第36卷 第2期 计算机科学 Vol. 36 No. 2
2009年2月 Computer Science Feb. 2009

基于代数视角的凸壳及其特性同构化研究

周启海 李 燕 黄 涛 孙劦鹭
(西南财经大学信息技术应用研究所 西南财经大学经济信息工程学院 成都 610074)

摘 要 现行凸壳算法通常是基于凸壳几何特性的视角来求解凸壳顶点,主要适用于求解低维几何空间凸壳问题。因高维空间凸壳的几何关系极为复杂,故研究、设计、提高求解高维几何空间凸壳的算法效率难度较大。考虑到几何与代数有着天然的本质联系,进而基于代数视角来研究凸壳问题,并给出了凸壳顶点的代数定义,研究了凸壳顶点若干代数性质;从而,为探索从代数视度来研究和设计求解高维几何空间凸壳算法提供某些基础理论与创新思路。

关键词 同构化,凸壳,凸壳算法,凸组合,基础解系

中图法分类号 TP301.6 **文献标识码** A

Isomorphic Researches on Convex Hull and its Special Properties Based on Algebra View

ZHOU Qi-hai LI Yan HUANG Tao SUN Xie-zhi
(Research Institute of Information Technology Application, School of Economic Information Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 610074, China)

Abstract The current convex hull algorithms find out the apexes of convex hull from the view based on the geometric characteristics of convex hull. These algorithms are suitable to study the convex hull problem in low dimensions space. But the geometric relationship of the convex hull in high dimensions space is very complex, how to research, design and raise the algorithm efficiency in high dimensions space is more difficult. The natural nature relationship between geometry and algebra was concerned, the convex hull problem was studied from the view based on algebra, both definition and algebra natures of the apexes of convex hull were given and studied; some theoretical bases and innovational thinking were advanced to research and design for solving the convex hull problem in high dimensions space from the view based on algebra.

Keywords Isomorphic, Convex hull, Convex hull algorithm, Convex combination, Basic set of solutions

1 引言

二维凸壳问题于20世纪70年代被提出,由于其应用的广泛性及问题本身的复杂性引起了相关学者的广泛关注并取得了大量的研究成果,例如基于最大基线倾角智能逼近的凸壳新算法[1]、求平面点集凸壳的一个最优算法[2]、双域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[3]、基于凸多边形的凸壳算法[4]、平面点集凸壳的一种快速算法[5]。在三维凸包的快速算法[6]一文中研究了三维空间中求解凸壳顶点的方法。随着经济社会的发展,人们面对的问题越来越复杂。一个十分突出的表现是信息的维数不断增加,为了满足实际应用的需要,有必要进一步研究高维凸壳问题。另一方面人们对事物的认识总是由简单到复杂不断地向前发展。高维凸壳问题是二维凸壳问题的推广和发展,因此从理论研究的角度来看也有必要对高维凸壳问题进行研究。已有的二维凸壳算法都是根据二维空间中凸多边形的一些特殊几何性质构造而来。然而,高维空间中的几何结构远比二维空间复杂,这就造成了解决二维凸壳问题的传统思想在解决高维凸壳问题时有较大难度。鉴此,本文试图面向基于代数学思路的凸壳算法设计与创新,从代数学的角度给出了凸壳的代数定义,并对凸壳的代数性质、尤其是凸壳顶点的性质进行了研究。

2 凸壳定义的等价性

凸壳定义,可有基于代数与基于几何的两种描述方式。

2.1 凸壳定义的代数描述

定义1 设S为n维空间中的有限集合,包含m个点且将S中的元素记为S_i。若集合$D(S)=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_k\}\subseteq(S)\subseteq R^n$,且同时满足以下条件:

(1) $\forall s\in S$,S可以由集合$D(S)$中元素的凸组合来表示,即$S=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i Y_i$,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$,$1\geqslant\lambda_i\geqslant0$ 其中,$i=1,2,\cdots,k$;

(2) 对$D(S)$中的任意一点Y,均不能由S中剩余点的凸组合来表示。

则称$D(S)$为凸壳$conv(S)$的顶点集,$D(S)$中的点称为凸壳

到稿日期:2008-05-19

周启海(1947—),男,教授,博(硕)士生导师,主要研究方向为计算几何、算法研究与应用、财经计算、同构化信息处理等,E-mail:zhouqh@swufe.edu.cn;李 燕(1983—),男,硕士研究生,主要研究方向为信息技术及管理;黄 涛(1972—),男,博士生、讲师,主要研究方向为计算机应用;孙劦鹭(1985—),男,硕士研究生,主要研究方向为信息技术及管理。

$conv(S)$的顶点。

2.2 凸壳定义的几何描述

定义 2 能将二维点集 S 中所有点都包围住的最小凸多边形,称为 S 的凸壳,记为 $conv(S)$;而该最小凸多边形的顶点,称为凸壳 $conv(S)$的顶点。

引理 1 设 A 为二维空间中的一个凸多边形,a 为二维空间中的任意一点,且记凸多边形 A 的顶点集为 $D(A)$。则点 a 包含在凸多边形 A 所围成的区域(包括边界)中的充要条件是:当且仅当点 a,可以由 $D(A)$中点的凸组合来表示。

引理 1 可证明如下:

为了叙述简便,不妨记凸多边形 A 所围成的区域(包括边界)为 E。

i. 必要性:显然,对 E 中的任意一点,均可以构造一个由凸多边形 A 的三个顶点所构成的三角形,此点包含在该三角形所围成的区域(包括边界)中。而根据凸组合定义与性质可知,该三角形所围成的区域(包括边界)中的任意一点均可由三角形三个顶点的凸组合来表示。故必要性成立。

ii. 充分性:显然,包含在区域 E 中的所有的点构成一个凸集记为 B,而点 a 可以由 $D(A)$中点的凸组合来表示,故由凸集的定义与性质可知,点 a 属于 B。由此可推出点 a 包含在凸多边形 A 所围成的区域(包括边界)中。

故引理 1 成立。

定理 1 在二维情况下,定义 1 与已有的二维凸壳顶点的传统定义,是等价的。

可用反证法证明定理 1:

设由定义 1 确定的凸壳顶点集为 $D(S)$。能将点集 S 包围住的最小凸多边形的顶点集为 C,显然 C 为 S 的子集。由引理 1 可知,S 中的任意一点均可以由 C 中点的凸组合来表示,又由定义 1 以及 $D(S)$的唯一性可知 $D(S)$为 C 的子集。

假设 $D(S)\subset C$。因为 $D(S)$为 C 的子集,所以 $D(S)$中的所有点必能构成一个凸多边形,不妨记为 H。同时由于 S 中的每一个点均可以由 $D(S)$中点的凸组合来表示,因此由引理 1 可知:S 中所有的点均包含在凸多边形 H 中。这与 C 为是能将点集 S 包围住的最小凸多边形的顶点集相矛盾,所以假设 $D(S)\subset C$ 不成立,又因为 $D(S)\subseteq C$,故 $D(S)=C$。这就说明了在二维情况下定义 2 与定义 1 等价。因此,定理 1 成立。

由此可见,这表明:定义 1 是传统二维凸壳顶点定义 2 在高维空间中的推广。

3 凸壳的代数性质

由于凸壳及其顶点的代数描述与几何马上是的本质一致性,故应研究凸壳代数性质进行了研究。

命题 1 凸壳 $conv(S)$的顶点集具有唯一性。

证明:

假设 $D(S)_1=\{Y_1^1,Y_2^1,\cdots,Y_{k_1}^1\}$,$D(S)_2=\{Y_1^2,Y_2^2,\cdots,Y_{k_2}^2\}$为凸壳 $conv(S)$的两个顶点集,且 $D(S)_1\neq D(S)_2$。而 $D(S)_1\neq D(S)_2\Leftrightarrow \exists Y_0^1\in D(S)$,有 $Y_0^1\notin D(S)_2$ 或 $\exists Y_0^2\notin D(S)_2$,有 $Y_0^2\notin D(S)_1$;

不妨设 $Y_1^1\notin D(S)_2$,

由定义 1 可知,可以由集合 $D(S)_2$中点的凸组合表示,即

$Y_1^1=\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i Y_i^2$,其中,$\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i=1,\lambda_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,k_2)$。

因为 $Y_1^1\notin D(S)_2$,所以 $0\leqslant\lambda_i<1(i=1,2,\cdots,k_2)$

再由定义 1 可知,$Y_i^2(i=1,2,\cdots,k_2)$均可以由集合 $D(S)_1$ 中点的凸组合表示,即

$Y_i^2=\sum_{j=1}^{k_1}\lambda_{ij}Y_j^1$,其中$\sum_{j=1}^{k_1}\lambda_{ij}=1,\lambda_{ij}\geqslant 0$

$(j=1,2,\cdots,k_1)$ $(i=1,2,\cdots,k_2)$。

由以上各等式可得

$$Y_1^1=\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\sum_{j=1}^{k_1}\lambda_{ij}Y_j^1=\sum_{j=1}^{k_1}Y_j^1\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{ij} \tag{1}$$

显然$\sum_{j=1}^{k_1}\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{ij}=1$ 且$\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{ij}\geqslant 0$

$(j=1,2,\cdots,k_1)$

经过恒等变换可以将式(1)变换为

$$(1-\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{i1})Y_1^1=\sum_{j=2}^{k_1}Y_j^1\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{ij} \tag{2}$$

因为 $0\leqslant\lambda_i<1$ $(i=1,2,\cdots,k_2)$ 且 $1\geqslant\lambda_{i1}\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,k_2)$,所以 $1-\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{i1}>0$,

式(2)两边同时除以 $1-\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{i1}$ 可得

$$Y_1^1=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{i1}}(\sum_{j=2}^{k_1}Y_j^1\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{ij})$$

因为$\sum_{j=1}^{k_1}\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{ij}=1$,所以

$$\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{i1}}(\sum_{j=2}^{k_1}\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{ij})=1$$

显然 $\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{i1}}\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_i\lambda_{ij}\geqslant 0(j=2,3,\cdots,k_1)\Rightarrow Y_1^1$ 可以由点 $Y_2^1,Y_3^1,\cdots,Y_{k_1}^1$ 的凸组合表示。

这与 $D(S)_1=\{Y_1^1,Y_2^1,\cdots,Y_{k_1}^1\}$是凸壳 $conv(S)$的顶点集相矛盾。

故假设不成立,即原命题成立。

显然,由定义 1 与凸壳顶点集的唯一性,可以得到如下命题:

命题 2 s_0 为点集 S 中的任意一点,s_0 为凸壳 $conv(S)$的顶点当且仅当 s_0 不能由 S 中剩余点的凸组合表示。

进而,由命题 1 与命题 2,显然可得如下命题:

命题 3 设集合 V 满足如下条件:凸壳顶点集 $D(S)\subseteq V\subseteq S$,$v_0$ 为点集 V 中的任意一点,v_0 为凸壳 $conv(S)$的顶点当且仅当 v_0 不能由 V 中剩余点的凸组合表示。

命题 3 说明了在求凸壳顶点时,去掉一些非凸壳顶点的点(即:内点),必定不会对确定凸壳顶点集造成任何影响。

据此,已可考虑对凸组合条件的等价转化性。

假设点 $w_0\in W\subset R^n$ 可以由点 $w_i\in W\subset R^n(i=1,2,\cdots,k)$的凸组合来表示,即

$w_0=\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2+\cdots+\lambda_k w_k$,其中$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$,

$\lambda_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,k)$

设点 w_i 的坐标为$(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^T(i=0,1,2,\cdots,k)$,则 $w_0\in W\subset R^n$ 可以由点 $w_i\in W\subset R^n(i=1,2,\cdots,k)$的凸组合来表示,且等价于线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{pmatrix} \tag{Ⅰ}$$

存在满足如下两个条件的解：(1)解向量的各个分量均大于等于0；(2)解向量的各分量之和等于1。

因此，要判断一个点能否可由其它点的凸组合来表示，可以等价转化为判断某一线性方程组有没有满足如上两个条件的解。

命题4 设W是R^n的有限子集，$w_i \in W \subset R^n (i=0,1,2,\cdots,k)$，$w_i$的坐标向量为$(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^T (i=0,1,2,\cdots,k)$

w_0能由点$w_i \in W \subset R^n (i=1,2,\cdots,k)$的凸组合来表示，当且仅当齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{20} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{n0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

存在满足如下两个条件的解：

(1) $\lambda_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,k)$，$\lambda_0 < 0$；

(2)$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = -\lambda_0$。

证明：先证其充分性。

假设存在满足如下两个条件的解：

(1)$\lambda_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,k)$，$\lambda_0 < 0$；

(2)$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = -\lambda_0$，则有：

$$\frac{\lambda_1}{-\lambda_0}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2}{-\lambda_0}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \frac{\lambda_k}{-\lambda_0}\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{pmatrix}$$

因为$\lambda_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,k)$，$\lambda_0 < 0$，所以

$\frac{\lambda_i}{-\lambda_0} \geqslant 0, i=1,2,\cdots,k$。

又由$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = -\lambda_0$，可得$\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{-\lambda_0}=1$。

所以w_0能由点$w_i \in W \subset R^n (i=1,2,\cdots,k)$的凸组合来表示。

再证其必要性。

假设w_0能由点$w_i \in W \subset R^n (i=1,2,\cdots,k)$的凸组合来表示，则有

$$\lambda_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{pmatrix}$$

其中$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1$，$\lambda_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,k)$

将$(a_{10} \quad a_{20} \quad \cdots \quad a_{n0})^T$移到等式右边，可得：

$$\lambda_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

由$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1$，$\lambda_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,k)$，可知解向量$(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_k \quad -1)^T$满足条件：

(1)$\lambda_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,k)$，$\lambda_0 = -1 < 0$；

(2)$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = -\lambda_0 = -(-1) = 1$。

综上可知命题(4)成立。

对条件(1)和条件(2)可以进一步转化：

设$S \subset R^n$为n维空间中的有限集，包含m个点。$s_i \in S$，$s_i (i=1,2,\cdots,m)$的坐标为$(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^T$。

构造如下齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{Ⅱ}$$

将齐次线性方程组(Ⅱ)的系数矩阵进行行初等变化。在此假设系数矩阵的秩为r，且不妨假设$s_1,s_2,\cdots,s_r$线性无关(若$s_1,s_2,\cdots,s_r$线性相关，可以通过列的移位初等变化将r个线性无关的列向量移到前r个列向量处)。则方程组(Ⅱ)可转化为如下的同解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1m} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{33} & \cdots & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rm} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{Ⅲ}$$

令$(\lambda_{r+1} \quad \lambda_{r+2} \quad \cdots \quad \lambda_{r+j-1} \quad \lambda_{r+j} \quad \lambda_{r+j+1} \quad \cdots \quad \lambda_m)^T = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^T (j=1,2,\cdots,m-r)$分别代入方程组(Ⅲ)中，可以得到方程组(Ⅲ)的$m-r$个解。

显然这$m-r$个解为方程组(Ⅱ)的一个基础解系。记为$\beta_j = \underbrace{b_{1j} \quad b_{2j} \quad \cdots \quad b_{rj} \quad 0 \quad \cdots \quad 1}_{\text{前}r+j\text{个分量}} \quad 0 \quad \cdots \quad 0) (j=1,2,\cdots,m-r)$

因为$s_1,s_2,\cdots,s_r$线性无关，由代数学中向量线性无关的定义及凸壳顶点定义1，可知点$s_1,s_2,\cdots,s_r$是凸壳的顶点。因此，下面只需对剩下的$m-r$个点进行判断即可。

下面利用命题3、命题4的结论来判断s_{r+k}是否为凸壳的顶点，由命题3、命题4的结论可知要判断s_{r+k}是(否)为凸壳的顶点，只需判断如下不等式组无(有)解。

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1m-r}x_{m-r} \geqslant 0 \\ \qquad \vdots \\ b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \cdots + b_{rm-r}x_{m-r} \geqslant 0 \\ \qquad x_1 \geqslant 0 \\ \qquad \vdots \\ \qquad x_{k-1} \geqslant 0 \\ \qquad x_k < 0 \\ \qquad x_{k+1} \geqslant 0 \\ \qquad \vdots \\ \qquad x_{m-r} \geqslant 0 \\ (\sum_{i=1}^{r}b_{i1}+1)x_1 + (\sum_{i=1}^{r}b_{i2}+1)x_2 + \cdots \\ \quad (\sum_{i=1}^{r}b_{im-r}+1)x_{m-r} = 0 \end{cases}$$

由凸组合中对系数的两个限定条件，显然可得到以下命题：

构造集合$S' = \{s' \in S \mid \forall s \in S/S', s$的第$k_1,k_2,\cdots,k_b (b<n)$个坐标分量小于$s'$的相应坐标分量$\}$。

命题5 $\forall s' \in S'$，s'为凸壳顶点当且仅当s'不能由S'中

剩余点的凸组合来表示。

构造集合 $S''=\{s''\in S|\ \forall s\in S/S''', s$ 的第 $k_1,k_2,\cdots,k_b$ $(b<n)$ 个坐标分量之和小于 s'' 相应坐标分量之和$\}$

命题6 $\forall s''\in S'', s''$ 为凸壳顶点当且仅当 s'' 不能由 S'' 中剩余点的凸组合来表示。

(注:当将“小于”改成“大于”可以得到类似结论。)

高维凸壳与其低维子凸壳的关系

分别对 S 中每一个点的坐标向量取第 $k_1,k_2,\cdots,k_b(b<n)$ 位置上的坐标分量构成一个新的 b 维向量,设集合 F 为以上 b 维向量在 b 维空间中的对应点所组成的集合。设凸壳 $conv(F)$ 的顶点集为 $D(F)$,且设 $\xi\in D(F)$。构造集合 $S'''=\{s'''\in S|s'''$ 的第 $k_1,k_2,\cdots,k_b$ $(b<n)$ 位置上的坐标分量与点 ξ 相应位置上的坐标分量相等。

命题7 $\forall s'''\in S''', s'''$ 为凸壳顶点当且仅当 s''' 不能由 S''' 中剩余点的凸组合来表示。

在二维情况下我们常用如下凸壳顶点的定义 2:能够将点集 S 中所有点都包围住的最小凸多边形的顶点称为凸壳 $conv(S)$ 的顶点。下面证明在二维情况下定义 2 与定义 1 等价。

首先证明如下命题:

命题8 设 A 为二维空间中的一个凸多边形,a 为二维空间中的任意一点,且记凸多边形 A 的顶点集为 $D(A)$。则点 a 包含在凸多边形 A 所围成的区域(包括边界)中当且仅当点 a 可以由 $D(A)$ 中点的凸组合来表示。

证明:

不妨记凸多边形 A 所围成的区域(包括边界)为 E。

先证必要性。显然对 E 中的任意一点,均可以构造一个由凸多边形 A 的三个顶点所构成的三角形,此点包含在该三角形所围成的区域(包括边界)中。而三角形所围成的区域(包括边界)中的任意一点均可以由三角形三个顶点的凸组合来表示。故必要性成立。

再证充分性。显然包含在区域 E 中的所有的点构成一个凸集记为 B,而点 a 可以由 $D(A)$ 中点的凸组合来表示,故由凸集的定义可知点 a 属于 B。由此可推出点 a 包含在凸多边形 A 所围成的区域(包括边界)中。

故命题 8 成立。

证明:

设由定义 1 确定的凸壳顶点集为 $D(S)$。能将点集 S 包围住的最小凸多边形的顶点集为 C,显然 C 为 S 的子集。由命题 8 可知,S 中的任意一点均可以由 C 中点的凸组合来表示,又由定义 1 以及 $D(S)$ 的唯一性可知 $D(S)$ 为 C 的子集。

假设 $D(S)\subset C$。

因为 $D(S)$ 为 C 的子集,所以 $D(S)$ 中的所有点必能构成一个凸多边形,不妨记为 H。同时由于 S 中的每一个点均可以由 $D(S)$ 中点的凸组合来表示,因此由命题 8 可知:S 中所有的点均包含在凸多边形 H 中。这与 C 为能将点集 S 包围住的最小凸多边形的顶点集相矛盾,所以假设 $D(S)\subset C$ 不成立,又因为 $D(S)\subseteq C$,故 $D(S)=C$。这就说明了在二维情况下定义 2 与定义 1 等价。

结束语 迄今为止,已有的二维凸壳算法基本上都是根据二维空间中凸多边形的一些特殊几何性质构造而来。但高维空间中的几何结构远比二维空间复杂,这就造成了解决二维凸壳问题的传统算法思想在解决高维凸壳问题时常有较高难度。鉴此,本文从代数学新视角来研究凸壳问题,并对凸壳顶点的一些代数性质作了研究,试图为探索从代数视度来设计和创新高维几何空间凸壳算法提供若干研究思路与方法支撑。

参 考 文 献

[1] 周启海,黄涛,吴红玉,等.基于最大基线倾角智能逼近的凸壳新算法[J].计算机科学,2007(09):206-208

[2] 郑永果,徐晓丹,岳昊.求平面点集凸壳的一个最优算法[J].福建电脑,2005(07):47-48

[3] 黄涛,周启海.双域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J].计算机科学,2007(11):208-211

[4] 刘丽娜,唐振军,张显全.基于凸多边形的凸壳算法[J].计算机科学,2006(9):218-221

[5] 马丽平,杨炳儒,樊广佺.平面点集凸壳的一种快速算法[J].地理与地理信息科学,2006(6):38-41

[6] 杨勋年,汪国昭.三维凸包的快速算法[J].浙江大学学报:工学版)1999(02):111-115

(上接第 247 页)

可靠性较差,甚至出现不通信状态。移动机器人在低于 80km/h 的速度内运行,对数据通信的可靠性没有影响。

从测试结果可以看出:系统各模块之间的接口、协议设计合理,控制指令及数据能够快速准确地响应和传输,机器人可以快速完成遥控、人工、自主 3 种驾驶状态的切换。在车速低于 80km/h、通信距离小于 5km 的范围内,遥操作系统可以在移动过程中很好地实现野外具有轻度起伏的地形区域内对移动机器人的灵活操控。

结束语 本文介绍了一种新型基于无线通信的室外移动机器人遥操作系统。该系统提供了良好的人机交互界面和操作控制平台,具有一定的临场感知能力。此外还设计了定向天线控制系统,增强了移动过程中图像无线通信的效果;指挥站可灵活移动,利用电子地图和 GPS 信息寻找并接近移动机器人以缩短通信距离,不但显著增强了操控效果,而且提高了系统整体的指控灵活性和野外生存能力,扩展了其在公共安防、社区巡逻、军事侦察等特殊领域的应用范围。

今后的工作将集中在移动指挥站对多台机器人的遥控方面。需要进一步研究和解决的关键技术包括改进无线通信的性能、增强视觉导航以提高移动机器人自主驾驶能力、基于 GPS 的电子地图绘制与匹配以及基于电子地图的引导式遥控技术等。

参 考 文 献

[1] 欧青立,何克忠.室外智能移动机器人的发展及其关键技术研究.机器人,2000,22(6):519-526

[2] 张鹏飞,何克忠,欧阳正柱,等.多功能室外智能移动机器人实验平台—THMR-V.机器人,2002,24(6):97-101

[3] 丑武胜,战强.空间遥操作机器人系统控制参考模型.宇航学报,2003,24(4):378-383

[4] 杨灿军,陈鹰,路甬祥.人机一体化智能系统理论及应用研究探索.机械工程学报,2000,36(6):42-47

[5] Maza M, Baselga S, Ortiz J. Vehicle Teleoperation with a Multi-sensory Driving Interface// Climbing and Walking Robots CLAWAR 2004 (Pablo Gonzalez De(EDT) Santos, Manuel Armada). 2005:437-445

[6] 于元隆,樊铁锟,何克忠.移动机器人 THMR-V 遥控系统的设计与实现.计算机工程与应用,2003,25:202-205