

一种带权重的真值流推理算法

何映思 邓辉文

(西南大学逻辑与智能研究中心 重庆 400715)

摘要 研究了真值流推理算法在各种推理模式下的还原性,证明了真值流推理算法在单一规则下是具有还原性的。但是,在采用常用的推理模型进行推理时,真值流推理算法并不具有多重多维情形下的还原性。为了解决这个问题,提出了一种带权重的真值流推理算法,并证明了该新算法具有多重多维情形下的还原性。

关键词 真值流推理,还原性,相似度,权重

中图分类号 TP181 **文献标识码** A

Weighted Truth-valued-flow Inference Algorithm

HE Ying-si DENG Hui-wen

(Logic and Intelligence Research Center, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract The property of being consistent of Truth-valued-flow inference algorithm was investigated. First the property of being consistent for one rule of Truth-valued-flow inference algorithm was proved, and then an example was given to show that Truth-valued-flow inference algorithm is not consistent for multiple rules. Finally, a weighted Truth-valued-flow inference algorithm was proposed, which was proved to be consistent for multiple rules.

Keywords Truth-valued-flow inference, Consistency, Similarity measure, Weight

真值流推理算法(Truth Values Reasoning)是 1989 年汪培庄教授提出的用以解释模糊推理机制的理论^[1],该算法已经得到广泛的认可和诸多的研究。但以往研究真值流推理的文献中,多半是从推理机制及相关证明的角度来研究。本文则从模糊推理算法的一个重要性质——还原性入手,对真值流推理算法在各种推理模式下,尤其是在多重多维情形下的还原性进行了研究。能够证明,真值流推理算法在单一规则下是具有还原性的。但是,在采用常用的推理模型进行推理时,真值流推理算法却并不具有文献[4]提出的多重多维情形下的还原性。为了解决这个问题,本文给出了一种带权重的真值流推理算法,并证明了该算法在常用的推理模型中具有多重多维情形下的还原性。

1 真值流推理算法的推理机制

真值流推理的思想核心就是把一个蕴涵式 $P \rightarrow Q$ 的推理过程看作是一个真值在一个渠道中流动的过程。

在这个蕴涵式 $P \rightarrow Q$ 中,前件 P 是渠首,后件 Q 是渠尾。在推理过程中,一旦渠首得到一个真值输入,便立刻传至渠尾。当输入给渠首的真值为 1 时,这个渠道的渠尾得到的真值亦为 1。

请注意:渠道 $P \rightarrow Q$ 并不产生真值。真值只有把一个事实或对象与放在渠首的概念匹配起来以后才产生,而渠道的功能仅仅是传输真值。

定义 1(推理渠道的公理化定义)^[1] $(U), (V)$ 称为在一定知识下的 F 渠道。如果满足:

- 1) $(P, Q) \in F, P' \subseteq P \Rightarrow (P', Q) \in F$;
- 2) $(P, Q) \in F, Q' \supseteq Q \Rightarrow (P, Q') \in F$;
- 3) $(P, Q_1) \in F, (P, Q_2) \in F \Rightarrow (P, Q_1 \cup Q_2) \in F$;
- 4) $(P_1, Q) \in F, (P_2, Q) \in F \Rightarrow (P_1 \cap P_2, Q) \in F$.

$(P, Q) \in F$ 称为一个推理渠道,记作 $P \rightarrow Q$ 。 P 称为渠首, Q 称为渠尾。

这样,肯定前件的假言推理可以用真值流动来加以解释。 $P \rightarrow Q$ 是一个渠道,若在渠首输入真值 1,即前件 P 真,真值立即传至渠尾,得后件 Q 真,模糊推理也就可以用真值流动加以解释。

真值流推理算法的步骤:

- 1) 设已有知识确立了一个渠道集的基,它由有限个渠道构成: $P_i \rightarrow Q_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。
- 2) 面临的信息形成一个事实 P' ,它是 U 上的一个模糊子集。
- 3) 将事实 P' 与每一个渠道的渠首 P_i 进行比较,计算相似度 $near(P', P_i) = \lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ 。
- 4) 真值 λ_i 沿 $P_i \rightarrow Q_i$ 传至渠尾,得 $V(Q_i) = \lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ (1)
- 这便是真值流推理的直接结果。
- 5) 后处理阶段,从式(1)出发,将各渠尾 Q_i 与真值 λ_i 按

到稿日期:2009-05-15 返修日期:2009-08-01 本文受重庆市人文社会科学重点研究基地项目《缺省逻辑与动态缺省逻辑研究》(08jwsk277)资助。

何映思(1980—),女,博士研究生,讲师,从事人工智能及现代逻辑研究;邓辉文(1964—),男,博士后,教授,博士生导师,从事人工智能及现代逻辑研究。

一定规律组合成一个模糊判断 $Q=d(\lambda_1, Q_1, \dots, \lambda_n, Q_n)$ 。

在实际推理时,给出各种具体的函数关系 d 就可以确定各种具体的推理模型。下面给出常用的 3 种推理模型^[1]:

$$1) Q=d(\lambda_1, Q_1, \dots, \lambda_n, Q_n)=\bigcup_{i=1}^n (\lambda_i Q_i)$$

$$Q(V)=\bigvee_{i=1}^n (\lambda_i \wedge Q_i(V)) \quad (2)$$

$$2) Q=d(\lambda_1, Q_1, \dots, \lambda_n, Q_n)=\bigcap_{i=1}^n (\lambda_i Q_i)$$

$$Q(V)=\bigwedge_{i=1}^n (\lambda_i \wedge Q_i(V)) \quad (3)$$

$$3) Q=d(\lambda_1, Q_1, \dots, \lambda_n, Q_n)=\bigcup_{i=1}^n (\lambda_i * Q_i)$$

$$Q(V)=\bigvee_{i=1}^n (\lambda_i Q_i(V)) \quad (4)$$

其中,若取 $near(P', P_i)=P \circ P_i=P(u) \wedge P_i(u)$, 则模型 1) 等效于 Mamdani 模型^[2]。

2 真值流推理算法的还原性

在模糊推理理论中,对于推理算法的优劣目前尚没有公认的标准。但是,算法应该具有还原性,这是对算法的最基本的要求。这种要求体现了算法的相容性或和谐性,这已成为诸多专家学者的共识。然而,以往对于模糊推理算法还原性的研究,都只限于模糊推理的最基本形式,即单一规则的还原性。但是,在一个实用的模糊推理系统中,单条规则进行推理的情况是比较少见的,往往都是几十条甚至更多规则共同作用进行推理。因此,一个模糊推理算法,除了要求它具有单一规则下的还原性,它在多重多维情形下的还原性也是应该考虑的。

2.1 单一规则下的还原性

模糊推理的最基本形式如下:

$$\begin{array}{l} \text{已知} \quad A \rightarrow B \\ \text{且给定} \quad A^* \\ \text{求} \quad B^* \end{array} \quad (5)$$

这里 A 与 A^* 分别是论域 X 上的模糊集, B 与 B^* 是论域 Y 上的模糊集。

这一问题一般称为模糊取式推理(Fuzzy Modus Ponens), 简称为 FMP, 是模糊推理的核心问题之一。鉴于在实际应用和模糊控制中都主要研究 FMP, 所以本文只讨论 FMP 的推理算法及其还原性的问题。

定义 2(FMP 还原性)^[3] 一种求解式(5)的算法, 当 $A=A^*$ 时求得的 $B=B^*$, 则称该算法具有 FMP 还原性。

在有单一规则时, 即只有一个推理渠道时, 真值流推理算法是具有 FMP 还原性的, 下面给出证明。

定理 1 在有单一规则(5)的情形下, 若存在 $A^*=A$, 则由真值流推理法求出的 B^* 等于 B 。

证明: 当 $A^*=A$ 时, 由相似度的定义知, 真值 $\lambda = near(A^*, A) = 1$, 则渠首得到的真值为 1。由真值流推理法的思想, 在推理过程中, 一旦渠首得到一个真值输入, 便立刻传至渠尾。当输入给渠首 A 的真值为 1 时, 这个渠道的渠尾 B 得到的真值亦为 1, 故 B^* 仍然等于 B 。证毕。

2.2 多重多维规则下的还原性

由于模糊推理本身的特殊性, 特别是应用在工程问题中时, 都是考虑多条规则、多个前提的模糊推理, 因此模糊推理算法也常常需要解决多重多维的模糊推理问题。

多重多维情形下 FMP 的一般形式如下:

$$\begin{array}{l} \text{已知} \quad A_{11} \text{ and } A_{12} \text{ and } \dots \text{ and } A_{1m} \rightarrow B_1 \\ \dots\dots \\ A_{n1} \text{ and } A_{n2} \text{ and } \dots \text{ and } A_{nm} \rightarrow B_n \quad (6) \\ \text{且给定} \quad A_1^* \text{ and } A_2^* \text{ and } \dots \text{ and } A_m^* \\ \text{求} \quad B^* \end{array}$$

这里 A_{ij} 与 A_j^* 分别是论域 X_j 上的模糊集 ($j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, n$), B_i 与 B^* 是论域 Y 上的模糊集 ($i=1, 2, \dots, n$)。

注记 1 在本文的讨论中, 均假定在规则库中没有两条规则的前件完全相同而后件不同, 否则, 可以将这两条规则合并成一条。

定义 3(多重多维情形下 FMP 问题的还原性)^[4] 一种求解式(6)的模糊推理算法, 若当 $\exists i (1 \leq i \leq n)$ 使得 $A_1^* = A_{i1}, A_2^* = A_{i2}, \dots, A_m^* = A_{im}$ 时, 由该算法求得的 $B^* = B_i$, 则称该算法具有多重多维情形下 FMP 问题的还原性。

注记 2 在定义 3 中, 若 $m=1$, 则得到多重情形下 FMP 问题的还原性的定义。

下面给出一个例子来说明, 在上面提到的常用的推理模型中, 真值流推理算法不具有在多重多维的情形下的还原性。

例 设 $X_j = Y = [0, 1], A_{ij}, B_i, A_j^*, B^* \in F(Y), (i, j = 1, 2)$, 其中

$$\begin{aligned} A_{11}(x_1) &= \frac{1}{3}(3-x_1), A_{12}(x_2) = \frac{1}{3}(x_2+2), B_1(y) = 1-y, \\ A_{21}(x_1) &= 1-x_1, A_{22}(x_2) = 1-\frac{1}{2}x_2, B_2(y) = \frac{1}{2}(y+1), \\ A_1^*(x_1) &= 1-x_1, A_2^*(x_2) = 1-\frac{1}{2}x_2 \end{aligned}$$

假定只有两条模糊规则:

规则 1 若 A_{11} 且 A_{12} , 则 B_1 ;

规则 2 若 A_{21} 且 A_{22} , 则 B_2 。

用真值流推理算法在模型 1) 中计算 B^* 。

本例中计算采用的相似度函数^[5]取为:

$$N_H(A, B) = (1 - \frac{1}{b-a} \int_a^b |A(u) - B(u)| du)$$

其中, u 为连续论域。

(1) 将多重前提聚合为单一前提:

$$A_1(x) = A_{11}(x_1) \wedge A_{12}(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+2), & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}(3-x), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A^*(x) = A_2(x) = A_{21}(x_1) \wedge A_{22}(x_2) = 1-x$$

(2) 计算相似度:

$$\lambda_1 = near(A^*, A_1) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lambda_2 = near(A^*, A_2) = 1$$

(3) 真值 λ_i 沿 $A_i \rightarrow B_i$ 传至渠尾:

$$V(B_1) = \lambda_1$$

$$V(B_2) = \lambda_2$$

(4) 按模型 1) 将各渠尾 B_i 与真值 λ_i 组合:

$$B^*(y) = (\lambda_1 \wedge B_1(y)) \wedge (\lambda_2 \wedge B_2(y)) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y < \frac{1}{2} \\ 1-y, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

显然, $B^* \neq B_2$ 。

该例子证明了在推理模型 1) 中, 真值流推理算法不具有多重多维情形下的还原性。容易证明, 当采用其他两种推理模型时, 真值流推理算法也不具有多重多维情形下的还原性。限于篇幅, 不再赘述。

3 一种带权重的真值流推理算法

以上的分析说明, 真值流推理算法虽然在单一规则的情形下是具有还原性的, 但是在许多时候并不具有多重多维模糊情形下的还原性。这是因为真值流推理算法在使用若干条规则共同推得一个结论时, 平等地看待这些规则所起的作用, 只将各条规则的结果直接聚合就得到了最终结论。这种做法虽然简单, 并且在许多场合是有用的, 但仍不十分符合实际。通常, 在实际问题中, 各条规则对最终结论的影响程度不尽相同。为了在模糊推理中表示出这种不同的影响, 人们提出了各种各样的加权模糊逻辑^[6]。在这里, 用加权模糊逻辑的思想来解决多重多维还原性的问题也是十分恰当的。在推理时, 只需要对每条规则设立一个权重来区分各条规则的重要性即可。

那么, 每条规则的重要性又怎么来衡量呢? 我们认为规则权重的大小不妨按该规则前件与所给事实的相似度大小来确定: 前件与所给事实相似度最大的规则, 应该对推理结果最起作用, 权重就该较大; 前件与所给事实相似度小的规则, 对推理结果起的作用相对较小, 权重就该较小。规则权重体现了该规则在参与同一推理的诸规则中的重要程度, 反映了它们之间的主次关系, 或者说是它们对同一结论的贡献程度的大小。这种加权后再聚合的方法比以往的简单聚合要合理得多。

基于以上分析, 下面给出一种求解式(6)的带权重的真值流推理算法, 该算法在常用推理模型中能够满足多重多维模糊推理情形下的还原性。

1) 计算相似度: 设 $\lambda_{ij} (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m)$ 表示第 i 条规则的第 j 个前件与给定前提的第 j 个前件的相似度, 即 $\lambda_{ij} = \text{near}(A_{ij}, A_j^*) (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m)$ 。

设 $\epsilon_i = \min(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{im})$ 为第 i 条规则所有前件的相似度的最小值。

2) 设置各条规则的权重: 设 w_i 表示第 i 条规则的权重, 权重 w_i 根据该条规则的前件中相似度的最小值 ϵ_i 确定。首先, 令 $\alpha = \max_{i=1}^n \{\epsilon_i\}$, $I = \{i \mid \epsilon_i = \alpha, 1 \leq i \leq n\}$ 以及 $\delta_i = \begin{cases} \alpha, & i \in I \\ (1-\alpha)\epsilon_i, & i \notin I \end{cases}$, 则将权重 w_i 定义为

$$w_i = \frac{\delta_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i} \quad (7)$$

3) 聚合各条规则与所给事实的前件:

$$\begin{aligned} A_1(x) &= A_{11}(x) \wedge A_{12}(x) \wedge \dots \wedge A_{1m}(x) \\ A_2(x) &= A_{21}(x) \wedge A_{22}(x) \wedge \dots \wedge A_{2m}(x) \\ &\dots\dots\dots \\ A_n(x) &= A_{n1}(x) \wedge A_{n2}(x) \wedge \dots \wedge A_{nm}(x) \\ A^*(x) &= A_1^*(x) \wedge A_2^*(x) \wedge \dots \wedge A_n^*(x) \end{aligned} \quad (8)$$

4) 真值流推理: 将聚合得到的 A^* 分别与各条规则 $A_i \rightarrow B_i (i=1, 2, \dots, n)$ 做真值流推理, 即

$$\frac{A_i \rightarrow B_i}{A^*} B_i^* \quad (9)$$

其中, B_i^* 可采用任何一种真值流算法的推理模型计算。

5) 把各条规则的直接结果 $B_i^* (i=1, 2, \dots, n)$ 按如下方式加权后再聚合, 得最终结果

$$B^* = \bigcup_{i=1}^n w_i B_i^* \quad (10)$$

定理 2 在有多重多维规则(6)的情形下, 若 $\exists k (1 \leq k \leq n)$ 使得 $A_1^* = A_{k1}, A_2^* = A_{k2}, \dots, A_m^* = A_{km}$, 则在上边提到的 3 种推理模型中, 由带权重的真值流推理算法求出的 B^* 等于 B_k 。

证明: 已知 $\exists k (1 \leq k \leq n)$ 使得 $A_1^* = A_{k1}, A_2^* = A_{k2}, \dots, A_m^* = A_{km}$, 则可得 $\lambda_{kj} = S(A_{kj}, A_j^*) = 1 (j=1, 2, \dots, m)$ 。显然, $\epsilon_k = \min(\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{km}) = 1$ 。那么 $\alpha = \max_{i=1}^n \{\epsilon_i\} = \epsilon_k = 1$ 。下面证明对于指标集合 I , 有 $|I| = 1$ 。

假定有 l 使得 $\alpha = \epsilon_l = 1$ 。那么根据 ϵ_l 的定义 $\epsilon_l = \min(\lambda_{l1}, \lambda_{l2}, \dots, \lambda_{lm})$ 可知 $\lambda_{lj} = 1 (j=1, 2, \dots, m)$ 。于是, 第 l 条规则的前件 $A_{lj} = A_j^* (j=1, 2, \dots, m)$ 。所以 $A_{lj} = A_{kj} (j=1, 2, \dots, m)$ 成立。又根据注记 1 可知, 在式(6)中没有两条规则的前件完全相同而后件不同。因此, $l=k$ 。所以, 若 $\exists k (1 \leq k \leq n)$ 使得 $A_1^* = A_{k1}, A_2^* = A_{k2}, \dots, A_m^* = A_{km}$, 则集合 I 中一定只有一条规则, 即 $|I| = 1$ 。

因此, 由 δ_i 的定义可得 $\delta_i = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ 。又根据式(7)可知

$$w_i = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

由 $A_1^* = A_{k1}, A_2^* = A_{k2}, \dots, A_m^* = A_{km}$ 可得

$$A_k(x) = A_{k1}(x) \wedge A_{k2}(x) \wedge \dots \wedge A_{km}(x) = A_1^*(x) \wedge A_2^*(x) \wedge \dots \wedge A_m^*(x) = A^*(x)$$

则由真值流算法具有单一规则下的还原性可知: $B_k^* = B_k$ 。

那么, $B^* = \bigcup_{i=1}^n w_i B_i^* = w_k B_k^* = B_k$ 。

证毕。

需要说明的是, 模糊推理必然涉及模糊集合的运算。而模糊集合运算有许多种, 本文采用的是最常用的 Mamdani 所定义的模糊集合运算^[7]。本文提出的带权重的真值流推理算法能够在采用 Mamdani 所定义的模糊集合运算时满足多重多维情形下的还原性条件, 但并不能保证在采用其他模糊集合运算时能具有还原性。显而易见的是, 由于每一种模糊集合运算的计算方法不同, 一般不可能有一种在采用任何模糊集合运算时都具有还原性的真值流推理算法。这是因为推理算法中各条规则的权重要根据模糊集合运算的性质来设置。如果采用不同的运算方法, 权重的设置方法也就要随之改变, 这样才能保证模糊推理算法的还原性。在这里, 我们的目的不是要列举出所有的模糊集合运算及其权重的设置方法, 而是要找出真值流推理算法不能满足多重多维情形下的还原性的原因, 并找到解决这个问题的办法(给每条规则设置权重), 还能够提出一种算法来验证我们的方法确实可行。

结束语 本文对真值流推理算法在多种推理模式下的还原性进行了研究, 证明了真值推理算法具有单一规则下的还

原性,但不具有文献[4]提出的多重多维情形下的还原性。为了解决这个问题,本文提出了一种带权重的真值流推理算法。本算法是在原来的真值流推理算法的基础上引入权重,通过规则前件与所给事实的相似度来确定每条规则的权重,以使真值流推理算法具有在多重多维情形下的还原性。鉴于多重多维模糊推理在模糊控制中的重要作用,这种满足多重多维还原性的带权重的真值流模糊推理算法应该在模糊控制中有良好的应用效果。将这种带权重的真值流模糊推理算法应用到模糊控制中,也是今后工作的一个研究方向。

参考文献

[1] 汪培庄,张洪敏. 真值流推理及其动态分析[J]. 北京师范大学学报:自然科学版,1989,1:1-12
 [2] 陈永义,陈图云. 特征展开近似推理方法[J]. 辽宁师范大学学

报:自然科学版,1984,3:1-7
 [3] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵,三:I算法[J]. 中国科学: E 辑, 1999,29(1):43-53
 [4] 何映思,全海金,邓辉文. 具有还原性的多重多维模糊推理算法[J]. 计算机科学,2007,34(4):145-148
 [5] LIU Xuecheng. Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations[J]. Fuzzy Sets and Systems,1992,52(9):305-318
 [6] 何新贵. 加权模糊逻辑及其广泛应用[J]. 计算机学报,1989,21(6):458-464
 [7] 徐宗本,张讲社,郑亚林. 计算智能中的仿生学:理论与算法[M]. 北京:科学出版社,2003
 [8] 谢昊航,张忠辅,郑小平,等. 基于模糊数学的网格资源综合调度算法[J]. 重庆工学院学报:自然科学版,2009,23(3):133-137, 143

(上接第 215 页)

定理 7 设 H, N 是 G 的 T -直觉模糊正规子群, $A \in IF(G)$, 则 $\overline{HA} \cdot \overline{NA} = \overline{H \cdot NA}$.

证明: $\overline{HA} \cdot \overline{NA} = (H \circ A) \circ (N \circ A) = (H \circ N) \circ (A \circ A) = \overline{H \cdot NA}$.

3.2 群同态下直觉模糊粗糙集上下近似的性质

设 $f: G \rightarrow G'$ 是群之间的满同态, A, A' 分别是 G 和 G' 上的直觉模糊集, 定义 $f(A)(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x)$, $f^{-1}(A')(x) = A'(f(x))$, 显然 $f(A), f^{-1}(A')$ 分别是 G' 和 G 上的直觉模糊集。

定义 6 设 $A, B \in IF(G)$, 给定直觉模糊 T -模, 若满足 $T(\bigvee_{x \in G} A(x), \bigvee_{y \in G} A(y)) = \bigvee_{x \in G, y \in G} T(A(x), A(y))$, 则称 T -模是严保上的。

定理 8 设 $f: G \rightarrow G'$ 是群满同态, 直觉模糊 T -模是严保上的, A, A' 分别是 G 和 G' 上的 T -直觉模糊子群, 则 $f(A), f^{-1}(A')$ 分别是 G' 和 G 的 T -直觉模糊子群, 如果 A, A' 是正规的, 则 $f(A), f^{-1}(A')$ 也是正规的。

证明: i) $f(A)(y_1 y_2) = \bigvee_{f(x)=y_1 y_2} A(x) = \bigvee_{\substack{f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2}} A(x_1 x_2) \geq \bigvee_{\substack{f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2}} T(A(x_1), A(x_2)) \geq T(\bigvee_{f(x_1)=y_1} A(x_1), \bigvee_{f(x_2)=y_2} A(x_2)) = T(f(A)(y_1), f(A)(y_2));$

ii) $f(A)(y^{-1}) = \bigvee_{f(x)=y^{-1}} A(x) \geq \bigvee_{f(x^{-1})=y} A(x^{-1}) = f(A)(y);$

iii) $f(A)(e) = \bigvee_{f(x)=e} A(x) = A(e) = 1^*$.

因此 $f(A)$ 是 G' 的 T -直觉模糊子群。

如果 A 是正规的, 则:
 $f(A)(y_1 y_2) = \bigvee_{f(x)=y_1 y_2} A(x) = \bigvee_{\substack{f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2}} A(x_1 x_2) = \bigvee_{\substack{f(x_2)=y_2, f(x_1)=y_1}} A(x_2 x_1) = \bigvee_{f(x)=y_2 y_1} A(x) = f(A)(y_2 y_1)$

因此 $f(A)$ 是 G' 的 T -直觉模糊正规子群。

同理, 可证 $f^{-1}(A')$ 是 G 的 T -直觉模糊子群, 当 A' 是正规的, $f^{-1}(A')$ 也是正规的。

定理 9 设 $f: G \rightarrow G'$ 是群满同态, A, B 是 G 的 T -直觉模糊子群且 B 是正规的, 则 $\overline{f(B)} f(A) = f(\overline{BA})$.

证明: $\overline{f(B)} f(A)(y) = f(B) \circ f(A)(y) = \bigvee_{y_1 y_2 = y} T(f(B)(y_1), f(A)(y_2)) = \bigvee_{y_1 y_2 = y} T(\bigvee_{f(x_1)=y_1} B(x_1), \bigvee_{f(x_2)=y_2} A(x_2)) = \bigvee_{f(x_1) f(x_2) = y} T(B(x_1), A(x_2))$

$= \bigvee_{f(x)=y} \bigvee_{x_1 x_2 = x} T(B(x_1), A(x_2)) = \bigvee_{f(x)=y} B \circ A(x) = f(\overline{BA})(y)$
 因此 $\overline{f(B)} f(A) = f(\overline{BA})$.

定理 10 设 $f: G \rightarrow G'$ 是群满同态, A', B' 是 G' 的 T -直觉模糊子群且 B' 是正规的, 则 $\overline{f^{-1}(B')} f^{-1}(A') = f^{-1}(\overline{B'A'})$.

证明: $\overline{f^{-1}(B')} f^{-1}(A')(x) = f^{-1}(B') \circ f^{-1}(A')(x) = \bigvee_{y \in G} T(f^{-1}(B')(xy^{-1}), f^{-1}(A')(y)) = \bigvee_{y \in G} T(B'(f(xy^{-1})), A'(f(y))) = \bigvee_{f(y) \in G'} T(B'(f(x)f(y)^{-1}), A'(f(y))) = B' \circ A'(f(x)) = f^{-1}(B' \circ A')(x) = f^{-1}(\overline{B'A'})(x)$

因此 $\overline{f^{-1}(B')} f^{-1}(A') = f^{-1}(\overline{B'A'})$.

结束语 本文通过定义在论域群上的 T -直觉模糊正规子群, 得到 T -直觉模糊相似关系, 进而在群结构上建立一对直觉模糊粗糙近似算子, 研究了群上的直觉模糊粗糙集的乘积结构以及群同态下的直觉模糊粗糙上下近似性质, 这些工作丰富和发展了模糊群的理论。

参考文献

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1996,20(1):87-96
 [2] 李晓萍,王贵君. 直觉模糊群与它的同态像[J]. 模糊系统与数学,2000,14(1):45-50
 [3] 李晓萍,王贵君. 直觉模糊集的扩张运算[J]. 模糊系统与数学,2002,16(1):40-46
 [4] 李晓,赵建宏. 直觉模糊正规子群与它的同态像特征[J]. 东北师大学报,2004,36(1):27
 [5] 李晓萍. 关于三角模的直觉模糊群及其同态像[J]. 模糊系统与数学,2005,19(1)
 [6] 马骥良,于纯海. 模糊代数选论[M]. 北京:学苑出版社,1989
 [7] 张文修,王国俊,刘旺金,等. 模糊数学引论[M]. 西安:西安交通大学出版社,1991
 [8] 林梦雷. 直觉模糊群与它的诱导商群[J]. 厦门大学学报:自然科学版,2006,45(2):157-161
 [9] 李娟,张诚一. 直觉模糊商群及其同构[J]. 模糊系统与数学,2008,22(5):57-62
 [10] 王贵君,李晓萍. 直觉模糊正规子群的乘积结构[J]. 系统工程理论与实践,2003,23(11):83-87
 [11] Zhou L, Wu W, Zhang W. On characterization of intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy implicators[J]. Information Sciences,2009,179:883-898