
- (6U)  $C^*(C^*(X)) = C^*(X)$ ;
- (7)  $C^*(\sim X) = \sim C^*(X)$ ,  $C^*(\sim X) = \sim C^*(X)$ .

由此可知,这种覆盖粗糙集模型不同于文献[6]中的覆盖粗糙集模型,它满足 Pawlak 粗糙集的许多重要性质,但有些性质也不成立(如  $C^*(C^*(X)) = C^*(X)$ ,  $C^*(C^*(X)) = C^*(X)$ ). 因此研究新的覆盖粗糙集公理化体系有广泛的现实和理论意义.

### 3 新覆盖粗糙集的公理体系

定理 1 中的(7)表明覆盖上下近似之间可以相互定义,一旦下近似给定,上近似也就确定了. 因此我们的讨论仅针对下近似来进行.

定理 2 设  $U$  是非空有限论域,  $f: P(U) \rightarrow P(U)$  是一个映射. 若对任意的  $X, Y \subseteq U$ ,  $f$  满足:

- (1)  $f(U) = U$ ;
- (2)  $f(X) \subseteq X$ ;
- (3)  $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ ;
- (4)  $f(f(X)) = f(X)$ ;

则存在  $U$  的一个覆盖  $C$  使得  $f(X) = C^*(X)$ .

为证明上述定理,我们先引入下面的引理:

引理 1 在定理 2 中,若  $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ , 则  $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$ , 即映射是递增的.

证明:由  $X \subseteq Y$  得,  $f(X) = f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ , 因此  $f(X) \subseteq f(Y)$ .

定理 2 的证明:

设  $C = \{K \subseteq U \mid f(K) = K, K \neq \Phi\}$ , 则由(1)知  $C$  是  $U$  的覆盖,对任意的  $X \subseteq U$ ,  $C^*(X) = \{x \in U \mid \bigcap Md(x) \subseteq X\}$ .

$\forall x \in C^*(X)$ , 令  $Md(x) = \{K_1, K_2, \dots, K_m \mid K_i \in C\}$ , 有  $x \in \bigcap_{i=1}^m K_i$ , 又  $f(K_i) = K_i$ , 可知  $x \in \bigcap_{i=1}^m f(K_i)$ . 由  $\bigcap Md(x) \subseteq X$ , 引理 1 和(3)可得  $\bigcap_{i=1}^m f(K_i) = f(\bigcap_{i=1}^m K_i) = f(\bigcap Md(x)) \subseteq f(X)$ , 从而  $x \in f(X)$ , 即  $C^*(X) \subseteq f(X)$ .

另一方面,任取  $X \subseteq U$ , 由(4)知  $f(X) \in C$ . 若  $f(X) = \Phi$ , 则显然  $f(X) \subseteq C^*(X)$ . 否则  $\forall x \in f(X)$ , 有最小描述的定义知  $\bigcap Md(x) \subseteq f(X)$ , 又由(2)有  $f(X) \subseteq X$ , 于是得  $\bigcap Md(x) \subseteq X$ , 从而  $x \in C^*(X)$ , 即  $f(X) \subseteq C^*(X)$ .

综上有  $f(X) = C^*(X)$ .

定理 3 定理 2 给出的 4 条公理是相互独立的.

证明:设  $U = \{a, b, c\}$ .

对任意  $X \subseteq U$ , 令  $f(X) = \Phi$ , 经验证,此时  $f$  满足(2)、(3)和(4), 但不满足(1), 故  $\{(2), (3), (4)\} \not\Rightarrow (1)$ .

对任意  $X \subseteq U$ , 令  $f(X) = U$ , 经验证,此时  $f$  满足(1)、(3)和(4), 但不满足(2), 故  $\{(1), (3), (4)\} \not\Rightarrow (2)$ .

令  $f(U) = U, f(\{a, b\}) = f(\{b, c\}) = f(\{a, c\}) = f(\Phi) = \Phi, f(\{a\}) = \{a\}, f(\{b\}) = \{b\}, f(\{c\}) = \{c\}$ , 经验证,此时  $f$  满足(1)、(2)和(4), 而  $\{a\} = f(\{a\}) = f(\{a, b\} \cap \{a\}) \neq f(\{a, b\}) \cap f(\{a\}) = \Phi$  不满足(3), 故  $\{(1), (2), (4)\} \not\Rightarrow (3)$ .

令  $f(U) = U, f(\{a, b\}) = \{a\}, f(\{b, c\}) = \{b\}, f(\{a, c\}) = \{c\}, f(\{a\}) = f(\{b\}) = f(\{c\}) = f(\Phi) = \Phi$ , 经验证,此时  $f$  满足(1)、(2)和(3), 而  $\Phi = f(\{c\}) = f(f(\{a, c\})) \neq f(\{a, c\}) = \{c\}$ , 不满足(4), 故  $\{(1), (2), (3)\} \not\Rightarrow (4)$ .

综上所述,定理 2 中的 4 条公理是相互独立的.

基于覆盖粗糙集的对偶原理,覆盖上近似有下面的公理体系:

定理 4 设  $U$  是非空有限论域,  $f: P(U) \rightarrow P(U)$  是一个映射. 若对任意的  $X, Y \subseteq U$ ,  $f$  满足:

- (1)  $f(\Phi) = \Phi$ ;
- (2)  $X \subseteq f(X)$ ;
- (3)  $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ ;
- (4)  $f(f(X)) = f(X)$ ;

则存在  $U$  的一个覆盖  $C$  使得  $f(X) = C^*(X)$ , 且 4 个条件是相互独立的.

结束语 本文讨论了覆盖粗糙集的公理化和可靠性问题,给出了关于覆盖粗糙集的一组公理组,为覆盖粗糙集理论的完善提供了坚实的基础. 虽然新覆盖粗糙集与 Pawlak 粗糙集有许多相同的性质,但二者的公理系统却不完全相同,原因在于新覆盖粗糙集不满足性质  $C^*(C^*(X)) = C^*(X)$ ,  $C^*(C^*(X)) = C^*(X)$ . 因此,覆盖粗糙集的公理化体系的讨论远比 Pawlak 粗糙集的公理化体系复杂.

### 参考文献

- [1] Pawlak Z, Grzymala-Bausse J, Slowinski R, et al. Rough sets [J]. Communications of the ACM, 1995, 38(11): 89-95
- [2] Pawlak Z. Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991
- [3] Lin T Y, Liu Q. Rough approximate operators: Axiomatic rough set theory[J] // Ziarko W P, ed. Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery. London: Springer-verlag, 1994: 256-260
- [4] 祝峰, 何华灿. 粗集的公理化[J]. 计算机学报, 2000, 23(3): 330-333
- [5] 孙辉, 刘大有, 李文. 粗集公理组的极小化[J]. 计算机学报, 2002, 25(2): 202-209
- [6] Zakomski W. Approximations in the space  $(U, \Pi)$ [J]. Demonstration Math., 1983, 16: 761-769
- [7] Zhu W, Wang F Y. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets[J]. Information Sciences, 2003, 152: 217-230
- [8] Xu W H, Zhang W X. Measuring roughness of generalized rough sets induced by a covering[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158: 2443-2455
- [9] 基于本体语义检索技术研究[J]. 计算机工程与科学, 2008(4)
- [10] Jena 在基于 Ontology 的 TBTC 文档搜索中的应用研究[J]. 中国科技信息, 2007(15)
- [11] 基于本体的资源描述和检索方法研究[J]. 计算机工程与应用, 2005(36)
- [12] 基于本体论的课件资源检索系统设计[J]. 计算机工程与设计, 2006(5)

(上接第 171 页)

- [2] 李善平, 尹奇群, 胡玉杰, 等. 本体论研究综述[J]. 计算机研究与发展, 2004(7)
- [3] 廖明宏. 本体论与信息检索[J]. 计算机工程, 2006(2)
- [4] 张钊. 基于语义的网络服务匹配机制的研究与实现[D]. 北京: 清华大学, 2005
- [5] 基于 Ontology 的语义信息检索模型研究[J]. 计算机工程与设计, 2008(11)