函数 S-粗集与规律 *F*-隐藏

邱育锋[1,3] 杜英玲[2] 史开泉[1]
（山东大学数学与系统科学学院 济南 250100）[1] （山东大学控制科学与工程学院 济南 250061）[2]
（福建龙岩学院数学与计算机科学学院 龙岩 364000）[3]

摘 要 函数单向 S-粗集（Function one direction singular rough sets）是用 R-函数等价类定义的，函数是个规律；函数单向 S-粗集具有规律特征、动态特征。利用函数单向 S-粗集，给出规律 *F*-隐藏概念，提出规律的 *F*-隐藏定理，隐藏识别准则，给出规律的 *F*-隐藏的应用。规律的 *F*-隐藏是函数 S-粗集中的一个新的应用研究方向，函数 S-粗集是信息规律研究中的一个新理论与新工具。

关键词 函数单向 S-粗集，规律 *F*-隐藏，隐藏定理，隐藏识别，应用

Function S-rough Sets and Law *F*- hiding

QIU Yu-feng[1,3] DU Ying-ling[2] SHI Kai-quan[1]
(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, China)[1]
(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)[2]
(School of Mathematics and Computer Science, Longyan University, Longyan 364000, China)[3]

Abstract Function one direction S-rough sets (Function one direction singular rough sets) were defined by employing *R*-function equivalence class. A function is a law. Function one direction S-rough sets have law characteristics and dynamic characteristics. By employing function one direction S-rough sets, the concept of law *F*-hiding was presented; the theorem of law *F*-hiding and the recognition criteria of law *F*-hiding were proposed; and the applications of law *F*-hiding were given. Law *F*-hiding is a new application area of function S-rough sets, and function S-rough sets is a new theory and new tools for the research of information laws.

Keywords Function one direction S-rough sets, Law *F*-hiding, Hiding theorem, Hiding recognition, Application

1 引言

2002年，文献[1]改进了 Z. Pawlak 粗集[2]，提出了 S-粗集（Singular rough sets），文献[3-17]给出 S-粗集的若干特征与应用。S-粗集是用具有动态特征的 *R*-元素等价类$[x]$定义的，S-粗集具有动态特性。这里应当指出：1982年，Z. Pawlak 提出的粗集具有静态特性。这是因为：Z. Pawlak 粗集是用具有静态特性的 *R*-元素等价类$[x]$定义的。2005年，文献[18,19]改进了 S-粗集，提出函数 S-粗集（Function singular rough sets），文献[20-39]给出函数 S-粗集的若干特征与应用。函数 S-粗集是用具有动态特性的 *R*-函数等价类$[u]$定义的，函数 S-粗集具有规律特征、动态特征。函数 S-粗集具有三类形式[18]：函数单向 S-粗集（Function one direction singular rough sets），函数双向 S-粗集（Function two direction singular rough sets），函数单向 S-粗集对偶（dual of function one direction singular rough sets）。本文给出的讨论，是在函数单向 S-粗集上进行的。因为函数单向 S-粗集具有规律特征，下近似$(R,F)_\circ(Q^\circ)$，上近似$(R,F)^\circ(Q^\circ)$也具有规律特征。设(α_-,α^-)是函数单向 S-粗集$((R,F)_\circ(Q^\circ),(R,F)^\circ(Q^\circ))$的属性集，若对$\alpha_-,\alpha^-$进行属性补充，则$((R,F)_\circ(Q^\circ),(R,F)^\circ(Q^\circ))$生成多个$((R,F)_\circ(Q^\circ)_F,(R,F)^\circ(Q^\circ)^F)_i$，$((R,F)_\circ(Q^\circ)_F,(R,F)^\circ(Q^\circ)^F)_i$是$((R,F)_\circ(Q^\circ),(R,F)^\circ(Q^\circ))$的子集，$i=1,2,\cdots,m$；换一个说法，$((R,F)_\circ(Q^\circ)_F,(R,F)^\circ(Q^\circ)^F)_i$隐藏在$((R,F)_\circ(Q^\circ),(R,F)^\circ(Q^\circ))$中。对函数单向 S-粗集$((R,F)_\circ(Q^\circ),(R,F)^\circ(Q^\circ))$再认识，我们能够得到这样的结论：函数单向 S-粗集，本质上是一个规律对$(\mu(x)_-,\mu(x)^-)$；$\mu(x)_-$是$[u]_-=(R,F)_\circ(Q^\circ)$生成的规律，$\mu(x)^-$是$[u]^-=(R,F)^\circ(Q^\circ)$生成的规律，$[u]_-=(R,F)_\circ(Q^\circ)\subseteq(R,F)^\circ(Q^\circ)=[u]^-$。

本文把函数单向 S-粗集与规律隐藏交叉，渗透；给出函数单向 S-粗集与规律 *F*-隐藏的讨论，给出应用；函数单向 S-粗集与规律 *F*-隐藏是函数单向 S-粗集中的一个新的应用研究方向。

为了讨论的方便，又能容易接受本文给出的讨论，把函数单向 S-粗集，引入到第2节中，作为本文讨论依赖的理论基础。

2 函数单向 S-粗集[18,19]

约定：$D(x)$是有限函数论域；$Q(x)=\{u(x)_1,u(x)_2,\cdots,u(x)_m\}\subset D(x)$是有限函数集；$u(x),v(x)$是$D(x)$上的函

到稿日期：2008-04-28 本文受山东省自然科学基金项目（Y2007H02）资助。

邱育锋（1958—），男，副教授，研究方向为粗系统理论与应用；**杜英玲**（1982—），女，硕士，研究方向为粗系统理论与应用；**史开泉**，男，教授，博士生导师，研究方向为粗集理论与应用。

数，$[u(x)]$是$D(x)$上的R-函数等价类，为了简单，又不产生混乱，$D(x),Q(x),u(x),v(x),[u(x)]$分别记作$D,Q,u,v,[u]$。$f\in F$是函数迁移，$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$是函数迁移族，$f\in F$的特征是：$v\in D, v\overline{\in}Q,\ f(v)=u\in Q$；$\overline{f}\in\overline{F}$是函数迁移，$\overline{F}=\{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_m\}$是函数迁移族，$\overline{f}\in\overline{F}$的特征是：$u\in Q,\overline{f}(u)=v\overline{\in}Q$。

给定函数集合$Q\subset D$，称$Q^{\circ}\subset D$是Q的S-函数集合(Singular function sets)，如果

$$Q^{\circ}=Q\cup\{v|v\in D,v\overline{\in}Q,f(v)=u\in Q\} \tag{1}$$

Q^f是Q的f-扩张，如果

$$Q^f=\{v|v\in D,v\overline{\in}Q,f(v)=u\in Q\} \tag{2}$$

$(R,F)_{\circ}(Q^{\circ}),(R,F)^{\circ}(Q^{\circ})$分别是$Q^{\circ}\subset D$的下近似，上近似，如果

$$(R,F)_{\circ}(Q^{\circ})=\cup[u]=\{u|u\in D,[u]\subseteq Q^{\circ}\} \tag{3}$$

$$(R,F)^{\circ}(Q^{\circ})=\cup[u]=\{u|u\in D,[u]\cap Q^{\circ}\neq\phi\} \tag{4}$$

$(R,F)_{\circ}(Q^{\circ}),(R,F)^{\circ}(Q^{\circ})$构成的集合对，称作$Q^{\circ}\subset D$的函数单向S-粗集(Function one direction singular rough sets)，如果

$$((R,F)_{\circ}(Q^{\circ}),(R,F)^{\circ}(Q^{\circ})) \tag{5}$$

$B_{nR}(Q^{\circ})$称作$Q^{\circ}\subset D$的R-边界，如果

$$B_{nR}(Q^{\circ})=(R,F)^{\circ}(Q^{\circ})-(R,F)_{\circ}(Q^{\circ}) \tag{6}$$

$As(Q^{\circ})$称作函数单向S-粗集生成的副集，如果

$$As(Q^{\circ})=\{v|v\in D,v\overline{\in}Q,f(v)=u\widetilde{\overline{\in}}Q\} \tag{7}$$

函数单向S-粗集的更多概念，特性与应用，见文献[20-39]。

3　函数单向S-粗集与F-隐藏规律生成

定义1　给定函数等价类$[u]=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$，$\forall u_i\in[u]$具有离散数据分布，$i=1,2,\cdots,m$；而且

$$u_i=(u_i(1),u_i(2),\cdots,u_i(n+1)) \tag{8}$$

利用

$$u(k)=\sum_{i=1}^{m}u_i(k),k=1,2,\cdots,n+1 \tag{9}$$

得到u，u称作$[u]$的离散生成，而且

$$u=(u(1),u(2),\cdots,u(n+1)) \tag{10}$$

这里：$u_i(k),u(k)\in R$，R是实数集，$i=1,2,\cdots,m$；$k=1,2,\cdots,n+1$。

定义2　称$\mu(x)$是$[u]$生成的规律，而且

$$\mu(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

如果$\mu(x)$是通过数据点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_{n+1},y_{n+1})$与式(11)得到的

$$\mu(x)=\sum_{j=1}^{n+1}y_j\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n+1}\frac{x-x_i}{x_j-x_i} \tag{11}$$

这里：数据点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_{n+1},y_{n+1})$是式(10)给出的。

定义3　给定函数等价类$[u]=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$是$[u]$的属性集，若存在属性$\beta_i\in V,\beta_i\overline{\in}\alpha$，元素迁移[1,3-17,38,39] $f\in F$把β_i变成$f(\beta_i)=\alpha_i{}'\in\alpha$，$\alpha$变成$\alpha^f$，而且

$$\alpha^f=\alpha\cup\{f(\beta_i)=\alpha_i{}'\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_i{}'\} \tag{12}$$

具有属性集α^f的$[u]^f$，$[u]^f$称作$[u]$的f-隐藏，而且

$$[u]^f=\{u_1,u_2,\cdots,u_\lambda\} \tag{13}$$

$[u]^f$生成的规律$\mu(x)^f$称作规律$\mu(x)$的f-隐藏规律，而且

$$\mu(x)^f=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0 \tag{14}$$

这里：$[u]^f$是$[u]$的f-隐藏的意义是：$[u]^f\subseteq[u]$。

定义4　设$[u]_-=(R,F)_{\circ}(Q^{\circ})=\cup[u]$，$\alpha_-=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$是$[u]_-$的属性集，称$\mu(x)_-$是$[u]_-$生成的规律，而且

$$\mu(x)_-=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0 \tag{15}$$

称$\mu(x)_F$是$\mu(x)_-$的F-隐藏规律，而且

$$\mu(x)_F=c_{n,F}x^n+c_{n-1,F}x^{n-1}+\cdots+c_{1,F}x+c_{0,F} \tag{16}$$

如果$\mu(x)_-$的属性集α_-与$\mu(x)_F$的属性集α_F，满足

$$\alpha_-\subseteq\alpha_F \tag{17}$$

定义5　设$[u]^-=(R,F)^{\circ}(Q^{\circ})=\cup[u]$，$\alpha^-=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q\}$是$[u]^-$的属性集，称$\mu(x)^-$是$[u]^-$生成的规律，而且

$$\mu(x)^-=d_nx^n+d_{n-1}x^{n-1}+\cdots+d_1x+d_0 \tag{18}$$

称$\mu(x)^F$是$\mu(x)^-$的F-隐藏规律，而且

$$\mu(x)^F=d_n^Fx^n+d_{n-1}^Fx^{n-1}+\cdots+d_1^Fx+d_0^F \tag{19}$$

如果$\mu(x)^-$的属性集α^-与$\mu(x)^F$的属性集α^F，满足

$$\alpha^-\subseteq\alpha^F \tag{20}$$

定义6　称

$$(\mu(x)_-,\mu(x)^-) \tag{21}$$

是函数单向S-粗集生成的规律对，如果$\mu(x)_-$，$\mu(x)^-$分别是$[u]_-$，$[u]^-$生成的规律。

定义7　称

$$(\mu(x)_F,\mu(x)^F) \tag{22}$$

是函数单向S-粗集生成的F-隐藏规律对，如果$\mu(x)_F,\mu(x)^F$分别是$\mu(x)_-$，$\mu(x)^-$生成的F-隐藏规律。

定义8　称$\mu(x)_{\overline{F}}$是$\mu(x)_-$的$\overline{F}$-隐藏规律，如果$\mu(x)_{\overline{F}}$的属性集$\alpha_{\overline{F}}$与$\mu(x)_-$的属性集α_-，满足

$$\alpha_{\overline{F}}\subseteq\alpha_- \tag{23}$$

这里：$\alpha_-=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$，$\alpha_{\overline{F}}=\alpha_--\{\overline{f}(\alpha_k)|k=1,2,\cdots,t\}=\{\alpha_{t+1},\alpha_{t+2},\cdots,\alpha_p\}$；$\alpha_k\in\alpha_-$，元素迁移把$\alpha_k$变成$\overline{f}(\alpha_k)=\beta_k\overline{\in}\alpha_-$，$k=1,2,\cdots,t$。

这里给出特别的说明：F-隐藏规律$\mu(x)_F$表示，对规律$\mu(x)_-$的属性集α_-给予属性补充，由$\mu(x)_-$得到$\mu(x)_F$。$\overline{F}$-隐藏规律$\mu(x)_{\overline{F}}$表示，对规律$\mu(x)_-$的属性集α_-内的某些属性删除，$\overline{F}$-隐藏的意义是：$[u]_-\subseteq[u]_{\overline{F}}$；$\mu(x)_{\overline{F}}$是$[u]_{\overline{F}}$生成的规律。$F$-隐藏规律$\mu(x)_F$，$\overline{F}$-隐藏规律$\mu(x)_{\overline{F}}$，见图1。

利用定义1－8，得到

定理1(规律对$(\mu(x)_-,\mu(x)^-)$存在定理)　函数单向S-粗集生成的规律对

$$(\mu(x)_-,\mu(x)^-) \tag{24}$$

存在而且惟一。

定理2(F-隐藏规律对$(\mu(x)_F,\mu(x)^F)$存在定理)　若$\mu(x)_F$是$\mu(x)_-$生成的F-隐藏规律，$\mu(x)^F$是$\mu(x)^-$生成的F-隐藏规律，则

$$(\mu(x)_F,\mu(x)^F) \tag{25}$$

存在而且惟一。

定理1,2的证明，由定义1－7与插值多项式的惟一性得到，证明略。

定理3($\mu(x)_-$与$\mu(x)_F$关系定理)　若$\mu(x)_F$是$\mu(x)_-$的F-隐藏规律，则

$$\mu(x)_F\leqslant\mu(x)_- \tag{26}$$

证明：设α_-,α_F分别是$\mu(x)_-,\mu(x)_F$的属性集，由定义4，$\alpha_-\subseteq\alpha_F$；则有

$$[u]_F=\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}\subseteq\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}=[u]_-$$

$[u]_F$，$[u]_-$ 分别生成 $\mu(x)_F$，$\mu(x)_-$；利用式(11)与$[u]_F$，$[u]_-$，得到

$$\mu(x)_F=c_{n,F}x^n+c_{n-1,F}x^{n-1}+\cdots+c_{1,F}x+c_{0,F}\leqslant c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0=\mu(x)_-$$

或者 $\mu(x)_F\leqslant\mu(x)_-$

定理 4($\mu(x)^-$与$\mu(x)^F$关系定理)　若$\mu(x)^F$是$\mu(x)^-$的F-隐藏规律，则

$$\mu(x)^F\leqslant\mu(x)^- \tag{27}$$

定理 5($(\mu(x)_-,\mu(x)^-)$与$(\mu(x)_F,\mu(x)^F)$关系定理)　若$(\mu(x)_F,\mu(x)^F)$是$(\mu(x)_-,\mu(x)^-)$生成的F-隐藏规律对，则

$$(\mu(x)_F,\mu(x)^F)\leqslant(\mu(x)_-,\mu(x)^-) \tag{28}$$

这里：$(\mu(x)_F,\mu(x)^F)\leqslant(\mu(x)_-,\mu(x)^-)$表示：$\mu(x)_F\leqslant\mu(x)_-$，$\mu(x)^F\leqslant\mu(x)^-$。

定理 6(F-隐藏规律$\mu(x)^F$与$\overline{F}$-隐藏规律$\mu(x)_{\overline{F}}$生成定理)　若$(\mu(x)_-,\mu(x)^-)$是函数单向S-粗集生成的规律对，$(\mu(x)_{\overline{F}},\mu(x)^F)$是$\overline{F}$-隐藏规律$\mu(x)_{\overline{F}}$与$F$-隐藏规律$\mu(x)^F$生成的规律对，则

$$(\mu(x)_{\overline{F}},\mu(x)^F)\geqslant\leqslant(\mu(x)_-,\mu(x)^-) \tag{29}$$

这里："$\geqslant\leqslant$"是一个特殊的符号，"$\geqslant\leqslant$"是"$\geqslant$"与"$\leqslant$"的组合；"$\geqslant$"表示$\mu(x)_{\overline{F}}\geqslant\mu(x)_-$，"$\leqslant$"表示$\mu(x)^F\leqslant\mu(x)^-$。

证明：由定理 4 得到$\mu(x)^F\leqslant\mu(x)^-$；由定义 8，$\mu(x)_{\overline{F}}$的属性集$\alpha_{\overline{F}}$与$\mu(x)_-$的属性集$\alpha_-$，满足$\alpha_{\overline{F}}\subseteq\alpha_-$，则有

$$[u]_-=\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}\subseteq\{u_1,u_2,\cdots,u_q\}=[u]_{\overline{F}}$$

利用式(9)，分别得到$[u]_-$，$[u]_{\overline{F}}$生成的数据点：

$[u]_-$：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_{n+1},y_{n+1})$

$[u]_{\overline{F}}$：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_{n+1},y_{n+1})$

利用式(11)，得到$[u]_-$生成的规律$\mu(x)_-$，$[u]_{\overline{F}}$生成的规律$\mu(x)_{\overline{F}}$，而且

$$\mu(x)_-=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0\leqslant c_{n,\overline{F}}x^n+c_{n-1,\overline{F}}x^{n-1}+\cdots+c_{1,\overline{F}}x+c_{0,\overline{F}}=\mu(x)_{\overline{F}}$$

或者　$\mu(x)_-\leqslant\mu(x)_{\overline{F}}$

相似得到$\mu(x)^F\leqslant\mu(x)^-$

因此得到(29)。

由定理 6 直接得到

闭合规律嵌入原理

若$w(\mu_-,\mu^-)$是$\mu(x)_-$，$\mu(x)^-$生成的二维闭合规律，$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)$是$\mu(x)_{\overline{F}}$，$\mu(x)^F$生成的二维闭合规律，而且$w(\mu_-,\mu^-)$与$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)$具有两个公共点；则$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)$嵌入$w(\mu_-,\mu^-)$内。

闭合规律嵌入原理的直观意义，见图 1 中的阴影部分。

4　规律的F-隐藏与隐藏定理

定义 9　称$w(\mu_-,\mu^-)$是规律$\mu(x)_-$，$\mu(x)^-$生成的二边规律，如果规律$\mu(x)^-$与规律$\mu(x)^-$，在端点处有公共点；$\mu(x)_-$，$\mu(x)^-$分别称作$w(\mu_-,\mu^-)$的下边界，上边界。

定义 10　称$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)$是$w(\mu_-,\mu^-)$的$F$-隐藏规律，如果$\mu(x)_{\overline{F}}$是$\mu(x)_-$的$\overline{F}$-隐藏规律，$\mu(x)^F$是$\mu(x)^-$的$F$-隐藏规律；$\mu(x)_{\overline{F}}$，$\mu(x)^F$分别称作$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)$的下边界，上边界。

显然，若$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)$是$w(\mu_-,\mu^-)$的$F$-隐藏规律，则有$\mu(x)^F\leqslant\mu(x)^-$，$\mu(x)_-\leqslant\mu(x)_{\overline{F}}$，它们具有公共点$a,b$；见图 1。

定义 11　数对

$$(\rho_{-,\overline{F}},\rho^{-,F}) \tag{30}$$

称作$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)$关于$w(\mu_-,\mu^-)$的$F$-隐藏度，如果

$$\rho_{-,\overline{F}}=\frac{\sum_{k=1}^{n+1}(y_{-,k}-\bar{y}_-)(y_{\overline{F},k}-\bar{y}_{\overline{F}})}{\left(\sum_{k=1}^{n+1}(y_{-,k}-\bar{y}_-)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n+1}(y_{\overline{F},k}-\bar{y}_{\overline{F}})^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{31}$$

$$\rho^{-,F}=\frac{\sum_{k=1}^{n+1}(y_k^- -\bar{y}^-)(y_k^F-\bar{y}^F)}{\left(\sum_{k=1}^{n+1}(y_k^- -\bar{y}^-)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n+1}(y_k^F-\bar{y}^F)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{32}$$

这里：$\bar{y}_-=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}y_{-,k}$，$y_{-,k}$是$\mu(x)_-$在$k=1,2,\cdots,n+1$的离散值；$\bar{y}_{\overline{F}}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}y_{\overline{F},k}$，$y_{\overline{F},k}$是$\mu(x)_{\overline{F}}$在$k=1,2,\cdots,n+1$的离散值；$\bar{y}^-$，$\bar{y}^F$分别与$\bar{y}_-$，$\bar{y}_{\overline{F}}$相似。

由定义 9—11，得到

定理 7(F-隐藏规律存在定理)　设$w(\mu_-,\mu^-)$是规律$\mu(x)_-$，$\mu(x)^-$生成的二边规律，若$\mu(x)_{\overline{F}}$是$\mu(x)_-$的$\overline{F}$-隐藏规律，$\mu(x)^F$是$\mu(x)^-$的F-隐藏规律，则$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)$是$w(\mu_-,\mu^-)$的$F$-隐藏规律。

证明由定义 9，10，定理 1，2 直接得到，略。

定理 8(F-隐藏规律可分辨定理)　若$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)$是$w(\mu_-,\mu^-)$的$F$-隐藏规律，则

$$\underset{(\alpha_-,\alpha^-)\neq\alpha_{\overline{F}},\alpha^F}{\mathrm{DIS}}(w(\mu_-,\mu^-),w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)) \tag{33}$$

这里：(α_-,α^-)是$(\mu(x)_-,\mu(x)^-)$的属性集，$(\alpha_{\overline{F}},\alpha^F)$是$(\mu(x)_{\overline{F}},\mu(x)^F)$的属性集。

定理 9(有限F-隐藏规律定理)　若存在F-隐藏度序列，而且

$$(\rho_{-,\overline{F}},\rho^{-,F})_\lambda\leqslant(\rho_{-,\overline{F}},\rho^{-,F})_{\lambda-1}\leqslant\cdots\leqslant(\rho_{-,\overline{F}},\rho^{-,F})_1 \tag{34}$$

则 1($w(\mu_-,\mu^-)$存在有限个$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)_i$，$i=1,2,\cdots,\lambda$；$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)_i$是$w(\mu_-,\mu^-)$的$F$-隐藏规律

2($w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)_k$嵌入$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)_{k-1}$内

这里：$(\rho_{-,\overline{F}},\rho^{-,F})_k\leqslant(\rho_{-,\overline{F}},\rho^{-,F})_{k-1}$表示：$\rho_{-,\overline{F},k}\leqslant\rho_{-,\overline{F},k-1}$，$\rho_k^{-,F}\leqslant\rho_{k-1}^{-,F}$，$k=1,2,\cdots,\lambda$。

由定理 7—9 得到

***F*-隐藏规律识别准则**

任意两个F-隐藏规律$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)_i$，$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)_j$，它们是可分辨的，必有

$$\rho_{-,\overline{F},i}-\rho_{-,\overline{F},j}\neq0 \tag{35}$$

$$\rho_i^{-,F}-\rho_j^{-,F}\neq0 \tag{36}$$

5　*F*-隐藏规律的应用

把规律F-隐藏应用到图像识别系统。A是图像$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)$的发送者，$B$是图像$w(\mu_{\overline{F}},\mu^F)$的接收者，识别者。$A$发送给$B$下列参数：规律$\mu(x)_-$，$\mu(x)^-$；数据集$\zeta,\eta$，而且

$$\begin{aligned}\mu(x)_-&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\&=0.00234127x^7-0.06819444x^6+\\&\quad0.78180556x^5-4.47152778x^4+\\&\quad13.40013889x^3-20.66027778x^2+\\&\quad16.61571429x+9.40000000\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\mu(x)^-&=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0\\&=0.00088294x^7-0.02993056x^6+\\&\quad0.40701389x^5-2.82534722x^4+\\&\quad10.57972222x^3-20.79472222x^2+\end{aligned} \tag{38}$$

$19.06238095x+8.60000000$

$$\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6,\zeta_7,\zeta_8)$$
$$=(0.00,0.60,1.30,1.20,0.80,1.20,1.50,0.00) \quad (39)$$

$$\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,\eta_6,\eta_7,\eta_8)$$
$$=(0.00,-1.00,-0.95,-0.70,-1.00,-1.00,-0.40,0.00) \quad (40)$$

这里：$\zeta_k=p_k-q_k$；$\eta_k=\lambda_k-t_k$。

B 接收参数(37)，(38)，把(37)，(38)离散，得到表 1。

表 1 $\mu(x)_-$，$\mu(x)^-$ 的离散数据

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu(x)_-$	15.00	16.60	18.30	17.80	16.80	17.70	18.40	17.00
$\mu(x)^-$	15.00	14.20	14.45	14.60	13.90	13.60	14.80	17.00

利用(39)，(40)，表 1 中的离散数据，B 得到表 2。

表 2 $\mu(x)_{\bar{F}}$，$\mu(x)^F$ 的离散数据

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu(x)^F$	15.00	16.00	17.00	16.60	16.00	16.50	16.90	17.00
$\mu(x)_{\bar{F}}$	15.00	15.20	15.40	15.30	14.90	14.60	15.20	17.00

表 2 中：$\mu(x)^F$ 中的数据 $y_k=p_k-\zeta_k$；p_k 是表 1 中 $\mu(x)^-$ 的数据，ζ_k 是(39)中的数据；$\mu(x)_{\bar{F}}$ 中的数据 $\lambda_k=q_k-\eta_k$；q_k 是表 1 中 $\mu(x)_-$ 的数据，η_k 是(40)中的数据。

B 利用表 2 中的数据构成的数据点与(11)，得到

$$\mu(x)^F=c_n^F x^n+c_{n-1}^F x^{n-1}+\cdots+c_1^F x+c_0$$
$$=0.00123016x^7-0.03458333x^6+0.37819444x^5-2.01458333x^4+5.34152778x^3-6.50083333x^2+3.62904762x+14.20000000 \quad (41)$$

$$\mu(x)_{\bar{F}}=d_{n,\bar{F}}x^n+d_{n-1,\bar{F}}x^{n-1}+\cdots+d_{1,\bar{F}}x+d_0$$
$$=-0.00015873x^7+0.00430556x^6-0.04736111x^5+0.28680556x^4-1.07652778x^3+2.40888889x^2-2.57595238x+16.00000000 \quad (42)$$

利用(41)，(42)，B 得到图像 $w(\mu_{\bar{F}},\mu^F)$，如图 1 所示。

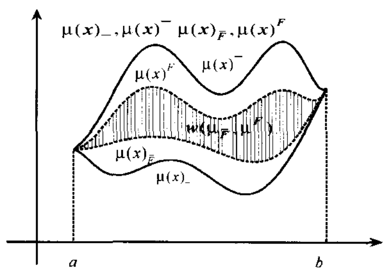

图 1 $\mu(x)^F$ 是 $\mu(x)^-$ 的 F-隐藏规律，$\mu(x)_{\bar{F}}$ 是 $\mu(x)_-$ 的 $\bar{F}$-隐藏规律；A 发送图像 $w(\mu_-,\mu^-)$ 给 B；$\mu(x)_-$，$\mu(x)^-$ 构成 $w(\mu_-,\mu^-)$；B 收到图像 $w(\mu_{\bar{F}},\mu^F)$，$\mu(x)_{\bar{F}}$，$\mu(x)^F$ 构成 $w(\mu_{\bar{F}},\mu^F)$。$w(\mu_{\bar{F}},\mu^F)$ F-隐藏在 $w(\mu_-,\mu^-)$ 内

事实上，A 把一幅假图像 $w(\mu_-,\mu^-)$ 发送给 B(这里：$w(\mu_-,\mu^-)$ 由(37)，(38)生成)；B 从(37)－(40)，得到真图像 $w(\mu_{\bar{F}},\mu^F)$；$w(\mu_{\bar{F}},\mu^F)$ 是 $w(\mu_-,\mu^-)$ 的 F-隐藏规律，$w(\mu_{\bar{F}},\mu^F)$ 嵌入在 $w(\mu_-,\mu^-)$ 内。B 利用 F-隐藏规律识别准则，能够对 $w(\mu_{\bar{F}},\mu^F)$ 给出 F-隐藏识别。

结束语 函数 S-粗集是改进了 S-粗集[1,3-17,38,39]被提出的，函数 S-粗集拓广了 Z. Pawlak 粗集的应用空间。因为函数 S-粗集是用 R-函数等价类$[u]$定义的，$u_i\in[u]$是一个函数，函数是一条规律。函数 S-粗集是粗集理论中的一个新的理论与应用研究领域。

参 考 文 献

[1] Shi Kaiquan. S-rough sets and its applications in diagnosis- recognition for disease// IEEE Proceedings of the First International Conference on Machine Learning and Cybernetics. 2002(1):50-54

[2] Pawlak Z . Rough sets . International Journal of Computer and Information Sciences,1982(11):341-356

[3] Shi Kaiquan,Cui Yuquan. F-decomposition and $\bar{F}$-reduction of S-rough sets. An International Journal Advances in Systems Science and Applications,2004(4):487-499

[4] Shi Kaiquan. S-rough sets and knowledge separation. Journal of Systems Engineering and Electronics,2005(2):403-410

[5] 史开泉. S-粗集与新材料发现-识别. 系统工程与电子技术，2006(3):383-388

[6] Shi Kaiquan,Chang Tingcheng. One direction S-rough sets. International Journal of Fuzzy Mathematics,2005(2):319-334

[7] Shi Kaiquan. Two direction S-rough sets. International Journal of Fuzzy Mathematics,2005(2):335-349

[8] Wang Hongyu,Liu Yulan,Shi Kaiquan. Memory Knowledge and its memory mining. An International Journal Advances in systems Science and Applications,2005(4):546-553

[9] Shi Kaiquan , Cui Yuquan . One direction S - rough decision and decision model // IEEE proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2004(3):1352-1356

[10] Cui Minghui,Shi Kaiquan. f-heredity knowledge and f-heredity mining. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2006(1):101-106

[11] 李建，史开泉. 单元素迁移与 S-粗集的动态结构特征. 山东大学学报:理学版,2006(6):36-39

[12] Hu Haiqing , Wang yan , Shi Kaiquan . S - rough communication and its Characteristics. Journal of Systems Engineering and Electronics,2007(1):148-154

[13] Yin Shoufeng,Hu Haiqing,Shi Kaiquan. Two direction S-rough communication and its heredity-variation characteristics. International Journal of Fuzzy Mathematics,2007(3):593-606

[14] 黄顺亮，郝秀梅，史开泉. 单向 S-对偶粗决策规律与决策规律挖掘. 山东大学学报:理学版,2007(10):31-36

[15] 赵俊恺，蔡成闻，任雪芳. 双向变异 S-概率粗集与它的属性概率性质. 山东大学学报:理学版,2007(10):27-30

[16] 蔡成闻，赵俊恺，史开泉. 单向 S-粗集与数据筛选-过滤. 山东大学学报:理学版,2007(8):46-54

[17] 付海艳，史开泉. 知识过滤与属性 f-迁移依赖. 山东大学学报:理学版,2007(10):54-58

[18] Shi Kaiquan. Function S-rough sets and function transfer. An International Journal Advances in Systems Science and Applications,2005(1):1-8

[19] 史开泉. 函数 S-粗集. 山东大学学报:理学版,2005(1):1-10

[20] 张萍，史开泉，卢昌荆. 函数 S-粗集与粗规律挖掘-分离. 系统工程与电子技术,2005(11):1899-1902

[21] Shi Kaiquan. Function S-roughs sets and mining-discovery of rough law in system. Journal of Systems Engineering and Electronics,2006(2):318-326

(下转第 180 页)

同样该系统的上近似规律和它的 F-上分解规律之间也存在这样的关系。粗规律能量和它的 F-分解粗规律能量之间的关系，如图 1 所示。

结束语 从函数 S-粗集的观点来看，系统 T 的函数集是一个 R-函数等价类。基于函数等价类$[u(x)]$可以生成系统的规律 $p(x)$，而规律能量 w 则可以成为系统某种特性的度量。因此，研究系统规律能量的特性与系统属性之间的变化关系就有重要的现实意义。本文从该问题出发，提出了一系列关于规律能量和属性干扰度关系的定理，为系统规律分析作了理论准备。应用函数 S-粗集进行规律挖掘与决策分析是粗集理论[21]中的一个新的研究方向。

参考文献

[1] Shi Kaiquan. Function S-rough Sets and Function Transfer [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2005, 5 (1): 1-8

[2] 史开泉. 函数 S-粗集[J]. 山东大学学报：理学版，2005，40(1)：1-10

[3] Shi Kaiquan. S-rough sets and its applications in diagnosis-recognition fordisease[C]// IEEE Proceedings of the First International Conference on Machine Learning and Cybernetics. 2002, 1: 50-54

[4] Shi Kaiquan, Chang Tingcheng. One Direction S-rough Sets[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005(2): 319-334

[5] Shi Kaiquan. Two Direction S-rough Sets [J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005(2): 335-349

[6] 张萍，史开泉，卢昌荆. 函数 S-粗集与粗规律挖掘-分离[J]. 系统工程与电子技术，2005，27(11)：1899-1902

[7] Zhang Ping, Shi Kaiquan. Function S-rough Sets and Rough Law Heredity-mining[C]// IEEE Proceedings of the Forth International Conference on Machine Learning and Cybernetics. 2005, 3: 3148-3152

[8] 史开泉. 函数 S-粗集与它生成的 F-遗传规律[J]. 山东大学学报：理学版，2006，41(2)：1-6

[9] Cui Yuquan, Shi Kaiquan. Function S-rough Sets and Its Applications [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2006, 17(2): 331-338

[10] Shi Kaiquan, Yao Bingxue. Function S-rough Sets and Recognition of Financial Risk Laws[C]// The First International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology (RSKT). 2006(1): 247-253

[11] Shi Kaiquan. Function S-rough Sets and Mining-discovery of Rough Law in Systems [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2006, 17(4): 919-926

[12] 史开泉，崔玉泉. S-粗集与粗决策[M]. 北京：科学出版社，2006：155-165

[13] 史开泉，姚炳学. 函数 S-粗集与系统规律挖掘[M]. 北京：科学出版社，2007：51-68

[14] Shi Kaiquan, Huang Yoping. Function S-rough Sets and Law Mining [C]// International Conference on Fuzzy Information Engineering. 2007, 1: 107-118

[15] 薛佩军，史开泉，卢昌荆. $\bar{F}$-生成规律与系统规律识别[J]. 系统工程与电子技术，2007，29(1)：53-56

[16] 史开泉，姚炳学. 函数 S-粗集与规律辨识. 中国科学(E)，2008，38(4)：553-564

[17] Shi Kaiquan, Yao Bingxue. Function S-rough Sets and Law Identification. Science in China(F), 2008, 51(5): 499-510

[18] 史开泉，赵建立. 函数 S-粗集与隐藏规律安全-认证. 中国科学(E)，2008，38(5)：712-722

[19] Shi Kaiquan, Zhao Jianli. Function S-rough Sets and Security-authentication of Hiding Law. Science in China(F), 2008, 51(6): 631-643

[20] 黄顺亮，史开泉，付海燕. 粗规律 F-分解与规律识别[J]. 计算机工程与应用，2007，43(36)：25-28

[21] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356

（上接第 168 页）

[22] Cui Yuquan, Shi Kaiquan. Function S-rough sets and its applications. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2006(2): 331-338

[23] Shi Kaiquan, Yao Bingxue. Function S-rough sets and recognition of financial risk laws // The First International Conference on Rough sets and Knowledge Technology. 2006, RSKT, 1: 247-253

[24] Shi Kaiquan, Xia Jiarong. Function S-rough sets and mining-discovery of rough law in systems. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2006(4): 919-926

[25] 史开泉. 系统 F-规律入侵与识别. 山东大学学报：理学版，2006(6)：1-10

[26] Li Dongya, Shi Kaiquan. Function S-rough sets and their law Characteristic. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2007(2): 225-231

[27] Shi Kaiquan, Xu Xiaojing. F-law collision and system state recognition. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2007(2): 259-264

[28] Shi Kaiquan, Chen Hui. $\bar{F}$-law collision and system state recognition. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2007(1): 53-56

[29] 薛佩军，史开泉，卢昌荆. $\bar{F}$-生成规律与系统规律识别. 系统工程与电子技术，2007(1)：53-56

[30] 王晶，史开泉，雷英杰. 一种基于函数 S-粗集的态势预测方法. 系统工程与电子技术，2007(2)：214-216

[31] Shi Yuqiang, Shi Kaiquan, Wang Hongyu. Function S-rough sets and system state recognition. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2007(3): 733-743

[32] 杜英玲，史开泉. F-规律推理与规律挖掘. 系统工程与电子技术，2007(6)：994-997

[33] Li Dongya, Shi Kaiquan. Function S-rough sets and its heredity law depending on the extension of attributes. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2007(4): 769-782

[34] 史开泉，姚炳学. 函数 S-粗集与规律辨识. 中国科学(E)，2008(4)：553-564

[35] Shi Kaiquan, Yao Bingxue. Function S-rough sets and law identification. SCIENCE IN CHINA (F), 2008(5): 499-510

[36] 史开泉，赵建立. 函数 S-粗集与隐藏规律安全-认证. 中国科学(E)，2008(5)：712-722

[37] Shi Kaiquan, Zhao Jianli. Function S-rough sets and security-authentication of hiding law. SCIENCE IN CHINA (F), 2008(6): 631-643

[38] 史开泉，崔玉泉. S-粗集与粗决策. 北京：科学出版社，2006：39-54

[39] 史开泉，姚炳学. 函数 S-粗集与系统规律挖掘. 北京：科学出版社，2007：51-68