基于粒语义推理的粒归结研究

闫 林[1] 刘 清[2] 庞善起[3]

(河南师范大学计算机与信息技术学院 新乡 453007)[1] (南昌大学计算机科学系 南昌 330029)[2]

(河南师范大学数学与信息科学学院 新乡 453007)[3]

摘 要 粒归结方法和粒语义推理均是针对粒计算与逻辑推理相互融合研究的成果。粒语义推理能否作为粒归结方法的推理基础,或粒归结方法是否为粒语义推理的另一种形式是值得探究的问题。研究表明,粒归结方法中的粒归结序列是粒语义推理的充分条件。但对粒归结方法推广后,所得到的特殊粒归结序列是粒语义推理的充分必要条件。于是粒归结方法具有了推理的基础,粒语义推理也存在了其它的形式。这样粒归结方法与粒语义推理便具有相互支撑的紧密关系。

关键词 粒归结,粒语义推理,粒归结序列,特殊分解,特殊粒归结序列

Study on Granular Resolution Based on Granularly Semantic Reasoning

YAN Lin[1] LIU Qing[2] PANG Shan-qi[3]

(College of Computer and Information Technology, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)[1]

(Department of Computer Science, Nanchang University, Nanchang 30029, China)[2]

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)[3]

Abstract Granular resolution and granularly semantic reasoning are important research results on granular computing mixing together with logical reasoning. It is worth considering that whether granularly semantic reasoning can be taken as a reasoning foundation of granular resolution, or granular resolution is another form of granularly semantic reasoning. The investigations on this problem show that the sequence of granularly resolvent clauses in the process of granular resolution is a sufficient condition for granu-larly semantic reasoning. But, by developing the way of granular resolution, a special sequence of granularly resolvent clauses was constructed, which is a sufficient and necessary condition for granularly semantic reasoning. This expresses that granular resolution has a reasoning foundation, and granularly semantic reasoning also possesses another form. Therefore, there is a close relation which can be taken as a bridge between granular resolution and granularly semantic reasoning.

Keywords Granular resolution, Granularly semantic reasoning, Sequence of granularly resolvent clauses, Specialresolvent clause, Special sequence of granularly resolvent clauses

1 引言

归结原理或归结方法[1]是逻辑推理的另一种形式,是关于定理自动证明的研究成果,是数理逻辑在人工智能研究中的成功应用。另一方面,一个新的研究热点——粒计算[2]已成为人工智能领域特别关注的问题,成为许多研究者积极探究的方向。经过不同学者的共同努力,促进了粒计算研究的进展,促成了各种研究途径的产生。比如以逻辑知识为支撑的粒计算研究便是具有代表性的研究方法。文献[2-7]就是采用逻辑方法展开粒计算研究的成果,并均与逻辑推理相互关联。由于归结方法是逻辑推理的另一种形式,所以将归结方法与粒计算相结合的研究也随之出现,文献[3]中的粒归结方法就是在这方面的探索。粒归结方法是从逻辑公式对应的粒出发,通过粒之间的关系,对一些公式重新组合,并得到新公式的过程。文献[3]中的粒归结研究将粒计算与归结方法相互联系,建立了粒计算研究的新渠道,同时也为进一步研究预留了空间。比如,粒归结方法与怎样的推理相关联就是有待探究的问题。由于经典逻辑中的归结方法是逻辑推理的另一种形式,所以粒之间的何种推理可作为粒归结的基础自然值得探讨。文献[2]的6.3节定义了粒之间的一种推理方法——粒语义推理。研究表明此推理是经典逻辑推理模式的扩充。由于粒归结方法是经典逻辑归结原理的推广,因此粒归结方法与粒语义推理之间的关系必然引起研究者的兴趣。下面就是对此问题的理论研究,并将看到,所获得的结论是理想的。

2 粒空间、粒及粒语义推理

粒语义推理[2]建立在粒空间和粒的概念之上,这些概念

到稿日期:2008-04-30 本文受国家自然科学基金项目(No. 10571045)和河南省基础与前沿项目(No. 082300410340)资助。

闫 林 男,教授,主要研究方向为数理逻辑、非经典逻辑和粒计算,E-mail:hnsdyl@163.com;刘 清 男,教授,主要研究方向为人工智能、粗糙集理论、粒计算和近似推理;庞善起 男,博士,教授,主要研究方向为逻辑与智能控制。

在文献[2]和文献[4]中均有详尽描述。如下的定义1－5是对粒空间和粒的回顾，以求内容的可读性和整体性。

设U为一有限集合，称为论域。笛卡儿积$U^n=U\times\cdots\times U(n\geqslant1)$的子集$H(\subseteq U^n)$称为$U$上的$n$元关系。粒语义推理将基于粒空间的公式之上，公式通过n元关系来定义，为定义公式需约定符号系统：

定义1[4] 设U为论域，U上的符号系统如下：

① 常量：任意$a\in U$，a称为论域U上的常量；

② 变量：变量有可数多个，用$x_1,x_2,x_3,\cdots$表示；

③ 项：常量和变量称为论域U上的项，项用符号$t_1,t_2,t_3,\cdots$表示；

④ 关系：P,Q,S,H等或带下标的符号$P_1,P_2,P_3,\cdots$表示U上的n元关系，其中$n\geqslant1$。

⑤ 逻辑联结词：$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow$。

通过符号系统可以定义U上的公式：

定义2[4] 设U为论域，P是U上的n元关系，即$P\subseteq U^n$，$t_1,\cdots,t_n$是U上的n个项，称$P(t_1,\cdots,t_n)$为U上的原子公式。

定义3[4] 论域U上的公式归纳定义如下：

① U上的原子公式是U上的公式；

② 若ϕ是U上的公式，则$\neg\phi$是U上的公式；

③ 若ϕ,ψ是U上的公式，则$\phi\wedge\psi,\phi\vee\psi,\phi\rightarrow\psi$是$U$上的公式；

④ 有限步由①，②或③所得式子是U上的公式。

令$Form(U)$表示U上所有公式的集合。若公式ϕ中出现n个变量$x_1,\cdots,x_n$，则称ϕ为n元公式。有时为强调这n个变量，将ϕ表示为$\phi(x_1,\cdots,x_n)$。

设$P(x_1,\cdots,x_n)\in Form(U)$为$n$元原子公式，$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in U^n$，如果$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in P$，则称$n$元组$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle$满足公式$P(x_1,\cdots,x_n)$。

定义4[4] 设$\phi\in Form(U)$为n元公式：

① 若ϕ是原子公式，即$\phi=P(x_1,\cdots,x_n)$，令$|P(x_1,\cdots,x_n)|=\{\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in U^n\,|\,\langle t_1,\cdots,t_n\rangle$满足$P(x_1,\cdots,x_n)\}$。此时显然有$|P(x_1,\cdots,x_n)|=P$；

② 若$\phi=\neg\phi_1$，令$|\neg\phi_1|=\sim|\phi_1|$ $(\sim|\phi_1|=U^n-|\phi_1|)$；

③ 若$\phi=\phi_1\wedge\phi_2$，令$|\phi_1\wedge\phi_2|=|\phi_1|\cap|\phi_2|$；

④ 若$\phi=\phi_1\vee\phi_2$，令$|\phi_1\vee\phi_2|=|\phi_1|\cup|\phi_2|$；

⑤ 若$\phi=\phi_1\rightarrow\phi_2$，令$|\phi_1\rightarrow\phi_2|=|\neg\phi_1|\cup|\phi_2|$。

当$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\phi|$时，同$\phi$是原子公式一样，称$n$元组$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle$满足公式$\phi$。定义4表明，$|\phi|$由所有满足公式$\phi$的$n$元组$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle$构成，并且$|\phi|\subseteq U^n$。若把$U^n(n\geqslant1)$看作整体，则$|\phi|$便是整体的部分。这正是对"粒是通过一定方法从整体中分离出的部分[2]"的形式化描述。这些为如下的定义做好了准备。

定义5[4] 设U为论域，$Form(U)$是U上所有公式的集合。称$<U,Form(U)>$为对应于U的粒空间；对于$\phi\in Form(U)$，称$|\phi|$为ϕ对应的粒。

当$\phi\in Form(U)$时，也称ϕ是粒空间$\langle U,Form(U)\rangle$上的公式。这样，对于粒空间$<U,Form(U)>$上的每一公式ϕ，通过ϕ可分离出粒$|\phi|$。

定义4中①－⑤通过交、并、补运算定义了粒之间的一些组合。这些组合符合文献[4]中关于粒计算的定义，所以它们是粒计算的一些性质，或粒计算的运算法则。下面将根据公式对应粒之间的某种关系和粒计算的这些性质，在粒空间$\langle U,Form(U)\rangle$上讨论粒之间的逻辑推理。为此，首先对公式做技术上的约定：对于$\phi\in Form(U)$，如果$|\phi|\subseteq U^m$，则表明ϕ是m元公式且可表示为$\phi(x_1,\cdots,x_m)$，并且$|\phi(x_1,\cdots,x_m)|=\{\langle t_1,\cdots,t_m\rangle\in U^m\,|\,\langle t_1,\cdots,t_m\rangle$满足$\phi(x_1,\cdots,x_m)\}$。若$m<n$，则如下处理后，$\phi(x_1,\cdots,x_m)$也可看作$n$元公式。

$|\phi(x_1,\cdots,x_m)|=\{\langle t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n\rangle\in U^n\,|\,\langle t_1,\cdots,t_m\rangle$满足$\phi(x_1,\cdots,x_m)$且$t_{m+1},\cdots,t_n$是$U$中的任意元素$\}$。

另一方面，若$n<m$，则如下处理后，$\phi(x_1,\cdots,x_m)$仍可以看作n元公式。

$|\phi(x_1,\cdots,x_m)|=\{\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in U^n\,|\,\langle t_1,\cdots,t_n\rangle$满足$\phi(x_1,\cdots,x_n,a_{n+1},\cdots,a_m)$且$a_{n+1},\cdots,a_m$是$U$中$m-n$个固定元素$\}$。

这样，对于粒空间上的公式$\phi,\psi\in Form(U)$，若ϕ是m元公式，ψ是n元公式，且$m<n$，那么进行粒的运算$|\phi|\cap|\psi|$，$|\phi|\cup|\psi|$等时，可把ϕ和ψ都作为n元公式，或m元公式看待。所以若给出粒空间$\langle U,Form(U)\rangle$上的有限个公式$\psi_1,\cdots,\psi_n$，可以将它们都作为n元公式看待。

文献[2]的6.3节利用粒空间$\langle U,Form(U)\rangle$上若干公式对应粒之间的关系，定义了一种推理——粒语义推理。现再陈述此定义以应如下讨论的需要。

定义6[2] 设$\langle U,Form(U)\rangle$是粒空间，对于公式的子集$\Gamma\subseteq Form(U)$，以及公式$\phi\in Form(U)$。如果存在Γ中的有限个公式$\psi_1,\cdots,\psi_n$，满足：

$|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n|\subseteq|\phi|$

则称在粒空间$\langle U,Form(U)\rangle$中，Γ可以粒语义推出ϕ，记作$\Gamma\vDash\phi$，并将这种推理称为粒语义推理。当$\Gamma=\{\psi_1,\cdots,\psi_n\}$是有限公式集时，将由$\Gamma$粒语义推出$\phi$的粒语义推理记作$\psi_1,\cdots,\psi_n\vDash\phi$。

在决策逻辑[7]中，由决策规则产生的推理可以认为是粒语义推理的特殊情况。决策规则由逻辑公式构成，比如：$a_1b_2c_1\rightarrow d_1$就是一决策规则，其中$a_1b_2c_1$称为前件，d_1称为后件。在讨论推理时，往往根据前件对应的粒是否包含在后件对应的粒之中去判定决策规则的真与假。由于定义3中的公式是对决策逻辑公式的推广，因此粒语义推理的定义是对决策规则真与假讨论的推广。文献[2]的6.3节包含了对粒语义推理性质的讨论，结论表明粒语义推理不仅保留了经典逻辑的各种推理模式，并且是这些模式的扩展。由于文献[3]中的粒归结方法又是经典逻辑归结方法的推广，所以粒语义推理与粒归结方法的关系如何是颇需探究的问题。如果粒语义推理可以作为粒归结方法的推理基础，而粒归结方法又是粒语义推理的另一种形式，那么粒归结方法将具有推理作为支撑，粒语义推理也将拓展其理论体系。下面就是对两者关系的研究。

3 粒归结序列与粒语义推理

3.1 句型与句型集

定义7 设$\langle U,Form(U)\rangle$是粒空间，ϕ是粒空间$\langle U,Form(U)\rangle$上的公式，则有如下定义：

① 若ϕ是原子公式$P(t_1,\cdots,t_n)$，或是原子公式的否定

$\neg P(t_1,\cdots,t_n)$，则称 ϕ 是文字；

② 若 ϕ 是有限个文字的析取，则称 ϕ 是句型；

③ 若 ϕ 是零个文字的析取，则称 ϕ 是空句型，并将空句型记作□；

④ 若 $\phi=\phi_1\vee\phi_2$ 是句型，ϕ_1 和 ϕ_2 自然也都是句型，称 ϕ_1 和 ϕ_2 都是 ϕ 的子句型；

⑤ 设 $\phi=\phi_1\vee\phi_2$ 和 $\psi=\psi_1\vee\psi_2$ 是句型，如果 $|\phi_1|\cap|\psi_1|=\emptyset$，则称 ϕ_1 和 ψ_1 为 ϕ 和 ψ 的不相容子句型。

例如，若 $\phi=\neg P(t_1,\cdots,t_n)\vee Q(t_1,t_2)\vee S(t_1,t_2,t_3)$，则 ϕ 便是一个句型。由于联结词"$\vee$"在逻辑中表示"或者"，具有交换性，所以句型 $\neg P(t_1,\cdots,t_n)\vee S(t_1,t_2,t_3)\vee Q(t_1,t_2)$ 与 $\neg P(t_1,\cdots,t_n)\vee Q(t_1,t_2)\vee S(t_1,t_2,t_3)$ 可认为是同一句型。

如果 $\phi=\phi_1\vee\phi_2\vee\cdots\vee\phi_t$ 是一句型，由定义 4 有 $|\phi|=|\phi_1\vee\phi_2\vee\cdots\vee\phi_t|=|\phi_1|\cup|\phi_2|\cup\cdots\cup|\phi_t|$。这表明粒 $|\phi|$ 分解成了若干个更小的粒的并。

由定义可知，句型可以仅由一个文字构成，所以文字是特殊的句型。句型中的每个文字是该句型的子句型。而空句型"□"中不存在任何文字。若 ϕ 是空句型□，则 ϕ 对应的粒 $|\phi|=\emptyset$，即满足空句型 ϕ 的 n 元组 $\langle t_1,\cdots,t_n\rangle(\in U^n)$ 是不存在的。

定义 8 设 $\phi=\phi_1\vee\phi_2,\psi=\psi_1\vee\psi_2$ 是两个句型，如果 ϕ_1 和 ψ_1 是 ϕ 和 ψ 的不相容子句型，即有 $|\phi_1|\cap|\psi_1|=\emptyset$，则称 $\phi_2\vee\psi_2$ 为 ϕ 和 ψ 的粒归结式。并将产生粒归结式的过程称为粒归结。

句型 $\phi=\phi_1\vee\phi_2$ 和 $\psi=\psi_1\vee\psi_2$ 的粒归结式就是消去 ϕ 和 ψ 中一对不相容子句型 ϕ_1 和 ψ_1 后，剩余子句型 ϕ_2 和 ψ_2 析取后所得到的句型。由于 ϕ_2 或 ψ_2 可能是空句型□，所以 $\phi_2\vee\psi_2$ 也可能是□。

句型 $\phi=\phi_1\vee\phi_2$ 和 $\psi=\psi_1\vee\psi_2$ 的粒归结式是对经典逻辑归结方法中归结式的推广。事实上，假若 $P\vee Q\vee R$ 和 $\neg P\vee S\vee\neg H$ 是经典逻辑归结方法中的两个句型，那么其归结式是消除互否文字 P 和 $\neg$P 后，剩余部分析取后得到的句型。所以，这两个句型的归结式为：$Q\vee R\vee S\vee\neg H$。对于定义 8 中的两个句型 $\phi=\phi_1\vee\phi_2$ 和 $\psi=\psi_1\vee\psi_2$，如果 ϕ_1 和 ψ_1 是不相容子句型，即 $|\phi_1|\cap|\psi_1|=\emptyset$，那么 ϕ_1 和 ψ_1 不仅包括了经典逻辑归结方法中互否文字的情况（如 ϕ_1 是 $\neg P(x_1)$，而 ψ_1 是 $P(x_1)$，此时显然 $|\phi_1|\cap|\psi_1|=\emptyset$），并是经典逻辑归结方法中互否文字的推广。因为当 $|\phi_1|\cap|\psi_1|=\emptyset$ 时，ϕ_1 和 ψ_1 之间的关系可能不是互否的文字。所以定义 7 的⑤中把它们称为不相容子句型。

设 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$ 是粒空间 $\langle U,Form(U)\rangle$ 上的公式，$\psi_1\wedge\psi_2\wedge\cdots\wedge\psi_n$ 是它们的合取。但 $\psi_1\wedge\psi_2\wedge\cdots\wedge\psi_n$ 可能不是合取范式，因为可能存在某一公式 $\psi_i(1\leqslant i\leqslant n)$，且 ψ_i 不是句型，也就是说 ψ_i 不是有限个文字的析取。利用如下的逻辑定律[2]：

交换律：$A\wedge B=B\wedge A, A\vee B=B\vee A$；

结合律：$A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C$,

$A\vee(B\vee C)=(A\vee B)\vee C$；

分配律：$A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$,

$A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$；

吸收律：$A\wedge(A\vee B)=A, A\vee(A\wedge B)=A$；

幂等律：$A\vee A=A, A\wedge A=A$。

可以将公式 $\psi_1\wedge\psi_2\wedge\cdots\wedge\psi_n$ 等价转换为合取范式 $\phi_1\wedge\phi_2\wedge\cdots\wedge\phi_r$，其中 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r$ 都是句型。在等价转换过程中，交换律和结合律完成对某些文字的选择和组合，分配律实现合取范式与析取范式之间的转换，吸收律和幂等律完成对公式的化简。

注意：各定律中的符号"$=$"表示该符号两端的公式逻辑等价，并不表示两端公式的形式完全相同。

定义 9 设 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$ 是粒空间 $\langle U,Form(U)\rangle$ 上的公式，$\phi_1\wedge\phi_2\wedge\cdots\wedge\phi_r$ 是利用上述定律由 $\psi_1\wedge\psi_2\wedge\cdots\wedge\psi_n$ 转换而成的合取范式，当 $\phi_1\wedge\phi_2\wedge\cdots\wedge\phi_r$ 不能再由吸收律和幂等律化简时，则称 $\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r\}$ 为 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$ 对应的句型集。

不能再由吸收律和幂等律化简，可以保证 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$ 对应的句型集 $\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r\}$ 具有唯一性。

由于 $\phi_1\wedge\phi_2\wedge\cdots\wedge\phi_r$ 是利用上述定律，对 $\psi_1\wedge\psi_2\wedge\cdots\wedge\psi_n$ 等价转换而得到的，所以 $\psi_1\wedge\psi_2\wedge\cdots\wedge\psi_n$ 与 $\phi_1\wedge\phi_2\wedge\cdots\wedge\phi_r$ 是等价的，即

$$\psi_1\wedge\psi_2\wedge\cdots\wedge\psi_n=\phi_1\wedge\phi_2\wedge\cdots\wedge\phi_r。$$

于是，考虑它们对应的粒时，必有

$$|\psi_1\wedge\psi_2\wedge\cdots\wedge\psi_n|=|\phi_1\wedge\phi_2\wedge\cdots\wedge\phi_r|。\quad (*)$$

3.2 粒归结序列与粒语义推理

定义 10 设 $S=\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r\}$ 是 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$ 对应的句型集。如果存在句型的序列 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，使得对于每一个句型 $\beta_m(1\leqslant m\leqslant t)$，或者 $\beta_m\in S$，或者存在 $j,k<m$，使得 β_m 是 β_j 和 β_k 的粒归结式，并且 β_t 一定是空句型□，则称序列 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是句型集 S 的粒归结序列。

由上述定义可知，对于句型集 $\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r\}$ 的粒归结序列 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，一定有 $\beta_1,\beta_2\in\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r\}$，且最后的公式 β_t 一定是空句型，即 $\beta_t=$□。在某种情况下，粒语义推理与粒归结序列存在着内在的联系，这可通过如下定理给予反映。

定理 1 设 $\langle U,Form(U)\rangle$ 是粒空间，对于公式的子集 $\Gamma\subseteq Form(U)$，以及公式 $\phi\in Form(U)$，若存在 Γ 中的有限个公式 $\psi_1,\cdots,\psi_n$，使得 $\psi_1,\cdots,\psi_n,\neg\phi$ 对应的句型集 $S=\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r\}$ 存在粒归结序列：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，则粒语义推理 $\Gamma\models\phi$ 成立。

证明：只要证明 $|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n|\subseteq|\phi|$，或者 $(|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n|)\cap(\sim|\phi|)=\emptyset$，则由粒语义推理的定义，便有 $\Gamma\models\phi$。

由定义 4，$(|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n|)\cap(\sim|\phi|)=|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\wedge\neg\phi|$，所以现证明 $|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\wedge\neg\phi|=\emptyset$。

假设 $|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\wedge\neg\phi|\neq\emptyset$。考虑 $\psi_1,\cdots,\psi_n,\neg\phi$ 对应句型集 $\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r\}$，由（*）可知 $|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\wedge\neg\phi|=|\phi_1\wedge\phi_2\wedge\cdots\wedge\phi_r|$。所以若取 $\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\wedge\neg\phi|$，则有 $\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\phi_1\wedge\phi_2\wedge\cdots\wedge\phi_r|=|\phi_1|\wedge|\phi_2|\wedge\cdots\wedge|\phi_r|$。于是 $\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\phi_i|(i=1,2,\cdots,r)$。由此可证明 $\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_j|\ (j=1,2,\cdots,t)$，其中 β_j 是粒归结序列 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 中的任一公式。事实上，可以归纳证明如下：

由于 $\beta_1\in\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r\}$，故 $\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_1|$。假设当 $j<m$ 时，有 $\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_j|$。则必有 $\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_m|$，这是因为 β_m 由(1)或(2)得到：(1) $\beta_m\in\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r\}$；(2) 存在 $j,k<m$，使得 β_m 是 β_j 和 β_k 的粒归结式。对于情况(1)，$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_m|$ 显然成立。对于情况(2)，由归纳假设 $\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_j|$，且 $\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_k|$。由于 β_m 是 β_j 和 β_k 的粒归结式，所以 β_j 和 β_k 应具有形式：$\beta_j=\beta_{j1}\vee\beta_{j2},\beta_k=\beta_{k1}\vee\beta_{k2}$，且 $|\beta_{j1}|\cap|\beta_{k1}|=\emptyset$，及 $\beta_m=\beta_{j2}\vee\beta_{k2}$。由于 $\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_j|$，$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle$

$\in|\beta_k|$，并考虑到$|\beta_{j1}|\cap|\beta_{k1}|=\emptyset$，故有$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_{j2}|\cup|\beta_{k2}|=|\beta_{j2}\vee\beta_{k2}|$，即$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_m|$。这样，对任意$\beta_j(j=1,2,\cdots,t)$，有$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_j|$。

于是$\langle t_1,\cdots,t_n\rangle\in|\beta_t|$，所以$\beta_t$不是空句型□。这与粒归结序列$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$中最后的公式$\beta_t=$□相矛盾。故$|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n\wedge\neg\phi|=\emptyset$，即$|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n|\subseteq|\phi|$，所以$\Gamma\vDash\phi$。证毕

另一方面，对于公式的子集$\Gamma\subseteq Form(U)$，及公式$\phi\in Form(U)$，若存在Γ中的有限个公式$\psi_1,\cdots,\psi_n$，使得$|\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_n|\subseteq|\phi|$，即$\Gamma\vDash\phi$。令$\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r\}$是公式$\psi_1,\cdots,\psi_n,\neg\phi$对应的句型集，那么$\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r\}$是否存在粒归结序列$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$呢？结论是否定的，请看如下例子：

例 设$\langle U,Form(U)\rangle$是粒空间，其中论域$U=\{a,b,c,d\}$。令$P=\{a,b,c\},Q=\{b,c,d\},H=\{b,c\}$，则$P\subseteq U,Q\subseteq U$且$H\subseteq U$，即$P,Q$和$H$都是$U$上的一元关系。令$\psi_1=P(x_1),\psi_2=Q(x_1)$以及$\phi=H(x_1)$，则$\psi_1,\psi_2$和$\phi$都是粒空间$\langle U,Form(U)\rangle$上的一元公式且都是原子公式。由定义4知：$|\psi_1|=\{a,b,c\},|\psi_2|=\{b,c,d\}$以及$|\phi|=\{b,c\}$。由于$|\psi_1\wedge\psi_2|=|\psi_1|\wedge|\psi_2|=\{a,b,c\}\cap\{b,c,d\}=\{b,c\}\subseteq|\phi|(=\{b,c\})$，所以$\psi_1,\psi_2\vDash\phi$。但是$\psi_1,\psi_2,\neg\phi$对应的句型集不存在粒归结序列，这是因为$\psi_1=P(x_1),\psi_2=Q(x_1)$和$\phi=H(x_1)$都是原子公式，所以$\psi_1\wedge\psi_2\wedge\neg\phi=P(x_1)\wedge Q(x_1)\wedge\neg H(x_1)$就是特殊的合取范式，每个合取项仅由一个文字构成。此时ψ_1,ψ_2和$\neg\phi$对应的句型集为$S=\{P(x_1),Q(x_1),\neg H(x_1)\}$。由于$|P(x_1)|\cap|Q(x_1)|=|\psi_1|\cap|\psi_2|=\{a,b,c\}\cap\{b,c,d\}=\{b,c\}\neq\emptyset,|P(x_1)|\cap|\neg H(x_1)|=|\psi_1|\cap|\neg\phi|=\{a,b,c\}\cap(\sim|\phi|)=\{a,b,c\}\cap\{a,d\}=\{a\}\neq\emptyset$，以及$|Q(x_1)|\cap|\neg H(x_1)|=|\psi_2|\cap|\neg\phi|=\{b,c,d\}\cap(\sim|\phi|)=\{b,c,d\}\cap\{a,d\}=\{d\}\neq\emptyset$，即句型集$S=\{P(x_1),Q(x_1),\neg H(x_1)\}$中任意两个句型对应的粒之交都非空，所以$S$中的任意两个句型都不能进行粒归结。故$\psi_1,\psi_2,\neg\phi$对应的句型集$=\{P(x_1),Q(x_1),\neg H(x_1)\}$不存在粒归结序列。

在经典逻辑归结方法针对推理的讨论中，推理：

$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n\rightarrow B$

是否成立，可以转化为判断公式$A_1,A_2,\cdots,A_n,\neg B$对应的句型集是否存在归结序列的问题，归结序列是经典逻辑归结方法中得到的归结式序列，且最后的归结式是空句型□。此结论可总结为：

结论：$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n\rightarrow B$为真的充分必要条件是$A_1,A_2,\cdots,A_n,\neg B$对应的句型集存在归结序列。

但是，粒语义推理并没有与此结论相同的充分必要条件。比如对于$\Gamma\subseteq Form(U),\phi\in Form(U)$，存在粒归结序列是粒语义推理$\Gamma\vDash\phi$成立的充分条件，这是定理1的结论。但上述例之结论表明粒归结序列并不是语义推理$\Gamma\vDash\phi$成立的必要条件。实际上，这些讨论与文献[2]的6.3节关于粒语义推理的可靠性真与完备性假的结论是一致的。

不过，针对粒语义推理与粒归结序列之间的关系，可以通过构造特殊粒归结序列的方法，给出具有充分必要性的结论，这就是下面的讨论。

4 特殊粒归结序列与粒语义推理

4.1 特殊分解

根据定义7，若粒空间$\langle U,Form(U)\rangle$上的公式ψ是一句型，则$\psi=\phi_1\vee\phi_2\vee\cdots\vee\phi_t$，其中$\phi_i$都是文字$(i=1,2,\cdots,t)$。此时有：$|\psi|=|\phi_1\vee\phi_2\vee\cdots\vee\phi_t|=|\phi_1|\cup|\phi_2|\cup\cdots\cup|\phi_t|$，此式表明$\psi$对应的粒$|\psi|$等于更小的粒$|\phi_1|,|\phi_2|,\cdots,|\phi_t|$的并，或者说，粒$|\psi|$被分解成了一些更小的粒：$|\phi_1|,|\phi_2|,\cdots,|\phi_t|$。

现在考虑粒的一种特殊分解。设ψ_1,ψ_2是粒空间$\langle U,Form(U)\rangle$上的两个n元公式，此时$|\psi_1|\subseteq U^n$，且$|\psi_2|\subseteq U^n$。当$|\psi_1|\cap|\psi_2|\neq\emptyset$时，由于$|\psi_1|\cap|\psi_2|\subseteq U^n$，$|\psi_1|\cap|\psi_2|$仍是$U$上的$n$元关系，称为$\psi_1$和$\psi_2$确定的$n$元关系。据此，可将公式$\psi_1$对应的粒$|\psi_1|$通过$\psi_2$进行分解。

定义11 设ψ_1,ψ_2是粒空间$\langle U,Form(U)\rangle$上的两个n元公式，且$|\psi_1|\cap|\psi_2|\neq\emptyset$，则有如下概念：

① 若将ψ_1和ψ_2确定的n元关系$|\psi_1|\cap|\psi_2|(\subseteq U^n)$记作$H$，即$H=|\psi_1|\cap|\psi_2|$，则将$H$对应的原子公式$H(x_1,\cdots,x_n)$称为$\psi_1$和$\psi_2$确定的核公式；

② 若$\beta=H(x_1,\cdots,x_n)$是由ψ_1和ψ_2确定的核公式，由于$|\psi_1|-|\beta|$ $(\subseteq U^n)$是U上的n元关系，如果将$|\psi_1|-|\beta|$记作P，即$P=|\psi_1|-|\beta|$，则将P对应的原子公式$P(x_1,\cdots,x_n)$称为ψ_1相对于核公式β的分公式；

③ 如果β是由ψ_1和ψ_2确定的核公式，ϕ_1是ψ_1相对于核公式β的分公式，称$\phi_1\vee\beta$为ψ_1相对ψ_2的特殊分解，并记$\psi_1\approx\phi_1\vee\beta$。

由此定义可知，ψ_2相对ψ_1也有特殊分解：$\psi_2\approx\phi_2\vee\beta$，其中$\beta$是由$\psi_1$和$\psi_2$确定的核公式，且$\phi_2$是$\psi_2$相对于核公式$\beta$的分公式。由于特殊分解$\psi_1\approx\phi_1\vee\beta$和$\psi_2\approx\phi_2\vee\beta$中的公式$\phi_1,\phi_2$和$\beta$都是原子公式，所以$\phi_1\vee\beta$和$\phi_2\vee\beta$都是句型。

表达式$\psi_1\approx\phi_1\vee\beta$中，$\psi_1$与$\phi_1\vee\beta$的形式一般不能通过上述逻辑定律相互转换，表达式$\psi_2\approx\phi_2\vee\beta$中，公式$\psi_2$与$\phi_2\vee\beta$的形式也是如此。但特殊分解中的符号“$\approx$”表明了粒相等，即$|\psi_1|=|\phi_1\vee\beta|$，且$|\psi_2|=|\phi_2\vee\beta|$。请看如下定理。

定理2 设ψ_1,ψ_2是粒空间$\langle U,Form(U)\rangle$上的两个n元公式，ψ_1相对ψ_2以及ψ_2相对ψ_1的特殊分解分别为：$\psi_1\approx\phi_1\vee\beta$及$\psi_2\approx\phi_2\vee\beta$。则

① $|\psi_1|=|\phi_1\vee\beta|$，并且$|\psi_2|=|\phi_2\vee\beta|$。

② $|\phi_1|\cap|\phi_2|=\emptyset$。

③ $|\beta|=|\psi_1|\cap|\psi_2|$。

证明：① 对于$|\psi_1|=|\phi_1\vee\beta|$的证明：在特殊分解$\psi_1\approx\phi_1\vee\beta$中，$\beta$是由$\psi_1$和$\psi_2$确定的核公式。$\phi_1$为$\psi_1$相对于核公式$\beta$的分公式。由定义11知$\phi_1$是原子公式，且$\phi_1=P(x_1,\cdots,x_n)$，及$P=|\psi_1|-|\beta|(\subseteq U^n)$。由定义4知：$|P(x_1,\cdots,x_n)|=P$，所以$|\phi_1|=|P(x_1,\cdots,x_n)|=P=|\psi_1|-|\beta|$。因此有$|\phi_1\vee\beta|=|\phi_1|\cup|\beta|=(|\psi_1|-|\beta|)\cup|\beta|=|\psi_1|$，即$|\psi_1|=|\phi_1\vee\beta|$。同理可证$|\psi_2|=|\phi_2\vee\beta|$。

② 由分公式ϕ_1和ϕ_2的定义知$|\phi_1|=|\psi_1|-|\beta|$，且$|\phi_2|=|\psi_2|-|\beta|$。由核公式$\beta=H(x_1,\cdots,x_n)$的定义知$\beta$是原子公式，且$|\beta|=|H(x_1,\cdots,x_n)|=H=|\psi_1|\cap|\psi_2|$。因此$|\phi_1|\cap|\phi_2|=(|\psi_1|-|\beta|)\cap(|\psi_2|-|\beta|)=(|\psi_1|-(|\psi_1|\cap|\psi_2|))\cap(|\psi_2|-(|\psi_1|\cap|\psi_2|))=\emptyset$。

③ 由核公式的定义可知$\beta=H(x_1,\cdots,x_n)$，且$H=|\psi_1|\cap|\psi_2|$。所以由定义4得$|\beta|=|H(x_1,\cdots,x_n)|=H=|\psi_1|\cap|\psi_2|$。 证毕

对于特殊分解$\psi_1\approx\phi_1\vee\beta$和$\psi_2\approx\phi_2\vee\beta$，尽管从形式上讲

ψ_1 与 $\phi_1 \vee \beta$,及 ψ_2 与 $\phi_2 \vee \beta$ 之间一般不能利用上述定律相互转换,但它们对应的粒相等,即 $|\psi_1| = |\phi_1 \vee \beta|$,且 $|\psi_2| = |\phi_2 \vee \beta|$。所以,特殊分解 $\psi_1 \approx \phi_1 \vee \beta$ 和 $\psi_2 \approx \phi_2 \vee \beta$ 可以认为是通过粒确定的。

在定义 9 中,公式 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ 对应的句型集 $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_r\}$ 是通过逻辑定律产生的,这可以从下式中得以体现:

$$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_r \qquad (**)$$

$(**)$ 中符号"="两端的公式 $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n$ 和 $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_r$ 是等价的,即这两个公式可通过上述定律相互转换。于是每一句型 $\phi_j = \phi_{j1} \vee \phi_{j2} \vee \cdots \vee \phi_{jt}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ 中也包含了逻辑定律被使用的信息。但是对于特殊分解 $\psi_1 \approx \phi_1 \vee \beta$ 和 $\psi_2 \approx \phi_2 \vee \beta$,符号"≈"两端的公式一般不能用逻辑定律相互转换,分解根据粒的情况而决定,只保证"≈"两端公式对应的粒相等(定理 2)。由于 $(**)$ 中符号"="两端公式对应的粒显然也相等,所以如果进行比较,由于 $(**)$ 中句型的产生使用了逻辑定律,而特殊分解中句型 $\phi_1 \vee \beta$ 和 $\phi_2 \vee \beta$ 的产生不涉及逻辑定律,因此特殊分解中的句型比 $(**)$ 中句型产生的方式要宽松,即特殊分解是推广的句型。

4.2 特殊粒归结序列与粒语义推理

对于粒空间 $\langle U, Form(U) \rangle$ 上的公式 ψ_1 和 ψ_2,在其特殊分解 $\psi_1 \approx \phi_1 \vee \beta$ 和 $\psi_2 \approx \phi_2 \vee \beta$ 中,由于 $|\phi_1| \cap |\phi_2| = \varnothing$(定理 2),所以句型 $\phi_1 \vee \beta$ 和 $\phi_2 \vee \beta$ 的粒归结式为 $\beta \vee \beta = \beta$。由此可引出如下定义。

定义 12 ①设 ψ_1 和 ψ_2 是粒空间 $\langle U, Form(U) \rangle$ 上的 n 元公式。当 $|\psi_1| \cap |\psi_2| \neq \varnothing$ 时,其特殊分解 $\psi_1 \approx \phi_1 \vee \beta$ 和 $\psi_2 \approx \phi_2 \vee \beta$ 中,句型 $\phi_1 \vee \beta$ 和 $\phi_2 \vee \beta$ 的粒归结式 β 称为 ψ_1 和 ψ_2 的特殊粒归结式;当 $|\psi_1| \cap |\psi_2| = \varnothing$ 时,规定 ψ_1 和 ψ_2 的特殊粒归结式为空句型□。并将产生特殊粒归结式的过程称为粒归结。

②设 $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \psi_{n+1}\}$ 是粒空间 $\langle U, Form(U) \rangle$ 上 n 元公式的集合。如果存在公式的序列 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$,使得 β_1 是 ψ_1 和 ψ_2 的特殊粒归结式,对于 $t = 2, 3, \cdots, n$, β_t 是 β_{t-1} 和 ψ_{t+1} 的特殊粒归结式,并且 β_n 为空句型□,则称 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 为公式集合 $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \psi_{n+1}\}$ 的特殊粒归结序列。

此定义说明,当 $|\psi_1| \cap |\psi_2| \neq \varnothing$ 时,ψ_1 和 ψ_2 的特殊粒归结式就是 ψ_1 和 ψ_2 确定的核公式 β。

定理 3 设 $\langle U, Form(U) \rangle$ 是粒空间,对于公式的子集 $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}(U)$,以及公式 $\phi \in Form(U)$。粒语义推理 $\Gamma \models \phi$ 成立的充分必要条件是:存在 Γ 中的有限个公式 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$,使得 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ 和 ψ_{n+1}(令 $\psi_{n+1} = \neg\phi$)构成的公式集 $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \psi_{n+1}\}$ 具有特殊粒归结序列 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$。

证明:充分性:设存在 Γ 中的有限个公式 $\psi_1, \cdots, \psi_n$,并令 $\psi_{n+1} = \neg\phi$,使得公式集 $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \psi_{n+1}\}$ 具有特殊粒归结序列 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$。由特殊粒归结序列的定义可知,$\beta_1$ 是 ψ_1 和 ψ_2 的特殊粒归结式,所以 β_1 是 ψ_1 和 ψ_2 确定的核公式,由定理 2,$|\beta_1| = |\psi_1| \cap |\psi_2|$。由于 β_2 是 β_1 和 ψ_3 的特殊粒归结式,则 β_2 是 β_1 和 ψ_3 确定的核公式,因此有 $|\beta_2| = |\beta_1| \cap |\psi_3| = |\psi_1| \cap |\psi_2| \cap |\psi_3|$。继续下去,可得 $|\beta_{n-1}| = |\psi_1| \cap |\psi_2| \cap \cdots \cap |\psi_n|$。最后,由于 β_n 是 β_{n-1} 和 ψ_{n+1} 的特殊粒归结式,又因为 β_n 是空句型□,所以由定义 12 的①知 $|\beta_{n-1}| \cap |\psi_{n+1}| = \varnothing$。因此 $(|\psi_1| \cap |\psi_2| \cap \cdots \cap |\psi_n|) \cap |\neg\phi| = \varnothing$,再利用定义 4 可得 $(|\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n|) \cap (\sim|\phi|) = \varnothing$,所以 $|\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n| \subseteq |\phi|$。由于 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ 是 Γ 中的有限个公式,故 $\Gamma \models \phi$。

必要性:设 $\Gamma \models \phi$ 成立。则存在 Γ 中的有限个公式 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$,使得 $|\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n| \subseteq |\phi|$,于是 $(|\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n|) \cap (\sim|\phi|) = \varnothing$。若记 $\psi_{n+1} = \neg\phi$,再利用定义 4,便可得到 $|\psi_1| \cap |\psi_2| \cap \cdots \cap |\psi_n| \cap |\psi_{n+1}| = \varnothing$。令 β_1 是 ψ_1 和 ψ_2 的特殊粒归结式,则 β_1 是 ψ_1 和 ψ_2 的核公式,所以 $|\beta_1| = |\psi_1| \cap |\psi_2|$(定理 2)。同理,若令 β_2 是 β_1 和 ψ_3 的特殊粒归结式,则有 $|\beta_2| = |\beta_1| \cap |\psi_3| = |\psi_1| \cap |\psi_2| \cap |\psi_3|$。一般地,若令 β_t 是 β_{t-1} 和 ψ_{t+1} 的特殊粒归结式,则有 $|\beta_t| = |\beta_{t-1}| \cap |\psi_{t+1}| = (|\psi_1| \cap |\psi_2| \cap \cdots \cap |\psi_t|) \cap |\psi_{t+1}|$ $(2 \leqslant t \leqslant n)$。当 $t = n$ 时,β_n 是 β_{n-1} 和 ψ_{n+1} 的特殊粒归结式,由于 $|\beta_{n-1}| \cap |\psi_{n+1}| = (|\psi_1| \cap |\psi_2| \cap \cdots \cap |\psi_n|) \cap |\psi_{n+1}| = \varnothing$,所以由特殊粒归结式的定义知 β_n 是空句型□。因此,存在 Γ 中的有限个公式 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$,使得 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ 和 ψ_{n+1} $(= \neg\phi)$ 构成的公式集合 $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n, \psi_{n+1}\}$ 具有特殊粒归结序列 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$。证毕

定理 3 充分性和必要性的证明过程是互逆的。证明过程中得到了关于粒的表达公式:$|\beta_1| = |\psi_1| \cap |\psi_2|$,$|\beta_2| = |\psi_1| \cap |\psi_2| \cap |\psi_3|$,$\cdots$,$|\beta_n| = |\psi_1| \cap |\psi_2| \cap \cdots \cap |\psi_n| \cap |\psi_{n+1}| = \varnothing$ $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n \in \Gamma$ 且 $\psi_{n+1} = \neg\phi)$,所以特殊粒归结式 β_i 对应的粒 $|\beta_i|$ 决定了特殊粒归结式 β_{i+1} 对应的粒 $|\beta_{i+1}|$。由于 $|\beta_n| = \varnothing$,即 $|\psi_1| \cap |\psi_2| \cap \cdots \cap |\psi_n| \cap |\psi_{n+1}| = \varnothing$ 等价于 $|\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n| \subseteq |\phi|$,所以特殊粒归结序列 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的产生过程实际上是对"$|\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n| \subseteq |\phi|$"性质的描述。又因为序列 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是通过对一系列公式实施特殊分解,且粒归结后而得到的,因此对"$|\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n| \subseteq |\phi|$"的判定便转化成了逐步实施粒归结的过程。所以粒语义推理与产生特殊粒归结序列的过程相互等价,这是本文得到的重要结果。

结束语 粒归结序列作为粒语义推理的充分条件是一个重要的结论。由于经典逻辑归结方法中的归结序列是粒归结序列的特例,所以完全按照经典逻辑归结方法得到的粒归结序列也能保证粒语义推理的成立。尽管粒归结序列是对经典逻辑归结序列的推广,但粒归结序列并不是粒语义推理成立的必要条件,这说明粒归结序列仍是比较强的。而特殊粒归结序列中虽然出现了"特殊"二字,但实际上,特殊粒归结序列是对粒归结序列的进一步推广,从而使得特殊粒归结序列成为粒语义推理的充分必要条件。

特殊粒归结序列是为讨论粒语义推理的充分必要性而引入的。从数学的角度考虑,充分必要条件应是精彩的结论,它架起了粒语义推理与粒归结方法间的桥梁。但从应用的角度出发,有时并不需要构造这样的特殊粒归结序列。这是因为构造特殊粒归结序列的目的是为了研究 $(|\psi_1| \cap |\psi_2| \cap \cdots \cap |\psi_n|) \cap |\neg\phi| = \varnothing$ 是否成立,所以对于粒语义推理 $\Gamma \models \phi$ 的成立与否,可直接判断是否存在公式 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n \in \Gamma$,使得 $(|\psi_1| \cap |\psi_2| \cap \cdots \cap |\psi_n|) \cap |\neg\phi| = \varnothing$。

在决策逻辑中,由于决策规则(如:$a_1 b_2 c_1 \rightarrow d_1$)为真的判定是通过考查前件对应的粒必须包含在后件对应的粒中(即 $|a_1 b_2 c_1| \subseteq |d_1|$)而完成的,所以针对粒归结方法与粒语义推理关系的分析,以及文献[2]中粒语义推理性质的研究都为决策逻辑提供了理论基础,这对决策逻辑理论体系的形成具有借鉴意义。至于粒归结方法能否在决策规则的简化和其他方

面得到应用，当然值得进一步探询。

参 考 文 献

[1] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 北京：科学出版社，2006

[2] 闫林. 数理逻辑基础与粒计算[M]. 北京：科学出版社，2007

[3] 刘清，黄兆华. G-逻辑及其归结推理. 计算机学报[J]，2004，27(7)：865-873

[4] Yan Lin, Liu Qing. A Logical Method of Formalization for Granular Computing[C]// Proceedings of 2007 IEEE International Conference on Granular Computing. Silicon Valley, California, USA, 2007: 22-27

[5] Yan Lin, Wang Sui-hua, Zhang Xue-dong. Semantic Reasoning Study for Rough Logic About n-ary Formulas[C]// Proceedings of 2006 IEEE International Conference on Granular Computing. Atlanta, Georgia, USA, 2006: 381-384

[6] Liu Qing, Wang Ji-yi. Semantic Analysis of Rough Logical Formulas Based on Granular Computing[C]// Proceedings of 2006 IEEE International Conference on Granular Computing. Atlanta, Georgia, USA, 2006: 393-396

[7] Pawlak Z. Rough Logic. Bulletin of Polish Academy of Sciences Technical Sciences[J], 1987, 35(5/6): 253-258

(上接第 164 页)

表 7　在 mushroom 上传统 K-Modes 聚类结果

Cluster Number	E	P	b_i
1	285	1996	1996
2	3923	1920	3923
Micro-p			0.729

表 8　在 mushroom 上基于粗糙集的改进 K-Modes 聚类结果

Cluster Number	E	P	b_i
1	96	3100	3100
2	4112	816	4112
Micro-p			0.888

由于 K-Modes 算法的聚类结果受初始类中心的选择的影响，不同的初始类中心可能有不同的聚类结果，所以我们对于数据 soybean，vote 和 mushroom 随机选择 100 组类中心，并将基于粗糙集的改进 K-Modes 算法分别与传统 K-Modes[3]，Ahmad 的 K-Modes[10] 和 Ng 的 K-Modes[5] 进行比较，使每个算法分别运行 100 次，通过计算平均聚类正确率，来验证基于粗糙集的改进 K-Modes 算法的有效性。表 9 是不同的 K-Modes 算法的聚类性能比较。

表 9　在 3 种不同的数据集下算法的性能比较

	传统 K-Modes	Ahmad 的 K-Modes	Ng 的 K-Modes	基于粗糙集的改进 K-Modes
soybean	86%	90%	93%	92%
vote	86%	87%	86%	88%
mushroom	71%	77%	79%	81%

通过以上实验表明，基于粗糙集的改进 K-Modes 算法有效地提高了聚类效果。

结束语　本文利用粗糙集中的上、下近似，提出了一种新的距离度量，该距离公式既考虑了属性值本身的不同，又考虑了属性值相对于其它相关属性的相似度。此外，对类中心进行了重新定义，使其充分反映类的特征。与其他改进 K-Modes 算法进行了比较，实验结果表明，基于粗糙集的改进 K-Modes 算法有效地提高了聚类精度。

参 考 文 献

[1] Han Jiawei, Kamber M. Data Mining: Concepts and Techniques. San Francisco, US: Morgan Kaufmann, 2001

[2] MacQueen J B. Some methods for classification and analysis of multivariate observation // Proceeding 5th Berkley Symposium. on Mathematical Statistics and Probability. 1967, I: 281-297. University of California Press, 1967, Xvii, 666

[3] Huang Zhexue. Clustering Large Data Sets with Mixed Numeric and Categorical Values// PAKDD'97. Singapore, World Scientific, 1997: 21-35

[4] Huang Zhexue. Extensions to the k-Means algorithm for clustering large data sets with categorical values. Data Mining and Knowledge Discovery, 1998, 2: 283-304

[5] Michael K, Ng M, Li Junjie, et al. On the impact of dissimilarity measure in K-Modes clustering algorithm. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(3): 503-507

[6] Li Cen, Biswas Gautam. Unsupervised learning with mixed numeric and nominal data. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2002, 14: 673-690

[7] Hsu C C, Chen Chinlong, Su Yuwei. Hierarchical clustering of mixed data based on distance hierarchy. Information Sciences, 2007: 4474-4492

[8] Hsu C C. Generalizing self-organizing map for categorical data. IEEE Transaction on Neural Network, 2006, 17(2): 294-304

[9] Ganti V, Ramakrishnanz J G R. CACTUS, clustering categorical data using summaries // Proceedings of the 5th International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. San Diego: ACM Press, 1999: 73-83

[10] Ahmad A, Dey L. A k-mean clustering algorithm for mixed numeric and categorical data. Data & Knowledge Engineering, 2007, 63: 503-527

[11] Ahmad A, Dey L. A method to compute distance between two categorical values of same attribute in unsupervised learning for categorical data set. Pattern Recognition Letters, 2007, 28: 110-118

[12] 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法. 科学出版社，2003

[13] 张敏，于剑. 基于划分的模糊聚类算法. 软件学报，2004，15(6)：858-868

[14] 陈宁，陈安，周龙骧. 数值型和分类型混合数据的模糊 K-Prototypes 聚类算法. 软件学报，2001，12(8)：1107-1119

[15] 郭建生，赵奕，施鹏飞. 一种有效的用于数据挖掘的动态概念聚类算法. 软件学报，2001，12(4)：582-591