二元关系的复合与近似算子的合成

徐优红
(浙江海洋学院数理与信息学院 舟山 316004)

摘 要 定义了各种类型的经典二元关系和模糊二元关系,讨论了二元关系的合成及其性质。给出了两个近似空间合成的概念,并讨论合成前的近似空间所导出的近似算子与合成后的近似空间所导出的近似算子之间的关系。证明了合成后的近似空间所导出的近似算子恰好是两个近似空间所导出的近似算子的合成。

关键词 二元关系,近似空间,近似算子,粗糙集

On Compounds of Binary Relations and Compositions of Approximation Operators

XU You-hong
(School of Mathematics, Physics, and Information Science, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316004, China)

Abstract Concepts of various types of crisp binary relations as well as fuzzy binary relations were defined, compounds of binary relations were investigated and their properties were examined. Compositions of approximation spaces and approximation operators were also defined. The relationship between approximation operators derived from two approximation spaces and the ones from the compound approximation spaces was investigated. It was proved that approximation operators induced from a compound of two approximation spaces are identical with the compounds of the approximation operators derived respectively from the two approximation spaces.

Keywords Binary relations, Approximation spaces, Approximation operators, Rough sets

1 引言

粗糙集理论[1,2,8]的基本要素是近似空间,它是由所研究和讨论的对象集(即论域)和定义其上面的一个二元关系所构成。由这个近似空间可以导出粗糙集理论中一对基本概念:下近似算子和上近似算子。这一对近似算子是粗糙集理论构成和应用研究的基础。在粗糙集应用中近似算子的构造多数是基于二元关系这个基本概念,由此可见,对象集上的二元关系在粗糙集的定义上起着至关重要的作用。迄今为止,粗糙集理论在数据挖掘中的应用大多数只考虑来自于单一信息源的情形,特别地,一个信息系统中的属性值可能是另一个信息系统中的对象,因此,近似空间的合成在粗糙集理论研究中具有重要的意义。对于具有不同性质的二元关系,可以得到具有不同性质的近似空间,其导出的近似算子性质也各不相同。同时具有各种不同性质的二元关系所导出的近似算子具有怎样的性质,定义在不同论域中两个二元关系的合成所导出的近似算子性质,与合成前两个关系各自所导出的近似空间和近似算子又有怎样的关系,近似算子在各种信息系统中的知识表示的作用等等是粗糙集理论和应用研究需要解决的问题,也是本文研究的主要目的。

本文讨论了二元关系的复合及其性质,并研究了粗糙集理论中两个近似空间的合成与算子复合问题。所得结论为多个近似空间合成后的近似算子的计算提供了方便。

2 二元关系及其复合

设 X 是非空有限集合,记 $P(X)$ 与 $F(X)$ 分别为 X 的经典与模糊子集全体。记单位区间 $I=[0,1]$,对于 $A\in F(X)$,$A(x)$ 表示 x 属于模糊集合 A 的隶属度。记 $\sim A$ 为 A 的补集。对于经典集 $A\in P(X)$,记 1_A 为 A 的特征函数,即若 $x\in A$,则 $1_A(x)=1$,否则 $1_A(x)=0$,记 1_y 为单点集 $\{y\}$ 的特征函数。对于 $\alpha\in I$,$\hat{\alpha}$ 表示隶属函数取值恒为 α 的常数模糊集。

定义 2.1[5,6] 设 U 和 W 是两个非空有限论域,称 $R\subseteq U\times W$ 是从 U 到 W 的一个二元关系。若 $(x,y)\in R$,称 y 为 x 关于关系 R 的后继,简称为后继,x 为 y 的前继。$\forall x\in U$,记

$$R_s(x)=\{y\in W:(x,y)\in R\}$$

$R_s(x)$ 称为 x 关于关系 R 的后继邻域。若 $\forall x\in U$,存在 $y\in W$ 使 $(x,y)\in R$,即 $R_s(x)\neq\emptyset$,则称 R 为串行关系(Serial Relation)。若 $U=W$,则称 $R\subseteq U\times U$ 为 U 上的一个二元关系。对于 U 上的二元关系 R,若 $\forall x\in U$,存在 $y\in U$ 使 $(y,x)\in R$,即 $\bigcup_{x\in U}R_S(x)=U$,则称关系 R 是逆串行的(Inverse Serial);若 $\forall x\in U$,有 $(x,x)\in R$,即 $x\in R_s(x)$,则称关系 R 是自反的(Reflexive);若 $\forall(x,y)\in U\times U$,$(x,y)\in R$ 蕴涵 $(y,x)\in R$,则称关系 R 是对称的(Symmetric);若 $\forall x,y,z\in U$,$(x,y)\in R$ 与 $(y,z)\in R$ 蕴涵 $(x,z)\in R$,则称关系 R 是传递的(Transitive);若 $\forall x,y,z\in U$,$(x,y)\in R$ 和 $(x,z)\in R$ 蕴涵 $(y,z)\in R$,则称关系 R 是欧几里得的(Euclidean);若 R 是自反和对称

到稿日期:2008-05-21 本文获得国家自然科学基金项目(No. 60673096),浙江省自然科学基金项目(No. Y107262)和浙江省教育厅科研计划项目(No. 20070329)资助。

徐优红(1969-),女,副教授,主要研究方向为粗糙集理论及其应用。

的，则称关系 R 是相容的(Tolerant)；若 R 是自反、对称和传递的二元关系，则称关系 R 是等价的(Equivalent)。

定义 2.2 设 U,V,W 是 3 个非空有限论域，R 是从 U 到 V 上的二元关系，S 是从 V 到 W 上的二元关系，记

$$R\circ S=\{(u,w)\in U\times W:\exists v\in V((u,v)\in R,(v,w)\in S)\}$$

则 $R\circ S$ 是从 U 到 W 上的二元关系，称为关系 R 与 S 的复合关系。特别地，若 R 是 U 上的二元关系，记 $R^2=R\circ R$，更一般地，对于正整数 $k\geqslant 2$，记 $R^{k+1}=R^k\circ R$。

由定义 2.1 知，若 R 是 U 上的自反关系，则 R 一定是串行和逆串行的，并且以下定理 2.1 成立：

定理 2.1 设 R 是 U 上的二元关系，则

(1) 若 R 是自反和欧几里得关系，则 R 是对称关系。

(2) 若 R 是自反和欧几里得关系，则 R 是传递关系。

(3) R 是自反和欧几里得关系当且仅当 R 是等价关系。

定理 2.2 设 R 是 U 上的二元关系，则

(1) 若 R 是串行和对称的，则 R^2 是自反的。

(2) 若 R^2 是自反的，则 R 既是串行的又是逆串行的。

证明：(1) $\forall x\in U$，由于 R 是串行的，存在 $y\in U$ 使 $(x,y)\in R$，又因为 R 是对称的，所以 $(y,x)\in R$，从而 $(x,x)\in R\circ R=R^2$，即 R^2 是自反的。

(2) $\forall x\in U$，由于 R^2 是自反的，故 $(x,x)\in R^2$，从而存在 $y\in U$，使 $(x,y)\in R$ 且 $(y,x)\in R$，故 R 既是串行的又是逆串行的。

定理 2.3 设 R 是 U 上的对称关系，则 R 是传递关系当且仅当 R 是欧几里得关系。

证明：设 R 是对称和传递的二元关系，$\forall x,y,z\in U$，若 $(x,y)\in R$ 且 $(x,z)\in R$，由于 R 是对称的，从而 $(y,x)\in R$。又由于 R 是传递的，从而由 $(y,x)\in R$ 和 $(x,z)\in R$ 可得 $(y,z)\in R$，于是 R 是欧几里得关系。

反之，若 R 是对称和欧几里得关系，$\forall x,y,z\in U$，若 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$，由于 R 是对称的，因此 $(y,x)\in R$，又由于 R 是欧几里得关系，从而由 $(y,x)\in R$ 和 $(y,z)\in R$ 可得 $(x,z)\in R$，于是 R 是传递关系。

定理 2.4 设 R 是 U 上的二元关系，则

(1) 若 R 是串行、对称和传递的二元关系，则 R 是自反关系。

(2) 若 R 是串行、对称和传递的二元关系，则 R 是等价关系。

证明：(1) $\forall x\in U$，由于 R 是串行的，因此存在 $y\in U$ 使 $(x,y)\in R$，又因为 R 是对称的，从而 $(y,x)\in R$。由于 R 是传递的，故由 $(x,y)\in R$ 和 $(y,x)\in R$ 得 $(x,x)\in R$，即 R 是自反的。

(2) 由(1)即得。

定理 2.5 设 R 是 U 上的二元关系，则

(1) 若 R 是串行、对称和欧几里得二元关系，则 R 是自反关系。

(2) 若 R 是串行、对称和欧几里得二元关系，则 R 是等价关系。

证明：(1) 由定理 2.3 知，对称和欧几里得关系一定是传递关系，从而由定理 2.4 知 R 是自反的。

(2) 由(1)即得。

定义 2.3[4] 设 U 和 W 是两个非空论域，模糊子集 $R\in F(U\times W)$ 称为从 U 到 W 上的一个模糊二元关系，对于 $(x,y)\in U\times W$，$R(x,y)$ 是 x 与 y 具有关系 R 的程度。若 $\forall x\in U$，存在 $y\in W$，使得 $R(x,y)=1$，则称 R 是串行模糊关系；当 $U=W$ 时，$R\in F(U\times U)$ 称为 U 上的模糊二元关系，若 $\forall x\in U$ 有 $R(x,x)=1$，则称 R 是自反模糊关系；若 $\forall x,y\in U$ 有 $R(x,y)=R(y,x)$，则称 R 为对称模糊关系；若 $\forall x,z\in U$ 有

$$R(x,z)\geqslant\bigvee_{y\in U}(R(x,y)\wedge R(y,z))$$

则称 R 是传递模糊关系；若 $\forall y,z\in U$ 有 $R(y,z)\geqslant\bigvee_{x\in U}(R(x,y)\wedge R(x,z))$，则称 R 是欧几里得模糊关系；若 R 是自反、对称和传递模糊关系，则称 R 是等价模糊关系。

定义 2.4 设 U,V,W 是三个非空有限论域，R 是从 U 到 V 上的模糊二元关系，S 是从 V 到 W 上的模糊二元关系，对于 $(u,w)\in U\times W$，记

$$R\circ S(u,w)=\bigvee_{v\in V}(R(u,v)\wedge S(v,w))$$

则 $R\circ S$ 是从 U 到 W 上的模糊二元关系，称为关系 R 与 S 的模糊复合关系。特别地，若 R 是 U 上的模糊二元关系，记 $R^2=R\circ R$，更一般地，对于正整数 $k\geqslant 2$，记 $R^{k+1}=R^k\circ R$。

不难验证以下定理成立：

定理 2.6 设 R 是从 U 到 W 上的模糊二元关系，则

(1) R 是串行模糊关系当且仅当对于任意 $\alpha\in I$，R_α 是串行经典关系。

若 R 是 U 上的模糊二元关系，则

(2) R 是自反模糊关系当且仅当对于任意 $\alpha\in I$，R_α 是自反经典关系。

(3) R 是对称模糊关系当且仅当对于任意 $\alpha\in I$，R_α 是对称经典关系。

(4) R 是传递模糊关系当且仅当对于任意 $\alpha\in I$，R_α 是传递经典关系。

(5) R 是欧几里得模糊关系当且仅当对于任意 $\alpha\in I$，R_α 是欧几里得经典关系。

(6) R 是等价模糊关系当且仅当对于任意 $\alpha\in I$，R_α 是等价经典关系。

由定义 2.3 知，若 R 是 U 上的自反模糊关系，则 R 一定是串行模糊关系。类似于经典情形，由定理 2.1—2.6 可得以下定理 2.7—2.11 成立。

定理 2.7 设 R 是 U 上的模糊二元关系，则

(1) 若 R 是自反和欧几里得模糊关系，则 R 是对称模糊关系。

(2) 若 R 是自反和欧几里得模糊关系，则 R 是传递模糊关系。

(3) R 是自反和欧几里得模糊关系当且仅当 R 是等价模糊关系。

定理 2.8 若 R 是 U 上的模糊二元关系，则

(1) 若 R 是串行和对称模糊关系，则 R^2 是自反模糊关系。

(2) 若 R^2 是自反模糊关系，则 R 是串行模糊关系。

定理 2.9 设 R 是 U 上的对称模糊关系，则 R 是传递模糊关系当且仅当 R 是欧几里得模糊关系。

定理 2.10 设 R 是 U 的模糊二元关系，则

(1) 若 R 是串行、对称和传递模糊二元关系，则 R 是自反模糊关系。

(2) 若 R 是串行、对称和传递模糊二元关系，则 R 是等价

模糊关系。

定理 2.11 设 R 是 U 上的模糊二元关系，则

(1) 若 R 是串行、对称和欧几里得模糊二元关系，则 R 是自反模糊关系。

(2) 若 R 是串行、对称和欧几里得模糊二元关系，则 R 是等价模糊关系。

3 近似算子的合成

当一个经典集合被一个广义经典近似空间描述时我们可以得到广义经典粗糙集。

定义 3.1[5,6] 设 R 是从 U 到 W 上的一个二元经典关系，称三元组 (U,W,R) 为广义近似空间。$\forall A\in P(W)$，A 关于近似空间 (U,W,R) 的上近似 $\overline{R}(A)$ 与下近似 $\underline{R}(A)$ 分别定义如下：

$$\underline{R}(A)=\{x\in U:R_S(x)\subseteq A\}$$
$$\overline{R}(A)=\{x\in U:R_S(x)\cap A\neq\emptyset\} \tag{3.1}$$

序对 $(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 称为广义经典粗糙集，算子 $\underline{R}$ 与 $\overline{R}:P(W)\to P(U)$ 分别称为（广义）粗糙下、上近似算子。显然，若 $U=W$ 且 R 是 U 上的等价关系，则对于 $A\in P(U)$ 有，

$$\underline{R}(A)=\{x\in U:[x]_R\subseteq A\}=\bigcup\{[x]_R:[x]_R\subseteq A\}$$
$$\overline{R}(A)=\{x\in U:[x]_R\cap A\neq\emptyset\}=\bigcup\{[x]_R:[x]_R\cap A\neq\emptyset\}$$

故广义近似算子是 Pawlak 经典近似算子的推广形式。

定理 3.1[5-7] 设 R 和 S 是从 U 到 W 上的二元经典关系，则广义粗糙近似算子满足性质：$A,B\in P(W)$，

(LP) $R\subseteq S\Rightarrow\underline{S}(A)\subseteq\underline{R}(A)$，

(UP) $R\subseteq S\Rightarrow\overline{R}(A)\subseteq\overline{S}(A)$；

(L1) $\underline{R}(A)=\sim\overline{R}(\sim A)$，

(U1) $\overline{R}(A)=\sim\underline{R}(\sim A)$；

(L2) $\underline{R}(W)=U$，

(U2) $\overline{R}(\emptyset)=\emptyset$；

(L3) $\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}(A)\cap\underline{R}(B)$，

(U3) $\overline{R}(A\cup B)=\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B)$；

(L4) $A\subseteq B\Rightarrow\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(B)$，

(U4) $A\subseteq B\Rightarrow\overline{R}(A)\subseteq\overline{R}(B)$；

(L5) $\underline{R}(A\cup B)\supseteq\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B)$，

(U5) $\overline{R}(A\cap B)\subseteq\overline{R}(A)\cap\overline{R}(B)$。

定义 3.2 设 U,V,W 为 3 个有限非空论域，$\mathscr{R}=(U,V,R)$ 和 $S=(V,W,S)$ 是两个近似空间，称 $\mathscr{R}\otimes S=(U,W,R\circ S)$ 为近似空间 $\mathscr{R}$ 与 S 的合成。对于 $A\in P(W)$，记

$$\underline{R}\circ\underline{S}(A)=\underline{R}(\underline{S}(A))$$
$$\overline{R}\circ\overline{S}(A)=\overline{R}(\overline{S}(A))$$

则 $\underline{R}\circ\underline{S}$ 和 $\overline{R}\circ\overline{S}:P(W)\to P(U)$ 分别称为下近似算子 $\underline{R}$ 与 $\underline{S}$ 的合成和上近似算子 $\overline{R}$ 与 $\overline{S}$ 的合成。

定理 3.2 设 $\mathscr{R}=(U,V,R)$ 和 $S=(V,W,S)$ 是两个近似空间，则

(1) $\overline{R}\circ\overline{S}(A)=\overline{R\circ S}(A)$，$A\in P(W)$；

(2) $\underline{R}\circ\underline{S}(A)=\underline{R\circ S}(A)$，$A\in P(W)$。

证明：(1) $\forall A\in P(W)$，$\forall x\in U$，

$x\in\overline{R}\circ\overline{S}(A)\Leftrightarrow x\in\overline{R}(\overline{S}(A))\Leftrightarrow R_S(x)\cap\overline{S}(A)\neq\emptyset$

$\Leftrightarrow\exists v\in V(v\in R_S(x),v\in\overline{S}(A))$

$\Leftrightarrow\exists v\in V(v\in R_S(x),S_S(v)\cap A\neq\emptyset)$

$\Leftrightarrow\exists v\in V(v\in R_S(x),\exists w\in W(w\in S_S(v),w\in A))$

$\Leftrightarrow\exists w\in W(w\in(R\circ S)_S(x),w\in A)$

$\Leftrightarrow(R\circ S)_S(x)\cap A\neq\emptyset$

$\Leftrightarrow x\in\overline{R\circ S}(A)$。

故 $\overline{R}\circ\overline{S}(A)=\overline{R\circ S}(A)$。

(2) $\forall A\in P(W)$，由定理 3.1 中的对偶性质 (L1) 和 (U1) 可得

$$\begin{aligned}\underline{R\circ S}(A)&=\sim\overline{R\circ S}(\sim A)=\sim\overline{R}(\overline{S}(\sim A))\\&=\sim\overline{R}(\sim\underline{S}(A))=\sim\sim\underline{R}(\underline{S}(A))\\&=\underline{R}(\underline{S}(A))=\underline{R}\circ\underline{S}(A)\end{aligned}$$

在定理 3.2 中，当 $U=V=W$，且 $R=S$ 时可以得到以下推论：

推论 3.1 设 R 是 U 上的二元关系，则

(1) $\overline{R^2}(A)=\overline{R}\circ\overline{R}(A)$，$\forall A\in P(U)$；

(2) $\underline{R^2}(A)=\underline{R}\circ\underline{R}(A)$，$\forall A\in P(U)$。

推论 3.2 设 R 是 U 上的传递关系，则

(1) $\overline{R}\circ\overline{R}(A)\subseteq\overline{R}(A)$，$\forall A\in P(U)$，

(2) $\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}\circ\underline{R}(A)$，$\forall A\in P(U)$。

证明：(1) $\forall A\in P(U)$，由于 R 是传递关系，因此 $R^2\subseteq R$，从而由近似算子的性质 (UP) 得 $\overline{R^2}(A)\subseteq\overline{R}(A)$，从而由推论 3.1 得 (1) 成立。

(2) 类似于 (1) 可得。

当一个模糊集合被一个经典近似空间描述时，我们可以得到粗糙模糊集。

定义 3.3[4] 设 (U,W,R) 为广义近似空间。$\forall A\in F(W)$，模糊集 A 关于近似空间 (U,W,R) 的上近似 $\overline{R}(A)$ 与下近似 $\underline{R}(A)$ 是 U 上的一对模糊子集，其隶属函数定义如下：

$$\overline{R}(A)(x)=\bigvee_{y\in R_S(x)}A(y),x\in U$$
$$\underline{R}(A)(x)=\bigwedge_{y\in R_S(x)}A(y),x\in U \tag{3.2}$$

序对 $(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 称为粗糙模糊集，算子 $\underline{R}$ 与 $\overline{R}:F(W)\to F(U)$ 分别称为粗糙模糊下近似算子和粗糙模糊上近似算子。

粗糙模糊近似算子满足性质：

定理 3.3[4] 设 R 和 S 是从 U 到 W 上的二元经典关系，则：$\forall A,B\in F(W)$，$\forall\alpha\in I$，

(RFLP) $R\subseteq S\Rightarrow\underline{S}(A)\subseteq\underline{R}(A)$，

(RFUP) $R\subseteq S\Rightarrow\overline{R}(A)\subseteq\overline{S}(A)$；

(RFL1) $\underline{R}(A)=\sim\overline{R}(\sim A)$，

(RFU1) $\overline{R}(A)=\sim\underline{R}(\sim A)$，

(RFL2) $\underline{R}(A\cup\hat{\alpha})=\underline{R}(A)\cup\hat{\alpha}$，

(RFU2) $\overline{R}(A\cap\hat{\alpha})=\overline{R}(A)\cap\hat{\alpha}$；

(RFL2)′ $\underline{R}(1_w)=1_u$，

(RFU2)′ $\overline{R}(\emptyset)=\emptyset$；

(RFL3) $\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}(A)\cap\underline{R}(B)$，

(RFU3) $\overline{R}(A\cup B)=\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B)$；

(RFL4) $A\subseteq B\Rightarrow\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(B)$，

(RFU4) $A\subseteq B\Rightarrow\overline{R}(A)\subseteq\overline{R}(B)$；

(RFL5) $\underline{R}(A\cup B)\supseteq\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B)$，

(RFU5) $\overline{R}(A\cap B)\subseteq\overline{R}(A)\cap\overline{R}(B)$。

定义 3.4 设 U,V,W 为 3 个有限非空论域，$\mathscr{R}=(U,V,R)$ 和 $S=(V,W,S)$ 是两个经典近似空间，对于 $A\in F(W)$，记

$\underline{R}\circ\underline{S}(A)=\underline{R}(\underline{S}(A))$

$\overline{R}\circ\overline{S}(A)=\overline{R}(\overline{S}(A))$

则$\underline{R}\circ\underline{S}$和$\overline{R}\circ\overline{S}:F(W)\rightarrow F(U)$分别称为粗糙模糊下近似算子$\underline{R}$与$\underline{S}$的合成和粗糙模糊上近似算子$\overline{R}$与$\overline{S}$的合成。

定理 3.4 设$\mathscr{R}=(U,V,R)$和$S=(V,W,S)$是两个近似空间,则

(1) $\overline{R}\circ\overline{S}(A)=\overline{R\circ S}(A),A\in F(W)$,

(2) $\underline{R}\circ\underline{S}(A)=\underline{R\circ S}(A),A\in F(W)$。

证明 (1) $\forall A\in F(W),\forall x\in U$,记

$$a=\overline{R}\circ\overline{S}(A)(x)=\bigvee_{y\in R_S(x)}\overline{S}(A)(y)=\bigvee_{y\in R_S(x)}\bigvee_{z\in S_S(y)}A(z) \tag{3.3}$$

由于U,V,W都是有限集,故存在$y_0\in R_S(x)$,存在$z_0\in S_S(y_0)$使

$$a=A(z_0)=\bigvee_{z\in S_S(y_0)}A(z) \tag{3.4}$$

记

$$b=\overline{R\circ S}(A)(x)=\bigvee_{z\in(R\circ S)_S(x)}A(z) \tag{3.5}$$

因为$(R\circ S)_S(x)$是有限集,故存在$z'\in(R\circ S)_S(x)$使

$$b=A(z')=\bigvee_{z\in(R\circ S)_S(x)}A(z) \tag{3.6}$$

由$y_0\in R_S(x)$和$z_0\in S_S(y_0)$知$z_0\in(R\circ S)_S(x)$,从而由式(3.6)知

$$a=A(z_0)\leqslant\bigvee_{z\in(R\circ S)_S(x)}A(z)=b \tag{3.7}$$

又因为$z'\in(R\circ S)_S(x)$,于是存在$y'\in V$使得$y'\in R_S(x)$且$z'\in S_S(y')$,从而

$$b=A(z')\leqslant\bigvee_{z\in S_S(y')}A(z)\leqslant\bigvee_{y\in R_S(x)}\bigvee_{z\in S_S(y)}A(z)=a \tag{3.8}$$

由式(3.7)和式(3.8)即证(1)成立。

(2)的证明与定理3.2(2)的证明类似。

类似于推论3.1和推论3.2可得以下两个推论:

推论 3.3 设R是U上的经典二元关系,则

(1) $\overline{R^2}(A)=\overline{R}\circ\overline{R}(A),\forall A\in F(U)$,

(2) $\underline{R^2}(A)=\underline{R}\circ\underline{R}(A),\forall A\in F(U)$。

推论 3.4 设R是U上的传递关系,则

(1)$\overline{R}\circ\overline{R}(A)\subseteq\overline{R}(A),\forall A\in F(U)$,

(2)$\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}\circ\underline{R}(A),\forall A\in F(U)$。

当一个模糊集合被一个模糊近似空间描述时我们可以得到模糊粗糙集。

定义 3.5[4] 设R是从U到W上的一个模糊二元关系,称三元组(U,W,R)为模糊近似空间。$\forall A\in F(W)$,模糊集A关于模糊近似空间(U,W,R)的上近似$\overline{R}(A)$与下近似$\underline{R}(A)$是U上的一对模糊子集,其隶属函数定义如下:$x\in U$,

$$\overline{R}(A)(x)=\bigvee_{y\in W}[R(x,y)\wedge A(y)]$$

$$\underline{R}(A)(x)=\bigwedge_{y\in W}[(1-R(x,y))\vee A(y)] \tag{3.9}$$

序对$(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$称为$A$关于$(U,W,R)$的模糊粗糙集,算子$\underline{R}$与$\overline{R}:F(W)\rightarrow F(U)$分别称为模糊粗糙下近似算子和模糊粗糙上近似算子。

模糊粗糙近似算子满足性质[3,4]:

定理 3.5 设R和S是从U到W上的模糊二元关系,则,$\forall A,B\in F(W),\forall\alpha\in I$,

(FRLP) $R\subseteq S\Rightarrow\underline{S}(A)\subseteq\underline{R}(A)$,

(FRUP) $R\subseteq S\Rightarrow\overline{R}(A)\subseteq\overline{S}(A)$;

(FRL1) $\underline{R}(A)=\sim\overline{R}(\sim A)$,

(FRU1) $\overline{R}(A)=\sim\underline{R}(\sim A)$;

(FRL2) $\underline{R}(A\cup\hat{\alpha})=\underline{R}(A)\cup\hat{\alpha}$,

(FRU2) $\overline{R}(A\cap\hat{\alpha})=\overline{R}(A)\cap\hat{\alpha}$;

(FRL2)′ $\underline{R}(1_W)=1_U$,

(FRU2)′ $\overline{R}(\emptyset)=\emptyset$;

(FRL3) $\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}(A)\cap\underline{R}(B)$,

(FRU3) $\overline{R}(A\cup B)=\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B)$;

(FRL4) $A\subseteq B\Rightarrow\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(B)$,

(FRU4) $A\subseteq B\Rightarrow\overline{R}(A)\subseteq\overline{R}(B)$;

(FRL5) $\underline{R}(A\cup B)\supseteq\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B)$,

(FRU5) $\overline{R}(A\cap B)\subseteq\overline{R}(A)\cap\overline{R}(B)$。

定义 3.6 设U,V,W为3个有限非空论域,$\mathscr{R}=(U,V,R)$和$S=(V,W,S)$是两个模糊近似空间,称$\mathscr{R}\otimes S=(U,W,R\circ S)$为模糊近似空间$\mathscr{R}$与$S$的合成。对于$A\in F(W)$,记

$\underline{R}\circ\underline{S}(A)=\underline{R}(\underline{S}(A))$

$\overline{R}\circ\overline{S}(A)=\overline{R}(\overline{S}(A))$

则$\underline{R}\circ\underline{S}$和$\overline{R}\circ\overline{S}:F(W)\rightarrow F(U)$分别称为模糊粗糙下近似算子$\underline{R}$与$\underline{S}$的合成和模糊粗糙上近似算子$\overline{R}$与$\overline{S}$的合成。

定理 3.6 设$\mathscr{R}=(U,V,R)$和$S=(V,W,S)$是两个模糊近似空间,则

(1) $\overline{R}\circ\overline{S}(A)=\overline{R\circ S}(A),A\in F(W)$,

(2) $\underline{R}\circ\underline{S}(A)=\underline{R\circ S}(A),A\in F(W)$。

证明 (1) $\forall A\in F(W)$和$\forall x\in U$,

$$\begin{aligned}\overline{R}\circ\overline{S}(A)(x)&=\overline{R}(\overline{S}(A))(x)\\&=\bigvee_{y\in V}(R(x,y)\wedge\overline{S}(A)(y))\\&=\bigvee_{y\in V}(R(x,y)\wedge(\bigvee_{z\in W}(S(y,z)\wedge A(z))))\\&=\bigvee_{y\in V}(\bigvee_{z\in W}(R(x,y)\wedge S(y,z)\wedge A(z)))\\&=\bigvee_{y\in V}\bigvee_{z\in W}(R(x,y)\wedge S(y,z)\wedge A(z))\\&=\bigvee_{z\in W}\bigvee_{y\in V}(R(x,y)\wedge S(y,z)\wedge A(z))\\&=\bigvee_{z\in W}((\bigvee_{y\in V}(R(x,y)\wedge S(y,z)))\wedge A(z)))\\&=\bigvee_{z\in W}((R\circ S)(x,z)\wedge A(z))\\&=\overline{R\circ S}(A)(x)\end{aligned}$$

故$\overline{R}\circ\overline{S}(A)=\overline{R\circ S}(A)$。

(2)的证明与定理3.2(2)的证明类似。

类似于推论3.3和推论3.4可得以下两个推论:

推论 3.5 设R是U上的模糊二元关系,则$\forall A\in F(U)$有

(1)$\overline{R^2}(A)=\overline{R}\circ\overline{R}(A)$;

(2)$\underline{R^2}(A)=\underline{R}\circ\underline{R}(A)$。

推论 3.6 设R是U上的传递模糊关系,则$\forall A\in F(U)$有

(1)$\overline{R}\circ\overline{R}(A)\subseteq\overline{R}(A)$;

(2)$\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}\circ\underline{R}(A)$。

结束语 本文讨论了二元关系的合成及其性质。给出了两个近似空间的合成的概念,并讨论合成前的近似空间所导出的近似算子与合成后的近似空间所导出的近似算子之间的关系。证明了合成后的近似空间所导出的近似算子恰好是两个近似空间所导出的近似算子的合成。本文为进一步研究粗糙集方法在信息系统的知识表示提供了一个合适的计算方法。

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11:341-356

[2] Pawlak Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data[M]. Boston:Kluwer Academic Publishers,1991

[3] Pei D W. A generalized model of fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems,2005,34:603-613

[4] Wu W-Z,Zhang W-X. Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators[J]. Information Sciences, 2004, 159:233-254

[5] Yao Y Y. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets [J]. Journal of Information Sciences,1998,109:21-47

[6] Yao Y Y . Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators[J]. Information Sciences,1998,111:239-259

[7] Yao Y Y . Two views of the theory of rough sets in finite universes[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15:291-317

[8] 张文修,梁怡,吴伟志. 信息系统与知识发现有[M]. 北京:科学出版社,2003

(上接第 180 页)

```
merge(current_action,n,p,op) begin
  let s′ = 当前栈顶下第 2n+1 单元中的分析器状态,ls = lookaheads[s′,p];
  for each a in ls begin
     if a = Λq,m then
          merge(current_action,n+m,q,op);
     else if current_action[a]≠nil and current_action[a]≠op then
             error();
     else  current_action[a] = op;
     end
  end
```

从上述伪代码中可以看出,*merge* 是一个递归过程,这是由于产生式的前看符号集中可能包含对上级产生式前看符号集的引用。另外,由于当前动作表 *current_action* 的动态性,对文法自身的移动-规约、规约-规约冲突检查无法像通常那样在构造分析表时完成,只能在分析具体输入串构造 *current_action* 时实现,反映在上述代码中对 *error* 例程的调用。在具体实现中,文法的合法性可以由独立的文法检查阶段完成,毕竟,文法本身一经确定其可变性非常小。

图 6 所示的是分析算法基于图 5 的分析表对示例性输入 ∗ **id** = ∗ **id** 的分析过程,表中 *rj* 表示“reduction p_j”,由于图 3 所给的示例性文法是 LALR 文法[1],下图也列出了其 LALR 分析表的 *action* 内容以示比较,从图中 9－12 步可以看出,current_action 比 LALR action 呈现出更加精确的特性。

STEP	STACK	INPUT	current_action				LALR action			
			=	∗	id	$	=	∗	id	$
(1)	0	∗ **id** = ∗ **id**		s4	s5			s4	s5	
(2)	0 ∗ 4	$		s4	s5			s4	s5	
(3)	0 ∗ 4 **id** 5	**id** = ∗ **id** $	r4			r4	r4			r4
(4)	0 ∗ 4 L 9	= ∗ **id** $	r5			r5	r5			r5
(5)	0 ∗ 4 R 8	= ∗ **id** $	r3			r3	s3			r3
(6)	0 L 2	= ∗ **id** $	s6			r5	s6			r5
(7)	0 L 2 = 6	= ∗ **id** $		s4	s5			s4	s5	
(8)	0 L 2 = 6 ∗ 4	∗ **id** $		s4	s5			s4	s5	
(9)	0 L 2 = 6 ∗ 4 **id** 5	**id** $				r4	r4			r4
(10)	0 L 2 = 6 ∗ 4 L 9	$				r5	r5			r5
(11)	0 L 2 = 6 ∗ 4 R 8	$				r3	r3			r3
(12)	0 L 2 = 6 L 9	$				r5	r5			r5
(13)	0 L 2 = 6 R 7	$				r1				r1
(14)	0 S 1	$				acc				acc
		$								

图 6 ∗ **id** = ∗ **id** 的分析过程

4 分析表的优化

上述分析算法在执行效率上的损失主要缘于其动作表的动态性,这种损失可以通过优化加以改善。实际上,对于那些前看符号集不受状态迁移路径影响的产生式来说,在构造分析表时,可直接将其规约动作和输入激励填入到相应的 *action* 中,避免执行时动态构造,因此,分析表中的 *action*,*reduction* 分别可以看作是动作表的静、动两方面的描述,可以通过在构造分析表时尽可能增加 *action* 的内容而减少 *reduction* 的内容来实现分析表的优化,优化后分析器的执行效率有望能接近甚至达到 SLR 和 LALR 的水平。

结束语 本文介绍了一种规范 LR 分析算法,该算法区别于其他 LR 分析算法的本质特点在于其识别活前缀 DFA 中归约状态下动作表的不确定性,这种不确定性的根本原因在于对 DFA 中状态迁移路径复用,而复用正是实现简化 DFA 的最根本的手段。如上所述,通过在可复用的前提下尽可能减少其不确定性能够在简化和执行效率之间达到最好的平衡。

参 考 文 献

[1] 金毅,陆蓓,王小华. 一种较少状态数的 LR 分析器. 杭州电子科技大学学报,2006,26(3):74-77

[2] Adrian D,James R. A backtracking LR algorithm for parsing ambiguous context-dependent languages // Proceedings of the 2006 Conference of the Center for Advanced Studies on Collaborative research. Oct. 2006

[3] McPeak S , George C , Elkhound . A fast , practical GLR parser generator//Compiler construction: 13th International Conference (CC' 04),Volume 2985 of Lecture Notes in Computer Science. April 2004

[4] Grosch J. Lark-An LALR(2) parser generator with backtracking. Technical Report 32, CoCoLab-Datenverarbeitung, Sep. 2002

[5] Dodd C, Maslov V. Backtracking Yacc,2006. http://www.siber.com/btyacc/

[6] Spencer M. Basil: A backtracking LR parser generator,2006. http://www.lazycplusplus.com/basil/

[7] Aho A V , Sethi R , Ullman J D. Compilers : Principles , Techniques,and Tools. Addison Wesley,Pearson Education,Inc. ,1986

[8] Hopcroft J E , Ullman J D . Introduction to Automata Theory , Languages,and Computation. Addison Wesley,Reading,Mass. ,1979

[9] Levine J R,Mason T,Brown D. Lex & Yacc. O'Reilly & Associates,Inc. ,1992

[10] Scott M L . Programming Language Pragmatics . Elsevier Inc. , 2000