

# 基于三分法的 IFS 非隶属度函数确定方法

雷 阳 华继学 殷宏燕 雷英杰

(空军工程大学导弹学院计算机工程系 陕西 713800)

**摘 要** 针对直觉模糊集(IFS)的非隶属度函数难以确定的问题,提出一种基于三分法的 IFS 非隶属度函数确定方法。首先,给出了确定 IFS 非隶属度函数的计算公式和非犹豫度指数的概念,规范了 IFS 非隶属度函数的确定方法,进而给出了非犹豫度指数的性质定理。其次,提出了基于三分法的 IFS 非隶属度函数的计算方法,给出了正规直觉模糊集的概念,证明了该方法确定的直觉模糊集是正规直觉模糊集。最后,以空袭目标识别的指标参数(飞行高度)实例,验证了方法的有效性。

**关键词** 直觉模糊集,隶属度函数,非隶属度函数,规范化,三分法

**中图法分类号** TP182; TP391 **文献标识码** A

## Technique for Ascertaining Nonmembership Functions of Intuitionistic Fuzzy Sets Based on Trichotomy

LEI Yang HUA Ji-xue YIN Hong-yan LEI Ying-jie

(Department of Computer Science and Engineering, Missile Institute, Air Force Engineering University, Shaanxi 713800, China)

**Abstract** Aiming at the problems of ascertaining nonmembership functions of Intuitionistic Fuzzy Sets (IFS), a technique for ascertaining nonmembership functions of IFS was proposed. First, calculating formula for ascertaining nonmembership functions of IFS and the conception of non-hesitancy degree were exposed and the technique got into normalization. Moreover, the theorem of properties of non-hesitancy degree was given with the course of proof. Then, calculating method for ascertaining nonmembership functions of IFS based on trichotomy was proposed. Finally, the validity of the proposed method were checked by providing a model of index and parameters, i. e. flight altitude, of air-raid Target Recognition.

**Keywords** Intuitionistic fuzzy sets, Membership functions, Nonmembership functions, Normalization, Trichotomy

## 1 引言

直觉模糊集(Intuitionistic fuzzy sets, IFS)<sup>[1-4]</sup>是对 Zadeh 模糊集(ZFS)最有影响的一种扩充和发展。IFS 增加了一个新的属性参数——非隶属度函数,进而还可以描述“非此非彼”的“模糊概念”,亦即 IFS 的隶属度、非隶属度和直觉指数可以分别表示支持、反对和中立这 3 种状态,比模糊集有更强的表达能力,能更加细腻地刻画客观世界的模糊性本质,因而引起众多学者的关注。

对于应用问题,确定 IFS 的非隶属度函数至关重要。由于直觉指数的影响,使得确定 IFS 非隶属度函数的方法呈现极大的复杂性。文献[5]研究了基于直觉模糊逻辑的近似推理方法,在进行推理合成运算时直接假定了 IFS 的隶属度函数和非隶属度函数;文献[6]也是根据具体问题直接给出有关的 IFS 隶属度函数和非隶属度函数;文献[7]在基于直觉模糊推理的威胁评估方法中,根据对具体应用问题分析设计了有关的 IFS 隶属度函数和非隶属度函数。文献[8]在研究直觉模糊推理系统的设计与实现时,给出了众多的隶属度函数形

式,如:高斯型,双侧高斯型,钟型,sigmoid 函数型,sigmoid 差型,sigmoid 积型,Z 型,II 型,S 型,梯型,三角型等隶属度函数等。隶属度函数形式的选择与实际应用问题有关。研究表明,IFS 隶属度函数的确定可以借鉴 ZFS 隶属度函数的确定方法,如:模糊统计法,F 分布法,二元对比排序法,推理法,专家评分法,因素加权综合法,频率法,增量法,集值统计迭代法,m 分类法,例证法,蕴涵解析定义法<sup>[9]</sup>等。除以上常见方法外,还有基于理论与模型的确定方法,例如基于神经网络法、基于前向模糊神经网络法、基于自组织特征映射网络模型(SOFM)等诸多方法。

但是迄今,IFS 非隶属度函数的确定方法一直未形成明确规范的思路,成为制约 IFS 应用的一个瓶颈。有鉴于此,本文研究 IFS 非隶属度函数的规范化确定问题,提出一种基于三分法的 IFS 非隶属度函数确定方法。

## 2 直觉模糊集

Atanassov 对直觉模糊集给出如下定义。

**定义 1**(直觉模糊集<sup>[1,2]</sup>) 设  $X$  是一个给定论域,则  $X$

到稿日期:2008-02-22 本文受国家自然科学基金项目(60773209),陕西省自然科学基金项目(2006F18)资助。

雷 阳(1984—),女,硕士生,研究方向为智能信息处理与信息融合,E-mail: ylei526@163.com;华继学(1966—),男,副教授,硕士生导师,研究方向为分布式软件与网络信息系统;殷宏燕(1984—),女,硕士生,研究方向为智能信息处理与网络信息安全;雷英杰(1956—),男,教授,博士生导师,研究方向为智能信息处理与智能决策等。

上的一个直觉模糊集  $A$  为

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x) \rangle \mid x \in X \} \quad (1)$$

其中  $\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1]$  和  $\gamma_A(x): X \rightarrow [0, 1]$  分别代表  $A$  的隶属函数  $\mu_A(x)$  和非隶属函数  $\gamma_A(x)$ , 且对于  $A$  上的所有  $x \in X$ ,  $0 \leq \mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1$  成立。

当  $X$  为连续空间时,

$$A = \int_X \langle \mu_A(x), \gamma_A(x) \rangle / x, x \in X$$

当  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  为离散空间时,

$$A = \sum_{i=1}^n \langle \mu_A(x_i), \gamma_A(x_i) \rangle / x_i, x_i \in X$$

直觉模糊集  $A$  有时可以简记作  $A = \langle x, \mu_A, \gamma_A \rangle$  或  $A = \langle \mu_A, \gamma_A \rangle / x$ 。显然, 每一个一般模糊子集对应于下列直觉模糊子集  $A = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$ 。

对于  $X$  中的每一个直觉模糊子集, 称  $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \gamma_A(x)$  为  $A$  中  $x$  的直觉指数 (Intuitionistic Index), 它是  $x$  对  $A$  的犹豫程度 (Hesitancy degree) 的一种测度。显然, 对于每一个  $x \in X$ ,  $0 \leq \pi_A(x) \leq 1$ , 对于  $X$  中的每一个一般模糊子集  $A$ ,  $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - [1 - \mu_A(x)] = 0, \forall x \in X$ 。

### 3 非隶属度函数的计算公式

根据 IFS 的定义可知, IFS 中有隶属度函数  $\mu_A(x)$ 、非隶属度函数  $\gamma_A(x)$  和直觉指数  $\pi_A(x)$  3 个因素, 且它们之间的关系满足以下约束:

$$\mu_A(x) + \gamma_A(x) + \pi_A(x) = 1 \quad (2)$$

亦即

$$\gamma_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \pi_A(x) \quad (3)$$

从而

$$\gamma_A(x) = [1 - \pi_A(x)] - \mu_A(x) \quad (4)$$

记  $\delta_A(x) = 1 - \pi_A(x)$ , 故有

$$\gamma_A(x) = \delta_A(x) - \mu_A(x) \quad (5)$$

式中,  $\delta_A(x)$  称为非犹豫度指数, 可以证明,  $0 \leq \delta_A(x) \leq 1$ , 且  $\mu_A(x) + \gamma_A(x) = \delta_A(x)$ 。

这样, 在用前述方法确定了隶属度函数  $\mu_A(x)$  之后, 式 (5) 就可以作为确定 IFS 非隶属度函数的计算公式。

为简便起见, 假设直觉指数为一常量值, 即  $\pi_A(x) = a$  ( $0 \leq a \leq 1$ )。研究表明, 这一假设能适合于大部分实际情况与具体问题的求解。可得:

$$\delta_A(x) = 1 - \pi_A(x) = 1 - a \quad (6)$$

这时, 非犹豫度指数亦为常量, 记为  $c = 1 - a$ , 故有

$$\gamma_A(x) = c - \mu_A(x) \quad (7)$$

在直觉指数为常量值的情况下, 公式 (7) 就可以直接作为确定 IFS 非隶属度函数的计算公式。

**定理 1 (非犹豫度指数性质)** IFS 的非犹豫度指数  $\delta_A(x)$  有如下性质:

$$(1) \mu_A(x) + \gamma_A(x) = \delta_A(x);$$

$$(2) 0 \leq \delta_A(x) \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } (1) \delta_A(x) &= 1 - \pi_A(x) \\ &= 1 - [1 - (\mu_A(x) + \gamma_A(x))] \\ &= \mu_A(x) + \gamma_A(x) \end{aligned}$$

故得证。

$$\begin{aligned} (2) \text{ 因为 } \pi_A(x) &= 1 - \mu_A(x) - \gamma_A(x) \\ &= 1 - [\mu_A(x) + \gamma_A(x)] \end{aligned}$$

$$= 1 - \delta_A(x)$$

即

$$0 \leq 1 - \delta_A(x) \leq 1$$

$$\text{所以 } 0 \leq \delta_A(x) \leq 1$$

### 4 基于三分法的非隶属度函数计算方法

三分法本质上是一种模糊统计法, 是针对具有 3 个模糊概念的隶属度函数和非隶属度函数的确定方法。该方法的基本原理是: 对论域  $X$  作模糊划分试验, 将划分的界点视为随机变量, 求取该随机变量的概率分布, 并当作所划的类别的隶属函数或非隶属度函数。

**引理 1** 设  $(\xi, \eta)$  是满足  $P(\xi \leq \eta) = 1$  的连续随机变量, 对于  $(\xi, \eta)$  的每一次取点, 都联系着一个映射

$$e_{(\xi, \eta)}: U \rightarrow P = \{A_1, A_2, A_3\},$$

即

$$e_{(\xi, \eta)}(x) = \begin{cases} A_1, & x \leq \xi \\ A_2, & \xi < x \leq \eta \\ A_3, & \eta < x \end{cases} \quad (8)$$

则由此三相模糊统计试验所确定的三相隶属度函数为:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{A_1}(x) &= P(x \leq \delta) = \int_x^{+\infty} p_{\xi}(x) dx \\ \mu_{A_3}(x) &= P(\eta < x) = \int_{+\infty}^x p_{\eta}(x) dx \\ \mu_{A_2}(x) &= 1 - \mu_{A_1}(x) - \mu_{A_3}(x) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中  $p_{\xi}(x)$  与  $p_{\eta}(x)$  分别是随机变量  $\xi$  与  $\eta$  的概率密度。

引理 1 的证明过程可参见文献 [9]。

通常,  $\xi, \eta$  具有正态分布特性, 设

$$\xi: N(a_1, \sigma_1^2), \eta: N(a_2, \sigma_2^2)$$

则式 (9) 可化为

$$\begin{aligned} \mu_{A_1}(x) &= 1 - \Phi\left(\frac{x - a_1}{\sigma_1}\right) \\ \mu_{A_3}(x) &= \Phi\left(\frac{x - a_2}{\sigma_2}\right) \\ \mu_{A_2}(x) &= \Phi\left(\frac{x - a_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{x - a_2}{\sigma_2}\right) \end{aligned}$$

此处,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

用这种方法可以同时确定三相 IFS 隶属度函数, 进而可以确定三相 IFS 的非隶属度函数。

由上所述, 可以给出基于三分法的 IFS 非隶属度函数确定方法的计算步骤如下:

Step 1 利用三分法, 确定  $\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \mu_{A_3}(x)$ ;

Step 2 根据实际应用问题, 设定  $\pi_A(x) \in [0, 1]$ , 若对具体问题合适且为简便起见, 可以如前述设置直觉指数为常量  $a$ ;

Step 3 利用公式 (6), 计算得出非犹豫度指数  $\delta_A(x)$ ;

Step 4 利用公式 (5), 计算得出 IFS 三相非隶属度函数  $\gamma_{A_1}(x), \gamma_{A_2}(x), \gamma_{A_3}(x)$ 。

显然, 该方法在理论上是正确的、可行的, 下面给出其具体证明过程。

**定义 2 (正规直觉模糊集)** 设  $X$  为一有限论域,  $A$  为一直觉模糊集, 如果  $A \in IFS(X)$  满足:

$$(1) 0 \leq \pi_A(x) \leq 1, 0 \leq \delta_A(x) \leq 1;$$

$$(2) 0 \leq \mu_A(x) \leq 1, 0 \leq \gamma_A(x) \leq 1;$$

$$(3) \mu_A(x) + \gamma_A(x) = \delta_A(x);$$

$$(4) 0 \leq \mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1;$$

$$(5) \mu_A(x) + \gamma_A(x) + \pi_A(x) = 1.$$

则称直觉模糊集  $A$  是论域  $X$  上的一个正规直觉模糊集。

**定理 2** 基于三分法的 IFS 非隶属度函数确定方法是规范的, 亦即  $A \in IFS(X)$  是正规的。

证明: (1) 根据三分法计算步骤 step2, 可知直觉指数设定为  $\pi_A(x) \in [0, 1]$ , 故有  $0 \leq \pi_A(x) \leq 1$ , 由此可得,  $0 \leq \pi_{A_i}(x) \leq 1, i = 1, 2, 3$ 。

由式(6)  $\delta_A(x) = 1 - \pi_A(x)$  可知  $\delta_{A_i}(x) = 1 - \pi_{A_i}(x) (i = 1, 2, 3)$ , 可得  $0 \leq \delta_{A_i}(x) \leq 1, i = 1, 2, 3$ , 即  $0 \leq \delta_A(x) \leq 1$ 。

(2) 根据正态分布函数  $\Phi(x) \in [0, 1]$  的特性及式(9)易得  $0 \leq \mu_{A_i}(x) \leq 1, i = 1, 2, 3$ , 即  $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ 。

由于已证  $0 \leq \delta_A(x) \leq 1$  且  $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ , 根据式(5)  $\gamma_A(x) = \delta_A(x) - \mu_A(x)$  易得  $0 \leq \gamma_A(x) \leq 1$ , 即  $0 \leq \gamma_{A_i}(x) \leq 1, i = 1, 2, 3$ 。

(3) 根据计算步骤 Step4, 有

$$\gamma_A(x) = \delta_A(x) - \mu_A(x)$$

从而

$$\mu_A(x) + \gamma_A(x) = \mu_A(x) + [\delta_A(x) - \mu_A(x)] = \delta_A(x)$$

故得

$$\mu_A(x) + \gamma_A(x) = \delta_A(x)$$

(4) 因为  $\mu_A(x) + \gamma_A(x) = \delta_A(x)$  (已证)

又因为  $0 \leq \delta_A(x) \leq 1$  (已证)

所以  $0 \leq \mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1$

故有

$$0 \leq \mu_{A_i}(x) + \gamma_{A_i}(x) \leq 1, i = 1, 2, 3.$$

(5) 因为  $\delta_A(x) = 1 - \pi_A(x)$

又因为  $\mu_A(x) + \gamma_A(x) = \delta_A(x)$  (已证)

所以  $1 - \pi_A(x) = \mu_A(x) + \gamma_A(x)$

所以  $\mu_A(x) + \gamma_A(x) + \pi_A(x) = 1$

定理 2 表明, 基于三分法的 IFS 非隶属度函数确定方法可以有效确定一个直觉模糊集的隶属度函数和非隶属度函数, 且所确定的直觉模糊集是正规的, 亦即该方法是正确的, 从而在理论上解决了方法的正确性问题。

## 5 算例分析

有一空袭目标进入了我方某导弹阵地武器平台的作用范围, 这个武器平台通过传感器发现了该目标。传感器对空袭目标属性的重要判断指标是飞行高度(km)。通过传感器获得的飞行高度这一目标属性信息分析该目标不属于以下 3 种参考机型的情况。给出以下 3 种参考模式:  $A_1 = \{\text{隐形轰炸机}\}, A_2 = \{\text{隐形战斗机}\}, A_3 = \{\text{无人侦察机, 无人电子干扰机}\}$ 。  $A_1, A_2, A_3$  这 3 种机型的最大飞行高度分别是 10km, 5km, 1.5km。故飞行高度的论域取  $X = [0, 10]$ , 分界点变量  $\xi$  的均值  $a_1 = 1.5\text{km}$ , 标准差  $\sigma_1 = 6.6\text{km}$ ,  $\eta$  的均值  $a_2 = 5\text{km}$ , 标准差  $\sigma_2 = 6.6\text{km}$ , 则可得到  $\Phi_\xi$  与  $\Phi_\eta$  为:

$$\Phi_\xi = \Phi\left(\frac{x - a_1}{\sigma_1}\right) = \Phi\left(\frac{x - 1.5}{6.6}\right),$$

$$\Phi_\eta = \Phi\left(\frac{x - a_2}{\sigma_2}\right) = \Phi\left(\frac{x - 5}{6.6}\right)$$

$A_1, A_2, A_3$  的隶属度函数分别为:

$$\mu_{A_1}(x) = 1 - \Phi\left(\frac{x - 1.5}{6.6}\right)$$

$$\mu_{A_3}(x) = \Phi\left(\frac{x - 5}{6.6}\right)$$

$$\mu_{A_2}(x) = \Phi\left(\frac{x - 1.5}{6.6}\right) - \Phi\left(\frac{x - 5}{6.6}\right)$$

此时, 设定直觉指数  $a = 0.2$ , 从而  $c = 0.8$ , 则  $A_1, A_2, A_3$  的非隶属度函数分别为:

$$\gamma_{A_1}(x) = c - \mu_{A_1}(x) = c - (1 - \Phi\left(\frac{x - 1.5}{6.6}\right))$$

$$= \Phi\left(\frac{x - 1.5}{6.6}\right) - 0.2$$

$$\gamma_{A_2}(x) = c - \mu_{A_2}(x) = c - (\Phi\left(\frac{x - 1.5}{6.6}\right) - \Phi\left(\frac{x - 5}{6.6}\right))$$

$$= \Phi\left(\frac{x - 5}{6.6}\right) - \Phi\left(\frac{x - 1.5}{6.6}\right) + 0.8$$

$$\gamma_{A_3}(x) = c - \mu_{A_3}(x) = 0.8 - \Phi\left(\frac{x - 5}{6.6}\right)$$

若此时目标飞行的高度  $x = 4.8\text{km}$  时,  $A_1, A_2, A_3$  的非隶属度分别是

$$\gamma_{A_1}(4.8) = \Phi(0.5) - 0.2 = 0.7$$

$$\gamma_{A_2}(4.8) = \Phi\left(\frac{4.8 - 5}{6.6}\right) - \Phi(0.5) + 0.8 = 0.1$$

$$\gamma_{A_3}(4.8) = 0.8 - \Phi\left(\frac{4.8 - 5}{6.6}\right) \approx 0.8$$

从以上算例结果数据可以看出, 当该目标飞行高度为 4.8km 时, 目标的机型对于  $A_1$  的非隶属度为 0.7, 对于  $A_2$  的非隶属度为 0.1, 对于  $A_3$  的非隶属度为 0.8, 从而明确了该目标不属于这 3 种参考机型的程度。

由此可见, 该方法用于求解实际问题时, 可以有效确定 IFS 的非隶属度函数, 且是一种较为规范的方法。

**结束语** 本文主要研究了 IFS 非隶属度函数的确定问题, 提出一种基于三分法的 IFS 非隶属度函数确定方法, 并对该方法的正确性进行了理论证明和实例验证。该方法求解步骤明确, 思路清晰, 形式规范, 运用这里引入的概念、公式、方法来确定 IFS 的隶属度函数和非隶属度函数, 规范、准确、实用、方便。该方法最大的优点是计算过程简洁, 针对 IFS 非隶属度函数的复杂性, 给出了统一的计算步骤, 是一种较为规范的 IFS 非隶属度函数确定方法, 具有较好的普适性, 便于推广应用。

## 参考文献

- [1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20 (1): 87-96
- [2] Atanassov K. More on intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33 (1): 37-46
- [3] Atanassov K, George Gargov. Elements of intuitionistic fuzzy logic [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 95(1): 39-52
- [4] Burillo P, Bustince H. Construction theorems for intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 84(3): 271-281
- [5] 雷英杰, 王宝树, 路艳丽. 基于直觉模糊逻辑的近似推理方法 [J]. 控制与决策, 2006, 21(3): 305-310
- [6] Vlachos I K, Sergiadis G D. Intuitionistic fuzzy information - Applications to pattern recognition [J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28(2): 197-206
- [7] 雷英杰, 王宝树, 王毅. 基于直觉模糊推理的威胁评估方法 [J]. 电子与信息学报, 2007, 29(9): 2077-2081
- [8] 王坚. 直觉模糊推理系统的设计与实现 [D]. 硕士学位论文. 西安: 空军工程大学, 2006
- [9] 汪培庄. 模糊集合论及其应用 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1986