

# 改进的脊波变换图像半软阈值降噪方法

罗忠亮<sup>1,2</sup> 林土胜<sup>2</sup>

(韶关学院电子与通信工程系 韶关 512005)<sup>1</sup> (华南理工大学电子与信息学院 广州 510641)<sup>2</sup>

**摘要** 脊波变换是一种源于小波又高于小波的多尺度几何分析方法,应用于图像中。借鉴小波去噪的思想提出一种新的图像去噪方法,采用基于 Bayesian 估计的自适应阈值和半软阈值技术进行去噪,针对脊波变换所产生的轻微的“划痕”,引入平移不变的方法消除这种条纹干扰。实验结果表明,该方法较好地处理了图像细节和边沿保留与噪声抑制的矛盾,是一种有效的去噪方法。

**关键词** 半软阈值去噪,脊波变换,平移不变,贝叶斯估计

## Image Semi-soft Threshold Denoising Method Based on Improved Ridgelet Transform

LUO Zhong-liang<sup>1,2</sup> LIN Tu-sheng<sup>2</sup>

(Department of Electronics and Communication Engineering, Shaoguang College, Shaoguang 512005, China)<sup>1</sup>

(School of Electronics and Information, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)<sup>2</sup>

**Abstract** Ridgelet is a multi-scale geometric analysis method that comes from wavelet and is better than it, which is applied in the image processing. This paper presented a new denoising way using the essence of wavelet image denoising, the new one is based on adaptive threshold of Bayesian estimation and semi-soft threshold techniques. In view of little scratch caused by ridgelet transform, the interference was eliminated with the method of shift invariant. The experimental results show that this method can better deal with contradictions between image details and edge reservations and noise suppression, it is an effective denoising method.

**Keywords** Semi-soft threshold denoising, Ridgelet transform, Shift invariant, Bayesian estimation

## 1 引言

实际图像在形成和传输的过程中,会受到各种噪声的干扰。噪声降低了图像的分辨率,严重影响目标的识别和分类。因此,图像降噪是一种常用的图像预处理方法,其目的为改善图像质量,突出图像本身的期望特征。

小波变换是一种具有时频局部分析的非平稳信号分析方法,并具有对一维有界变差函数类的最优逼近性能,在信号处理中的应用得到很大的发展。由于图像信号是由基本的点、线、面构成的,不仅存在奇异点,还存在奇异线,小波在表示具有点奇异性的目标函数时是最好的基。小波变换并不能充分利用图像本身的几何特征,并不是最优的或者说是“最稀疏”的函数表示方法<sup>[1,2]</sup>。Candes 和 Donoho 提出的 Ridgelet 变换是一种具有方向性的多尺度变换,它源于小波又高于小波<sup>[1]</sup>,其基函数具有各向异性(anisotropy)和多方向性(multi-directional)等良好特性,能有效地描述沿直线或超平面的奇异性的高维信号,可以获得更高的精度,实现更小的均方差,能更好地保持图像的直线特征<sup>[3,4]</sup>。

利用脊波变换进行图像去噪,是由于图像的线性奇异能被很少几个脊波系数表示,而随机分布的噪声却没有如此显著的系数。因此,对脊波系数做简单的阈值处理就可得到很

好的效果。

本文借鉴小波阈值去噪法,把脊波变换的多分辨分析思想用于图像降噪处理中,提出一种新的脊波域图像去噪方法。通过贝叶斯估计寻找较优阈值,采用半软阈值去噪技术,针对脊波不足,采用平移不变法有效地减轻了这些人为的条纹干扰(轻微的“划痕”)。实验表明,这种方法在有效去噪的同时较好地保留图像边缘细节,不论从视觉效果还是边缘保持指数和峰值信噪比等衡量指标上都取得较好的效果。

## 2 脊波变换理论

### 2.1 二维连续脊波变换<sup>[4,5]</sup>

设光滑函数  $\Psi: R \rightarrow R$ , 满足  $\int \Psi(t) dt = 0$  及

$$K_{\Psi} = \int \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|^2} d\omega < \infty \quad (1)$$

称  $\Psi$  为容许激励函数。

对于任意的  $a > 0, b \in R, \theta \in [0, 2\pi]$ , 可以定义二维脊波变换基函数为:

$$\Psi_{a,b,\theta}(x_1, x_2) = a^{-1/2} \cdot \Psi[(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta - b)/a] \quad (2)$$

其中,  $a$  为脊波尺度因子,  $b$  为脊波的位移,  $\theta$  表示脊波的方向。

到稿日期:2008-04-08 本文受国家自然科学基金项目(60472006),广东省自然科学基金团队研究项目(04205783)资助。

罗忠亮(1973-),男,讲师,博士生,主要研究方向为数字图像处理与分析;林土胜(1945-),男,教授,博导,主要研究方向为信号处理与分析、生物特征识别。

对于 Ridgelet 的脊线而言,  $x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta = C$  为常数, 而垂直于脊线方向则是小波系数的方向。因此, 用单尺度脊波函数来分析图像, 就是用直线来剖分图像, 用直线来逼近曲线。定义

$$CRT_f(a, b, \theta) = \langle f, \Psi_{a, b, \theta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{a, b, \theta}(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3)$$

为函数  $f(x_1, x_2)$  的连续 Ridgelet 变换。

其实, 脊波变换是以小波变换和 Radon 变换为基础的对函数  $f(x_1, x_2)$  的 Radon 变换。Radon 变换可由下式表示:

$$R_f(\theta, t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \cdot \delta(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta - t) dx_1 dx_2 \quad (4)$$

其中,  $\delta$  是 Dirac 函数,  $t$  是原点到直线的距离。Radon 变换通过在—幅图像中沿所有可能的直线积分加强了线状特征, 由式(3)和式(4)可导出函数  $f(x_1, x_2)$  的脊波变换的表达式:

$$CRT_f(a, b, \theta) = \int R_f(\theta, t) a^{-1/2} \Psi\left[\frac{t-b}{a}\right] dt \quad (5)$$

其中,  $t$  沿角度  $\theta$  方向上是变化的, 一个函数的脊波变换系数可看作是先对它做 Radon 变换, 再对其做小波变换后得到的系数。

$f(x_1, x_2)$  的重构公式为

$$f(x_1, x_2) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CRT_f(a, b, \theta) \cdot \Psi_{a, b, \theta}(x_1, x_2) \frac{da}{a^3} \cdot \frac{d\theta}{4\pi} \quad (6)$$

Ridgelet 变换首先通过 Radon 变换得到图像多个方向上的积分(投影)结果, 将图像的线奇异性转换为点奇异性, 然后在各个积分方向再做—维小波变换, 利用其对点奇异性良好表示特性得到图像的稀疏表示, 这就是脊波变换在线奇异性能获得良好特性的原因。

## 2.2 二维离散脊波变换<sup>[5]</sup>

设  $\phi(x)$  为尺度函数,  $\psi(x)$  为相应的二进小波, 在时间  $t$  处进行离散化, 并使  $\Delta t=1$ , 则数字信号(长度为  $p$ )的二进小波为

$$W_{ij} f(n) = f * \psi_{ij}(n) \quad (7)$$

其中,  $n \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $j=1, 2, \dots, \log_2 p$ 。

设  $\bar{\psi} = \psi(-x)$ , 则

$$W_{ij} f(n) = f * \psi_{ij}(n) = \langle f * \bar{\psi}_{ij}(n) \rangle \quad (8)$$

设  $R(k, l)$  ( $k=1, 2, \dots, q, l=1, 2, \dots, p$ ) 为数字图像的 Radon 变换, 则存在  $f_k(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , 使得  $R(k, l) = f_k * \phi(l)$ 。因此, 二维图像的离散脊波变换(Discrete Ridgelet Transform, DRT)为:

$$DRT_{ij} f_k(n) = \langle f_k * \bar{\psi}_{ij, n}(\cdot) \rangle, (n=1, 2, \dots, p) \quad (9)$$

## 3 基于脊波域图像半软阈值去噪技术及其阈值的选取

基于脊波变换的图像去噪, 其基本思想和基于多尺度分解的去噪方法完全一致, 通过系数与阈值比较判断去留来进行去噪<sup>[2, 5, 6]</sup>, 图像经过脊波分解后的系数主要由两部分组成。由于 Ridgelet 可以获得比小波更加稀疏的表示, 利用这一点可通过脊波系数的阈值化将噪声去除, 同时可以很好地保留图像的细节信息。

选取合适的阈值对脊波系数分类, 是阈值去噪的关键问

题, 恰当的阈值及其去噪技术应兼顾平滑(去除噪声)和拟合(与原始图像的近似程度)两方面的要求。很多情况下, 选取的阈值大多基于 Dohono<sup>[7]</sup>等人提出的“Universal”阈值形式, 它是最小最大均方误差意义上的最优阈值, 更侧重于原始图像的去噪效果, 而非边缘细节的保留。

### 3.1 阈值去噪技术

(1)硬阈值方法:

$$T_H = \begin{cases} Y_{i,j}, & \text{if } |Y_{i,j}| \geq t \\ 0, & \text{if } |Y_{i,j}| < t \end{cases} \quad (7)$$

(2)软阈值处理法:

$$T_S = \begin{cases} \text{sign}(Y_{i,j})(|Y_{i,j}| - t), & \text{if } |Y_{i,j}| \geq t \\ 0, & \text{if } |Y_{i,j}| < t \end{cases} \quad (8)$$

(3)半软阈值处理法:

$$T_{\text{Semi}} = \begin{cases} Y_{i,j}, & \text{if } |Y_{i,j}| > t_2 \\ \frac{t_2(|Y_{i,j}| - t_1)}{(t_2 - t_1)}, & \text{if } t_1 \leq |Y_{i,j}| \leq t_2 \\ 0, & \text{if } |Y_{i,j}| < t_1 \end{cases} \quad (9)$$

针对硬、软阈值方法的不足, Bruce 和 Gao<sup>[7]</sup>提出的半软阈值分类方法是软、硬阈值分类的折中方案, 需要设定两个阈值, 一般  $t_2 = 2t_1$ 。

### 3.2 自适应阈值的确定

降噪效果的优劣与阈值选取有很大关系。本文采用基于 Bayesian 估计的自适应阈值<sup>[8]</sup>。

若  $X$  服从均值为 0、方差为  $\sigma_X^2$  的高斯分布, 即  $X \sim N(0, \sigma_X^2)$ , 贝叶斯风险函数可表示为

$$\gamma(T) = E(\hat{X} - X)^2 = E_X E_{Y|X}(\hat{X} - X)^2 \quad (10)$$

用  $T^*$  表示优化的阈值,  $T^* = \arg_T \min \gamma(T)$ 。

寻找  $T^*$  的过程如下:

$$E_X E_{Y|X}(\hat{X} - X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\gamma}_T(y) - x)^2 p(y|x) \cdot p(x) dy dx = \sigma^2 \omega\left(\frac{\sigma_X^2}{\sigma^2}, \frac{T}{\sigma}\right) \quad (11)$$

其中

$$\omega\left(\frac{\sigma_X^2}{\sigma^2}, \frac{T}{\sigma}\right) = \sigma_X^2 + 2(T^2 + 1 - \sigma_X^2) \Phi\left(\frac{T}{\sqrt{1 + \sigma_X^2}}\right) - 2T(1 + \sigma_X^2) \phi\left(\frac{T}{\sqrt{1 + \sigma_X^2}}\right) \quad (12)$$

标准密度函数

$$\phi(x, \sigma^2) = (1/\sqrt{2\pi\sigma^2}) \exp(-x^2/2\sigma^2) \quad (13)$$

生存函数

$$\bar{\Phi}(x) = \int_0^{\infty} \phi(t, 1) dt \quad (14)$$

从而得  $T_B(\sigma_X) = \frac{\sigma^2}{\sigma_X}$  (15)

$T_B(\sigma_X)$  是对  $T^*$  的一个近似,  $\gamma(T_B(\sigma_X))$  的最大偏差不超过 1%。式(15)参数的估计如下:

噪声方差  $\sigma^2$  可通过对最高频子带( $HH_1$ )采用鲁棒的中值绝对方差估计:

$$\hat{\sigma} = \text{Median}(|Y_{i,j}|) / 0.6745, Y_{i,j} \in \text{subband } HH_1 \quad (16)$$

而  $\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n Y_{i,j}^2 \cdot n \times n$  为考虑的子带大小。

$$\hat{\sigma}_X^2 = \sqrt{\max(\hat{\sigma}_Y^2 - \hat{\sigma}^2, 0)} \quad (17)$$

这样根据 BayesShrink 去噪思想, 得到基于脊波系数子带自适应阈值:

$$T_B(\hat{\sigma}_X) = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x} \quad (18)$$

阈值在 MSE 意义上是近优的,其去噪效果与 SURE 阈值法相当,但计算量小得多。

### 3.3 条纹干扰的消除

由于 Ridgelet 变换用到的是 Radon 切片上的小波变换,这使得 Ridgelet 变换的图像产生一定的“卷绕”现象<sup>[5]</sup>。因此,去噪后的图像出现条纹干扰现象,类似于轻微的“划痕”。为此,把平移不变概念引入脊波变换,使其具有真正意义上的平移不变特性,分别从水平和垂直方向进行循环位移,利用多次平移去噪后求均值的方法来克服这些人造的条纹干扰。

### 3.4 脊波域图像半软阈值去噪算法流程

图 1 给出脊波域图像半软阈值去噪算法流程。

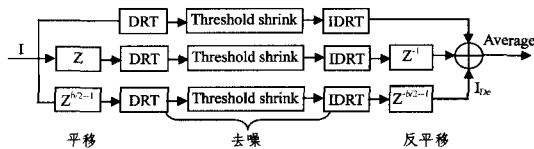


图 1 脊波域图像半软阈值去噪算法流程

## 4 实验结果与分析

为说明算法的有效性,将本文方法与脊波去噪方法(含脊波软阈值、硬阈值)和半软阈值脊波去噪算法进行比较,以边缘保持指数(Beta)、信号/均方误差(S/MSE)<sup>[9]</sup>和峰值信噪比(PSNR)对去噪效果进行量化表示。去噪结果如图 2 和图 3 所示,各项评价指标如表 1 所列。

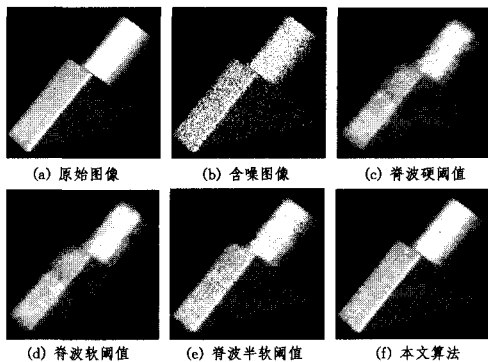


图 2

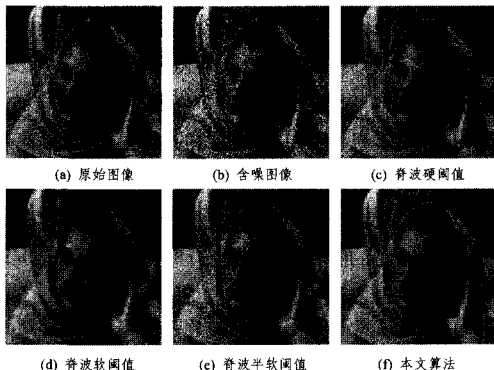


图 3

表 1 图像去噪结果的评价指标

图像	评价指标	脊波硬 阈值法	脊波软 阈值法	脊波半软 阈值法	本文方法
图 1 几何体	S/MSE	18.904	19.666	20.719	22.198
	Beta	0.4051	0.3893	0.4277	0.46812
(σ <sup>2</sup> =25) 图 2 妇女	PSNR(dB)	22.781	25.508	27.570	31.3649
	S/MSE	14.724	14.933	15.719	17.6443
(σ <sup>2</sup> =30)	Beta	0.3780	0.3597	0.3984	0.41606
	PSNR(dB)	20.534	21.073	22.3283	23.02531

选用具有一定直线特征的标准图像,实验前给标准的图像添加均值为 0 的高斯白噪声。从图中看出,半软阈值去噪效果较软、硬阈值法要好,与本文对比的方法均有不同程度的“划痕”,而采用平移不变 Ridgelet 去噪能在抑制噪声的同时,可进一步减少人为干扰,获得很好的视觉效果。本文方法去噪后基本上看不出干扰了。从表 1 的各项性能指标可看出,本文算法是最佳的。但是,随着噪声方差的不断增加,4 种不同的去噪算法图像去噪后的各项指标逐渐下降。

**结束语** 脊波变换能更有效地表示线性和曲线奇异,图像去噪时能很好地保持图像边缘和细节。本文通过利用自适应阈值和半软阈值去噪技术,结合平移不变的特性进行脊波图像去噪。基于本文的噪声抑制方法,从视觉效果上看,去噪效果较好且边缘和纹理保持较清晰;从客观指标上衡量:Beta, S/MSE 和 PSNR 比其它算法要高,较好地保护含噪图像中的“线形结构”。实验验证了本方法的有效性,同时也说明实际应用中,将不同的方法结合起来效果会更佳。

## 参考文献

- [1] 焦李成,谭山. 图像的多尺度几何分析:回顾和进展[J]. 电子学报, 2003, 31(12): 1975-1981
- [2] 项海林,贾建,焦李成. 基于小波和脊波的图像联合去噪方法[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(5): 680-682
- [3] Donoho D L. Orthonormal ridgelet and linear singularities[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2000, 31(5): 1062-1099
- [4] Candes E J, Donoho D L. Ridgelets: a key to higher dimensional intermittency[J]. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 1999: 2495-2509
- [5] Do M N, Vetterli M. The finite ridgelet transform for image representation[J]. IEEE Trans. on Image Processing, 2003, 12: 16-28
- [6] Donoho D L. Denoising by soft thresholding [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 1995, 41(3): 631-627
- [7] 谢杰成,张大力,徐文立. 小波图像去噪综述[J]. 中国图象图形学报, 2002, 7A(3): 209-217
- [8] Chang S G, Yu B, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. IEEE Trans on Image Processing, 2000, 9(9): 1532-1546
- [9] Achim A, Bezerianos A, Tsakalides P. Novel Bayesian multiscale method for speckle removal in medical ultrasound image[J]. IEEE Trans. on Medical Image Processing, 2001, 20(8): 772-783