Petri 网替换运算的不变量保持条件

岳 昊 吴哲辉

（山东科技大学信息科学与工程学院 青岛 266510）

摘 要 提出了 Petri 网替换运算的不变量保持条件，根据这些条件，可以由轮廓模型 N 和子系统模型 N_1 的 T-不变量(S-不变量)得到加细模型 N′的 T-不变量(S-不变量)，充分利用已知的轮廓模型 N 和子系统模型 N_1 的 T-不变量(S-不变量)，避免从头处理加细模型 N′，以达到节省计算开支的目的。

关键词 Petri 网，不变量，保持条件

Invariant Conservation Condition for the Replacement Operation of Petri Nets

YUE Hao WU Zhe-hui

(College of Information, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China)

Abstract The invariant conservation condition for the replacement operation of Petri nets was proposed. One can obtain the T- invariant(or S- invariant) of the refined model N ′ using the T- invariant(or S- invariant) of the original model N and sub-system model N_1. Thus the information about the T- invariant(or S- invariant) already known is fully used, and a great deal of computation cost is saved.

Keywords Petri net, Invariant, Conservation condition

1 引言

Petri 网的替换运算有不同的定义，如文献[5,6]，本文所讨论的 Petri 网替换运算是在文献[1]中定义的，其基本思想发源于文献[10]。Petri 网的替换运算是指用一个子网替换一个网(或网系统)中的一个基本元素，运算结果产生一个新的网(或网系统)。替换运算可以分为两种：对库所的替换或对变迁的替换。对库所的替换必须用库所型子网，对变迁的替换必须用变迁型子网。替换运算主要应用于系统建模。对于一个复杂的系统，如果我们要建立它的网模型，第一步往往只构建系统的轮廓模型。在系统的轮廓模型中，有的子系统可能只用一个基本元素表示。为了对系统进行更详细的描述，对那些子系统又可以构建子网系统的模型。用这些子网系统模型替换轮廓模型中的基本元素，就得到整个被描述系统的详细模型。

这种用子系统模型替换轮廓模型中的一个基本元素的操作称为加细。从系统的轮廓模型通过一步步加细得出系统的详细模型的过程称为逐步求精。加细操作与逐步求精的建模思想，同面向对象的思想方法是吻合的。从 Petri 网理论的角度来看，这种建模方法的基本要素就是 Petri 网的替换运算。为了使通过加细操作和逐步求精的建模方法构建的系统模型能够准确地反映系统的性能，还要对 Petri 网替换运算对网(或网系统)基本性质的保持性开展研究，文献[1]指出，这方面的研究工作基本还没有。T-不变量和 S-不变量是对 Petri 网进行结构性质分析的重要工具[1-4]，但对于 T-不变量或 S-不变量的求取至今未找到有效的算法，求取 Petri 网、特别是大规模系统 Petri 网模型的不变量，常常要耗费大量的计算时间和存储空间[7-9]。本文就是研究在一定条件下，如何由轮廓模型 N 和子系统模型 N_1 的 T-不变量(S-不变量)得到加细模型 N′的 T-不变量(S-不变量)。本文标题中的“保持”同文献[5]中“保持”的含义类似，都不是指保持所有的不变量，或是指每一个不变量都保持原样不动，我们关心的只是不变量的存在或不存在。如果存在则如何求取，而不是它们的数目或全部确切内容。

2 基本概念和有关结论

定义 1[1] Petri 网是一个四元组 $\Sigma=(S,T;F,M_0)$，其中 S 称为库所集，T 称为变迁集，两者不相交，$F\subseteq(S\times T)\cup(T\times S)$ 称为网的流关系，$M:S\rightarrow\{0,1,2,\cdots\}$ 是 Σ 的一个标识，对 $x\in S\cup T$ 记：

$${}^{\bullet}x=\{y\in S\cup T|(y,x)\in F\}$$

$$x^{\bullet}=\{y\in S\cup T|(x,y)\in F\}$$

Petri 网具有如下变迁发生规则：

1)对于变迁 $t\in T$，若

$\forall s\in S:s\in{}^{\bullet}t\rightarrow M(s)\geq 1$，则称标识 M 下变迁 t 可引发，记作 $M[t]>$。

2)若 $M[t>M'$，则对 $\forall s\in S$，

$$M'(s)=\begin{cases}M(s)-1 & 当\ s\in{}^{\bullet}t-t^{\bullet}\\ M(s)+1 & 当\ s\in t^{\bullet}-{}^{\bullet}t\\ M(s) & 其它\end{cases}$$

到稿日期：2008-04-01 本文受国家自然科学基金(60673053)资助。

岳 昊(1980—)，男，博士研究生，CCF 学生会员，研究方向为 Petri 网理论及应用，E-mail：yuehao1980@163.com；吴哲辉(1941—)，男，教授，博导，CCF 理事，研究方向为 Petri 网理论及应用、算法设计与分析、形式语言与自动机理论等。

Petri 网的网结构可用关联矩阵来表示，矩阵的每行对应一个库所，每列对应一个变迁，若变迁的发生使得库所的标记增加或减少一个，则关联矩阵中对应元素的值为 1 或 −1，否则为 0。为了表述方便，在本文中，网的关联矩阵的行对应于库所，列对应于变迁，这同文献[1]中的约定正好相反，用这种方法定义的关联矩阵，有关文献一般都用 C 表示而不用 A，不失一般性，在本文中，我们依然用 A 来表示网的关联矩阵。在这种定义下，对网的关联矩阵进行行对换对应将库所编号对换，列对换对应将变迁编号对换，两种操作对 Petri 网结构性质和动态性质都没有影响。另外，为了表述方便，在本文中我们作出以下 3 个约定：

1)一般地，设 P 为一个集合，则非负整数 $|P|$ 表示集合 P 中元素的个数。例如对于定义 1 而言，$|S|$ 表示 Petri 网 Σ 的库所数。

2)一般地，设 X_i 为分量个数为 n_i 的列向量，$(i=1,2\cdots,p)$，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_p)^T$ 表示含有 $\sum_{i=1}^{p}n_i$ 个分量的列向量。

3)零向量依然用“0”表示，在不同的地方根据上下文不难看出它的分量个数。

Petri 网 T-不变量和 S-不变量的有关定义在 Petri 网的经典文献[3]中已有表述，T-不变量定义为方程 $AX=0$ 的任意其分量为整数的解 X，文献[3]中随后定义的极小 T-不变量和极小支集上的极小-不变量都是针对非负的 T-不变量，即方程 $AX=0$ 的非负整数解。在 Petri 网国内的经典专著文献[4]中，T-不变量的定义同文献[3]，极小 T-不变量（文献[4]中称为最小 T-不变量）的定义也是针对非负的 T-不变量。因此本文沿用国内另一经典专著文献[1]中的定义，将非平凡非负 T-不变量称为 T-不变量；S-不变量情况相同。

定义 2[1]　设 $N=(S,T;F)$ 为一个网，A 为网 N 的关联矩阵，如果非平凡的非负整数向量 X 满足 $AX=0$，则称 X 为 N 的一个 T-不变量，称 $\|X\|=\{t_i\in T|X(i)>0\}$ 为 T-不变量 X 的支集(support)，或记为 $supp(X)$。其中非平凡的非负整数向量是指这个向量的分量不全为 0 且每一个分量都是非负整数。

定义 3[1]　设 $N=(S,T;F)$ 为一个网，$S_1\subseteq S$，$T_1\subseteq T$，$N_1=(S_1,T_1;F_1)$ 是 N 的由 S_1 和 T_1 所确定的子网，即

$$F_1=((S_1\times T_1)\cup(T_1\times S_1))\cap F$$

则：

1)子网 N_1 的外延定义为

$${}^\cdot N_1\cup N_1^\cdot=\{x\in(S-S_1)\cup(T-T_1)\mid\exists y\in S_1\cup T:x\in{}^\cdot y\cup y^\cdot\}$$

2)若 ${}^\cdot N_1\cup N_1^\cdot\subseteq T-T_1$，则称 N_1 为 N 的一个库所型子网；

3)若 ${}^\cdot N_1\cup N_1^\cdot\subseteq S-S_1$，则称 N_1 为 N 的一个变迁型子网。

定义 4[1]　设 $N=(S,T;F)$ 和 $N_1=(S_1,T_1;F_1)$ 为两个网，$s_1\in S$，$t_1\in T$。用网 N_1 替换网 N 中的库所 s_1 是指产生一个新网 N'，使得 N_1 是 N' 的一个库所型子网，而且 N_1 在 N' 中的地位相当于 s_1 在网 N 中的地位。N' 的形式描述为：

$$N'=((S-\{s_1\})\cup S_1,T\cup T_1;F')$$

$$F'=(F-F(s_1))\cup F_1\cup F'(N,N_1)$$

其中

$$F(s_1)=F\cap(\{s_1\}\times T\cup T\times\{s_1\}),$$

$$F'(N,N_1)\subseteq\{(s,t),(t,s)|s\in S_1,t\in T\}$$

满足条件

a) $|F'(N,N_1)|=|F(s_1)|$

b) $\forall t\in T:(t\in{}^\cdot s_1\Leftrightarrow\exists s\in S_1:t\in{}^\cdot s)\wedge(t\in s_1^\cdot\Leftrightarrow\exists s\in S_1:t\in s^\cdot)$

类似地可以定义对变迁的替换，在此不再赘述，详细请参见文献[1]。

3　Petri 网替换运算的不变量保持条件

如上节所述，替换运算可以分为两种：对库所的替换或对变迁的替换，对库所的替换必须用库所型子网，对变迁的替换必须用变迁型子网。由于对于一个网来说，其逆对偶网的 T-不变量恰好是这个网的 S-不变量；对这个网施行库所替换操作恰好对应于对其逆对偶网施行相应的变迁替换操作，所以我们仅考虑对库所替换的情形，对变迁替换的情形可以类似地推出。

设网 $N=(S,T;F)$ 是轮廓模型，其关联矩阵为 A，库所型子网 $N_1=(S_1,T_1;F_1)$ 是子系统模型，其关联矩阵为 A_1，$N'=(S',T';F')$ 是加细模型，其关联矩阵为 A'，被子网 N_1 替换的库所设为 s_r。由于是将一个库所替换为一个库所型子网，这时 N_1 的外延都是变迁，因此可以将 N 中的变迁划分为 UT 和 AT，即 $T=AT\cup UT$，$UT\cap AT=\emptyset$，其中 $AT={}^\cdot N_1\cup N_1^\cdot$，$UT=T-AT$；将 N 中的库所划分成 US 和 $\{s_r\}$，即 $S=US\cup\{s_r\}$，其中 $US=S-\{s_r\}$。这样划分实际上是分别把 N 的变迁与库所分成受替换运算影响的部分和不受替换运算影响的部分。在这种划分的基础上，通过行对换和列对换将 N 的关联矩阵化成如下形式：

$$A=\begin{array}{c} \\ US \\ s_r\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} UT & AT\end{array}\\ \begin{pmatrix}\mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2\\ 0 & \mathrm{II}_3\end{pmatrix}\end{array}\tag{1}$$

引理 1　II_3 是行数为 1，列数为 $|AT|$，元素在 $\{1,-1\}$ 中的矩阵。

将 N 中的库所 s_r 替换为库所型子网 N_1，得到网 N'，N' 的关联矩阵 A' 形式如下：

$$A'=\begin{array}{c} \\ US \\ S_1\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} UT & AT & T_1\end{array}\\ \begin{pmatrix}\mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & 0\\ 0 & \mathrm{I}_2 & \mathrm{I}_1\end{pmatrix}\end{array}$$

其中子矩阵 I_1 是 N_1 的关联矩阵，$\mathrm{I}_1=A_1$，子矩阵 I_2 反映了 N_1 同变迁子集 AT 的连接关系，即 $F'(N,N_1)$。

引理 2　子矩阵 I_2 的每一列有且仅有一个 1 或 −1。

定义 5　若 X 是网 $N=(S,T;F)$ 的一个 T-不变量，$T_1\subseteq T$ 是一个变迁子集，则 $|T_1|$ 维列向量 $X|_{T_1}$ 称为 X 在 T_1 上的投影，其中对于 $\forall t_i\in T_1$，有 $X|_{T_1}(t_i)=X(t_i)$。

在本文以下的讨论中，前提条件都是对轮廓模型 N 的库所 s_r 用子系统模型 N_1 施行库所替换运算得到加细模型 N'，并且 N 的关联矩阵已经是式(1)的形式，有关 N，N_1 和 N' 的说明在本节开头部分。

定理 1　非平凡非负整数向量 X_0，X_1 维数分别为 $|T|$ 和 $|T_1|$，若 $supp(X_0)\subseteq T$，$supp(X_0)\cap AT=\emptyset$，$supp(X_1)\subseteq T_1$，则 $X'=\begin{pmatrix}X_0\\X_1\end{pmatrix}$ 是加细模型 N' 的一个 T-不变量，当且仅当 X_0 是轮廓模型 N 的一个 T-不变量且 X_1 是子系统模

型 N_1 的一个 T-不变量。

证明（必要性）：已知 $X'=\begin{pmatrix}X_0\\ X_1\end{pmatrix}$是加细模型 N'的一个 T-不变量，则

$$A'X'=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}UT & AT & T_1\end{matrix}\\ \begin{matrix}US\\ S_1\end{matrix} & \begin{pmatrix}\mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & 0\\ 0 & \mathrm{I}_2 & \mathrm{I}_1\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}X_{0U}\\ X_{0A}\\ X_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathrm{II}_1X_{0U}+\mathrm{II}_2X_{0A}\\ \mathrm{I}_2X_{0A}+\mathrm{I}_1X_1\end{pmatrix}=0$$

其中 $X_{0U}=X_0|_{UT}$，$X_{0A}=X_0|_{AT}$，则

$\mathrm{II}_1X_{0U}+\mathrm{II}_2X_{0A}=0$

$\mathrm{I}_2X_{0A}+\mathrm{I}_1X_1=0$

由 $supp(X_0)\cap AT=\emptyset$ 知 $X_{0A}=0$，故

$\mathrm{II}_1X_{0U}=0$，$\mathrm{I}_1X_1=0$

而

$$AX_0=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}UT & AT\end{matrix}\\ \begin{matrix}US\\ s_r\end{matrix} & \begin{pmatrix}\mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2\\ 0 & \mathrm{II}_3\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}X_{0U}\\ X_{0A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{II}_1X_{0U}+\mathrm{II}_2X_{0A}\\ \mathrm{II}_3X_{0A}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathrm{II}_1X_{0U}\\ 0\end{pmatrix}$$

所以 $AX_0=0$，X_0 是轮廓模型 N 的 T-不变量；由于 $A_1X_1=I_1X_1=0$，所以 X_1 是子系统模型 N_1 的 T-不变量。

（充分性）类似可证。 □

推论 1 $|T|$维非平凡非负整数向量 X_0，$supp(X_0)\subseteq T$，$supp(X_0)\cap AT=\emptyset$，若 X_0 是轮廓模型 N 的一个 T-不变量，则（$|S|-1+|S_1|$）维列向量 $X'=\begin{pmatrix}X_0\\ 0\end{pmatrix}$是加细模型 N'的一个 T-不变量。

推论 2 $|T_1|$维非平凡非负整数向量 X_1，若 X_1 是子系统模型 N_1 的一个 T-不变量，则（$|S|-1+|S_1|$）维列向量 $X'=\begin{pmatrix}0\\ X_1\end{pmatrix}$是加细模型 N'的一个 T-不变量。

定义 6 库所型子网 $N_1=(S_1,T_1;F_1)$加上它的外延 $^{\cdot}N_1\cup N_1^{\cdot}$ 所构成的网$\widetilde{N}_1=(S_1,\widetilde{T}_1;\widetilde{F}_1)$称为 N_1 的外延网，其中$\widetilde{T}_1=T_1\cup({}^{\cdot}N_1\cup N_1^{\cdot})=T_1\cup AT$，$\widetilde{F}_1=F_1\cup F'(N,N_1)$。

根据定义 6 知 N_1 的外延网$\widetilde{N}_1$的关联矩阵为

$$\widetilde{A}_1=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}AT & T_1\end{matrix}\\ S_1 & (\begin{matrix}\mathrm{I}_2 & \mathrm{I}_1\end{matrix})\end{array}。$$

定理 2 非平凡非负整数向量 X_0，$\widetilde{X}_1$维数分别为$|T|$和$|\widetilde{T}_1|$，若 $supp(X_0)\subseteq T$，$supp(\widetilde{X}_1)\subseteq\widetilde{T}_1$，记

$X_{0U}=X_0|_{UT}$，$X_{0A}=X_0|_{AT}$，$X_{1T_1}=\widetilde{X}_1|_{T_1}$，$X_{1A}=\widetilde{X}_1|_{AT}$

且 $X_{0A}=X_{1A}\neq 0$，那么若 X_0 是 N 的一个 T-不变量且$\widetilde{X}_1$是$\widetilde{N}_1$的一个 T-不变量，则 $X'=\begin{pmatrix}X_{0U}\\ X_{0A}\\ X_{1T_1}\end{pmatrix}$是 N′的一个 T-不变量。

证明：已知 X_0 是 N 的一个 T-不变量，则

$$0=AX_0=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}UT & AT\end{matrix}\\ \begin{matrix}US\\ s_r\end{matrix} & \begin{pmatrix}\mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2\\ 0 & \mathrm{II}_3\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}X_{0U}\\ X_{0A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{II}_1X_{0U}+\mathrm{II}_2X_{0A}\\ \mathrm{II}_3X_{0A}\end{pmatrix} \tag{2}$$

已知$\widetilde{X}_1$是$\widetilde{N}_1$的一个 T-不变量，则

$$0=\widetilde{X}_1\widetilde{A}_1=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}AT & T_1\end{matrix}\\ S_1 & (\begin{matrix}\mathrm{I}_2 & \mathrm{I}_1\end{matrix})\end{array}\begin{pmatrix}X_{1A}\\ X_{1T_1}\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{I}_2X_{1A}+\mathrm{I}_1X_{1T_1}=\mathrm{I}_2X_{0A}+\mathrm{I}_1X_{1T_1} \tag{3}$$

下面考查 $A'X'$，有

$$A'X'=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}UT & AT & T_1\end{matrix}\\ \begin{matrix}US\\ S_1\end{matrix} & \begin{pmatrix}\mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & 0\\ 0 & \mathrm{I}_2 & \mathrm{I}_1\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}X_{0U}\\ X_{0A}\\ X_{1T_1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathrm{II}_1X_{0U}+\mathrm{II}_2X_{0A}\\ \mathrm{I}_2X_{0A}+\mathrm{I}_1X_{1T_1}\end{pmatrix}=0$$

故 X'是 N'的一个 T-不变量。 □

对于 S-不变量来说，有如下 3 个定理：

定理 3 $|S|$维非平凡非负整数行向量 Y，若 $supp(Y)\subseteq S$，$s_r\notin supp(Y)$，则

$Y=(Y(1),Y(2),\cdots,Y(|S|-1),Y(|S|))$

$=(Y(1),Y(2),\cdots,Y(|S|-1),0)$

是 N 的一个 S-不变量，当且仅当 $Y'=(Y_0,0)$是 N'的一个 S-不变量，其中 $Y_0=(Y(1),Y(2),\cdots,Y(|S|-1))$，0 是一个$|S_1|$维列向量。

证明（必要性）：由于 $s_r\notin supp(Y)$，所以由 N 的关联矩阵 A 的形式(1)知 $Y(|S|)=0$，$Y=(Y_0,0)$。已知 Y 是 N 的一个 S-不变量，所以

$$0=YA=(Y_0,0)\begin{array}{cc} & \begin{matrix}UT & AT\end{matrix}\\ \begin{matrix}US\\ s_r\end{matrix} & \begin{pmatrix}\mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2\\ 0 & \mathrm{II}_3\end{pmatrix}\end{array}=(Y_0\mathrm{II}_1,Y_0\mathrm{II}_2)$$

因此

$$Y'A'=(Y_0,0)\begin{array}{cc} & \begin{matrix}UT & AT & T_1\end{matrix}\\ \begin{matrix}US\\ S_1\end{matrix} & \begin{pmatrix}\mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & 0\\ 0 & \mathrm{I}_2 & \mathrm{I}_1\end{pmatrix}\end{array}=(Y_0\mathrm{II}_1,Y_0\mathrm{II}_2,0)$$

$$=0$$

$Y'=(Y_0,0)$是 N'的一个 S-不变量。

（充分性）类似可证。 □

定理 4 $|S|$维非平凡非负整数行向量 Y，若 $supp(Y)\subseteq S$，$s_r\in supp(Y)$，$|S_1|$维 0，1 行向量 Y_p 满足 $supp(Y_p)\subseteq S_1$ 且 I_2（I_2 是 N'关联矩阵 A'的子矩阵）的由 $supp(Y_p)$生成的矩阵中－1 和 1 的数目一共恰有$|AT|$个，记

$Y=(Y(1),Y(2),\cdots,Y(|S|-1),Y(s_r))=(Y_0,Y(s_r))$

则 Y 是 N 的一个 S-不变量，且 Y_p 是 N_1 的一个 S-不变量，当且仅当 $Y'=(Y_0,Y(s_r)Y_p)$是 N'的一个 S-不变量。

证明（必要性）：已知 Y 是 N 的一个 S-不变量，且 Y_p 是 N_1 的一个 S-不变量，则一方面：

$$0=YA=(Y_0,Y(s_r))\begin{array}{cc} & \begin{matrix}UT & AT\end{matrix}\\ \begin{matrix}US\\ s_r\end{matrix} & \begin{pmatrix}\mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2\\ 0 & \mathrm{II}_3\end{pmatrix}\end{array}$$

$$=(Y_0\mathrm{II}_1,Y_0\mathrm{II}_2+Y(s_r)\mathrm{II}_3)$$

所以

$$Y_0\mathrm{II}_1=0,Y_0\mathrm{II}_2+Y(s_r)\mathrm{II}_3=0 \tag{4}$$

另一方面：

$$0=Y_pA_1=Y_p\mathrm{I}_1 \tag{5}$$

下面考查 $Y'A'$

$$Y'A'=(Y_0,Y(s_r)Y_p)\begin{array}{c}\\ US\\ S_1\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}UT & AT & T_1\end{array}\\ \begin{pmatrix}\text{Ⅱ}_1 & \text{Ⅱ}_2 & 0\\ 0 & \text{Ⅰ}_2 & \text{Ⅰ}_1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$=(Y_0\text{Ⅱ}_1,Y_0\text{Ⅱ}_2+Y(s_r)Y_pI_2,Y(s_r)Y_pI_1)$$

由引理1、引理2知Ⅱ_3是元素为1，−1的行向量，Ⅰ_2的每一列有且仅有一个1或−1，结合Y_p满足的条件知$Y_pI_2=\text{Ⅱ}_3$，结合式(4)、式(5)知$Y'A'=0$，故$Y'=(Y_0,Y(s_r)Y_p)$是N'的一个S-不变量。

(充分性)类似可证。 □

定理5 $|S_1|$维非平凡非负整数行向量Y_1，满足$supp(Y_1)\subseteq S_1$且$Y_1\text{Ⅰ}_2=0$，则Y_1是N_1的一个S-不变量，当且仅当$(|S|-1+|S_1|)$维行向量$Y'=(0,Y_1)$是N'的一个S-不变量。

证明(必要性)：已知Y_1是N_1的一个S-不变量，则$0=Y_1A_1=Y_1\text{Ⅰ}_1$，所以结合$Y_1\text{Ⅰ}_2=0$知

$$Y'A'=(0,Y_1)\begin{array}{c}\\ US\\ S_1\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}UT & AT & T_1\end{array}\\ \begin{pmatrix}\text{Ⅱ}_1 & \text{Ⅱ}_2 & 0\\ 0 & \text{Ⅰ}_2 & \text{Ⅰ}_1\end{pmatrix}\end{array}=(0,Y_1\text{Ⅰ}_2,Y_1\text{Ⅰ}_1)$$

$$=0$$

$Y'=(0,Y_1)$是N'的一个S-不变量。

(充分性)类似可证。 □

3 举例

本例中的网均取自文献[1]，如图1—图4所示，轮廓模型为$N=(S,T;F)$，被替换的库所设为s_r，其中$S=US\cup\{s_r\}$，$US=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$，$s_r=s_5$，$T=AT\cup UT$，$UT=\{t_1,t_2,t_3\}$，$AT=\{t_4,t_5\}$；子系统模型为$N_1=(S_1,T_1;F_1)$，其中$S_1=\{s_{11},s_{12},s_{13},s_{14},s_{15}\}$，$T_1=\{t_{11},t_{12},t_{13},t_{14}\}$；外延网为$\widetilde{N}_1=(S_1,\widetilde{T}_1;\widetilde{F}_1)$，其中$\widetilde{T}_1=T_1\cup AT=\{t_{11},t_{12},t_{13},t_{14},t_4,t_5\}$；加细模型为$N'=(S',T';F')$，其中$S'=US\cup S_1=\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_{11},s_{12},s_{13},s_{14},s_{15}\}$，$T'=AT\cup UT\cup T_1=\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_{11},t_{12},t_{13},t_{14}\}$。

1)由于$X_0=(1,1,1,1,1)^T$是N的一个T-不变量，$\widetilde{X}_1=(1,0,1,0,1,1)^T$是$\widetilde{N}_1$的一个T-不变量，$X_{0A}=X_0|_{AT}=(1,1)^T$，$X_{1A}=\widetilde{X}_1|_{AT}=(1,1)^T$，$X_{0A}=X_{1A}\neq 0$，所以根据定理2知

$$X'=(1,1,1,1,1,1,0,1,0)^T$$

是N'的一个T-不变量。

2)由于$Y=(1,1,1,1,1)^T$是N的一个S-不变量，0，1行向量$Y_p=(1,1,0,1,1)^T$是N_1的一个S-不变量，$supp(Y_p)=\{s_{11},s_{12},s_{14},s_{15}\}$，满足定理4的条件，所以根据定理4的必要性知$Y'=(1,1,1,1,1,1,0,1,1)^T$是$N'$的一个S-不变量。

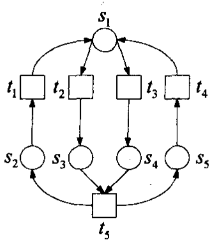

图1 网N

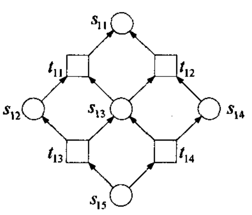

图2 网N_1

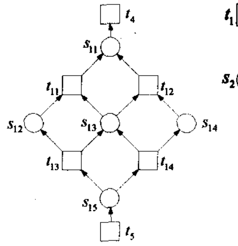

图3 网$\widetilde{N}_1$

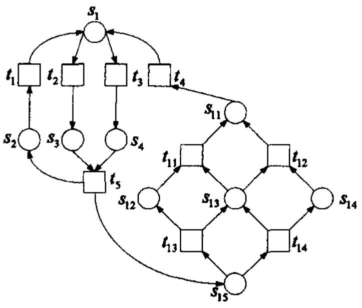

图4 网N'

结束语 本文提出了Petri网替换运算的不变量保持条件，根据这些条件，我们可以由轮廓模型N和子系统模型N_1的T-不变量(S-不变量)得到加细模型N'的T-不变量(S-不变量)。T-不变量和S-不变量是对Petri网进行结构性质分析的重要工具，但对于T-不变量或-不变量的求取至今未找到有效的算法，求取Petri网、特别是大规模系统Petri网模型的不变量，常常要耗费大量的计算时间和存储空间。采用本文的方法就可以充分利用已知的轮廓模型N和子系统模型N_1的T-不变量(S-不变量)，避免从头处理加细模型N'，以达到节省计算开支的目的。

参考文献

[1] 吴哲辉. Petri网导论[M]. 北京：机械工业出版社，2006

[2] Peterson J L. Petri网理论与系统模拟[M]. 吴哲辉，译. 徐州：中国矿业大学出版社，1989

[3] Murata T. Petri nets: properties, analysis and application[J]. IEEE, 1989, 77(4): 541-579

[4] 袁崇义. Petri网原理与应用[M]. 北京：电子工业出版社，2005

[5] Cheung To-yat, Zeng Wei. Invariant-Preserving Transformations for the Verification of Place/Transition Systems [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics——Part A: Systems and Humans, 1998, 28(1): 114-121

[6] Zuberek W M. Stepwise Refinements of Net Models and Their Place Invariants [J]//Proceedings of the The 8th International Workshop on Petri Nets and Performance Models. IEEE Computer Society Washington, DC, USA. ISBN: 0-7695-0331-4 92-101. 1999

[7] Bourjij A, Boutayeb M, Cecchin T. A Decentralized Approach for Computing Invariants in Large Scale and Interconnected Petri Nets[J]. IEEE, 0-7SO3453-1/ 1997

[8] Bourjij A, Boutayeb M, Cecchin T. On Generating a Basis of Invariants in Petrinets[J]. IEEE, 0-7803-4053-1/97/ 1997

[9] Chong-Fatt Law. Gwee B, Chang J S. Optimized Algorithm for Computing Invariants of Ordinary Petri Nets [J]// Computer and Information Science, 2006 and 2006 1st IEEE/ACIS International Workshop on Component-Based Software Engineering. Software Architecture and Reuse. ICIS-COMSAR 2006. 5th IEEE/ACIS International Conference on. ISBN: 0-7695-2613-6. 2006: 23-28

[10] Suzuki I, Murata T. A Method for Stepwise Refinement and Abstraction of Petri Nets [J]. Journal of Computer and System Science, 1983, 27(1): 51-76