

T-直觉模糊子群相关性质研究

程涛 米据生

(河北师范大学数学与信息科学学院 石家庄 050016)

摘要 主要讨论了直觉模糊粗糙集与群结构之间的联系。通过借助群上的T-直觉模糊正规子群,得到群上的T-直觉模糊相似关系,从而建立群上的直觉模糊粗糙集。研究了群上的直觉模糊粗糙集的乘积结构以及群同态下直觉模糊粗糙集上下近似的性质。

关键词 直觉模糊集,直觉模糊粗糙集,T-直觉模糊子群,T-直觉模糊正规子群

Correlation Properties of T-intuitionistic Fuzzy Subgroups

CHENG Tao MI Ju-sheng

(College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract We discussed the relation between intuitionistic fuzzy rough sets and group structure. By drawing on the T-intuitionistic fuzzy normal subgroup, we obtained the T-intuitionistic fuzzy similarity relation on group, and set up intuitionistic fuzzy rough sets on group. We studied the product of the intuitionistic fuzzy rough sets and the properties of intuitionistic fuzzy rough upper and lower approximate operators under group homomorphisms.

Keywords Intuitionistic fuzzy sets, Intuitionistic fuzzy rough sets, T-intuitionistic fuzzy subgroups, T-intuitionistic fuzzy normal subgroups

1 引言

直觉模糊集(IFS)首先由 Atanassov 提出^[1],是对 Zadeh 模糊集理论的一种扩充和发展。直觉模糊集是在模糊集上增加一个非隶属函数,描述了“非此非彼”的“模糊概念”,更加细腻地刻画了客观世界的模糊性。最近,直觉模糊集理论已经被成功应用于决策分析和模式识别领域。直觉模糊粗糙集是近年来刚刚提出的一种新的粗糙集模型,它有机地把模糊集理论与粗糙集理论结合起来。而在群上讨论粗糙集的结构一直是粗糙集的一个重要研究方向。自然地,直觉模糊粗糙集与群结构之间的联系也引起了众多学者的关注^[2-5,8-10]。其中文献[2]给出了它的扩张原理,且侧重于代数方面,定义了直觉模糊群及讨论了它的同态像等问题,文献[3]在文献[2]的基础上进一步研究了这种直觉模糊集的一些扩张运算,文献[10]给出了直觉模糊正规子群的定义,并在文献[3]给出乘积运算的基础上,讨论了这种直觉模糊正规子群的乘积结构等问题。本文通过借助群结构上的T-直觉模糊正规子群,得到群上的T-直觉模糊相似关系,从而建立群上的直觉模糊粗糙集,研究了群上的直觉模糊粗糙集的乘积结构以及群同态下直觉模糊粗糙集上下近似的性质。

2 预备知识

下面先给出一些基本概念,详细的讨论见文献[1]。

定义 1^[1] 论域 U 上的直觉模糊集 A 定义为:

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in U \}$$

其中, $\mu_A: U \rightarrow [0, 1]$ 和 $\nu_A: U \rightarrow [0, 1]$ 分别表示 A 的隶属度和非隶属度,且对所有的 $x \in U$, 有 $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ 。

为了方便,用 $A(x)$ 表示 $(\mu_A(x), \nu_A(x))$, 令 $IF(U)$ 表示 U 上的所有直觉模糊集构成的集合。

$\forall A, B \in IF(U), A \leq B$, 当且仅当

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \nu_A(x) \geq \nu_B(x), \forall x \in U$$

则 $(IF(U), \leq)$ 是一个完备的格,其最大元为 $U(x) = (1, 0) = 1^*$, 最小元为 $\Phi(x) = (0, 1) = 0^*$ 。

定义 2^[11] 如果 $T: IF(U) \times IF(U) \rightarrow IF(U)$ 满足单调递增、交换律、结合律和边界条件: $\forall A \in IF(U), T(A, 1^*) = A$, 则称 T 为 $IF(U)$ 上的直觉模糊 T -模。 $\forall A, B \in IF(U)$, 通过借助直觉模糊 T -模定义 $\vartheta(A, B) = \sup \{ C \in IF(U) : T(A, C) \leq B \}$, 称 ϑ 为直觉模糊剩余蕴含算子。

定义 3^[11] 设 R 是论域 U 上的直觉模糊关系(R 也是直觉模糊集), T 为 $IF(U)$ 上的直觉模糊 T -模, 若满足:

1) $\forall x \in U, R(x, x) = 1^*$, 则称 R 是自反的;

2) $\forall x, y \in U, R(x, y) = R(y, x)$, 则称 R 是对称的;

3) $\forall x, z \in U, \bigvee_{y \in U} T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$, 则称 R 是 T -传递的;

则称 R 是 T -直觉模糊相似关系。

3 主要结论

3.1 群上直觉模糊粗糙集的乘积结构

到稿日期:2009-05-04 返修日期:2009-06-12 本文受国家自然科学基金项目(60773174),河北省自然科学基金(A2006000129)资助。

程涛(1983—),男,硕士研究生,主要研究方向为粗糙集、概念格、近似推理, E-mail: chengtao5@163.com; 米据生(1966—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为粗糙集、概念格、近似推理等。

定义 4 设 G 是一个群, $A \in IF(G)$, T 是 G 上的直觉模糊 T -模。如果 A 满足:

- 1) $A(xy) \geq T(A(x), A(y))$;
- 2) $A(x^{-1}) \geq A(x)$;
- 3) $A(e) = 1$;

则称 A 是 G 的 T -直觉模糊子群。

如果 A 是 G 的 T -直觉模糊子群, 任意 $x, y \in G$, 有 $A(xy) = A(yx)$, 则称 A 是 G 的 T -直觉模糊正规子群。

定义 5 设 G 是一个群, $A, B \in IF(G)$, $A \circ B$ 定义为: $A \circ B(x) = \bigvee_{y \in G} T(A(xy^{-1}), B(y))$, $x \in G$ 。

设 B 是群 G 的 T -直觉模糊正规子群, 则易得关系 $R_B(x, y) = B(xy^{-1})$ 是 G 上的 T -直觉模糊相似关系, 因此可以定义直觉模糊粗糙集^[11]。其中,

$$\overline{(R_B)_T}(A) = \bigvee_{y \in G} T(R_B(x, y), A(y)) = \bigvee_{y \in G} T(B(xy^{-1}), A(y))$$

$$(\underline{R_B})_\vartheta(A) = \bigwedge_{y \in G} \vartheta(R_B(x, y), A(y)) = \bigwedge_{y \in G} \vartheta(B(xy^{-1}), A(y))$$

下面把 $\overline{(R_B)_T}$ 简记为 $\overline{B}$, 把 $(\underline{R_B})_\vartheta$ 简记为 $\underline{B}$ 。

定理 1 任意的 $A \in IF(G)$, 有 $\overline{BA} = B \circ A$ 。

证明: $\forall x \in G$, 有 $\overline{BA}(x) = \bigvee_{y \in G} T(R_B(x, y), A(y)) = \bigvee_{y \in G} T(B(xy^{-1}), A(y)) = B \circ A(x)$ 。

定理 2 任意的 $A_1, A_2 \in IF(G)$, 有 $\overline{BA_1} \circ \overline{BA_2} = \overline{B(A_1 \circ A_2)}$ 。

证明: 由于 B 是正规的, 有 $B \circ A = A \circ B$ 和 $B \circ B = B$ 成立。因此有:

$$\begin{aligned} \overline{BA_1} \circ \overline{BA_2} &= (B \circ A_1) \circ (B \circ A_2) \\ &= B \circ (A_1 \circ B) \circ A_2 = (B \circ B) \circ (A_1 \circ A_2) \\ &= B \circ (A_1 \circ A_2) = \overline{B(A_1 \circ A_2)} \end{aligned}$$

定理 3 任意的 $A_1, A_2 \in IF(G)$, 有 $\underline{BA_1} \circ \underline{BA_2} \subseteq \underline{B(A_1 \circ A_2)}$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明: } (\underline{BA_1} \circ \underline{BA_2})(x) &= \bigvee_{y \in G} T((\underline{BA_1})(xy^{-1}), (\underline{BA_2})(y)) \\ &\leq \bigvee_{y \in G} T((\underline{BA_1})(xy^{-1}), A_2(y)) \\ &= \bigvee_{y \in G} T(\bigwedge_{u \in G} \vartheta(B(ux^{-1}), A_1(u)), A_2(y)) \\ &= \bigvee_{y \in G} T(\bigwedge_{v \in G} (\vartheta(B(vx^{-1}), A_1(vy^{-1})), A_2(y)) \\ &\leq \bigwedge_{v \in G} \vartheta(B(vx^{-1}), \bigvee_{y \in G} T(A_1(vy^{-1}), A_2(y))) \\ &= \bigwedge_{v \in G} \vartheta(B(vx^{-1}), (A_1 \circ A_2)(v)) \\ &= \underline{B(A_1 \circ A_2)}(x) \end{aligned}$$

因此 $\underline{BA_1} \circ \underline{BA_2} \subseteq \underline{B(A_1 \circ A_2)}$ 。

引理 1 如果 H, N 是 G 的 T -直觉模糊正规子群, 则 $T|H, N|$ 也是 G 的 T -直觉模糊正规子群, 其中 $T|H, N|(x) = T(H(x), N(x))$ 。

定理 4 设 H 和 N 是 G 的 T -直觉模糊正规子群, $A \in IF(G)$, 则有 $T|H, N|A \subseteq T|\overline{HA}, \overline{NA}|$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明: } T|\overline{HA}, \overline{NA}|(x) &= T(H \circ A, N \circ A)(x) = T(H \circ A(x), N \circ A(x)) \\ &= T(\bigvee_{y \in G} T(H(y), A(y^{-1}x)), \bigvee_{z \in G} T(N(z), A(z^{-1}x))) \\ &\geq T(\bigvee_{y \in G} T(H(y), A(y^{-1}x)), T(N(y), A(y^{-1}x))) \\ &= \bigvee_{y \in G} T(T(H(y), N(y)), A(y^{-1}x)) \\ &= T|H, N| \circ A(x) = \overline{T|H, N|A}(x) \end{aligned}$$

因此 $T|H, N|A \subseteq T|\overline{HA}, \overline{NA}|$ 。

定理 5 设 H, N 是 G 的 T -直觉模糊正规子群, $A \in IF(G)$, 则有 $T|H, N|A \supseteq T|\underline{HA}, \underline{NA}|$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明: } T|\underline{HA}, \underline{NA}|(x) &= T(\bigwedge_{u \in G} \vartheta(H(ux^{-1}), A(u)), \bigwedge_{v \in G} \vartheta(N(vx^{-1}), A(v))) \\ &\leq T(\bigwedge_{u \in G} \vartheta(H(ux^{-1}), A(u)), \vartheta(N(ux^{-1}), A(u))) \\ &\leq \bigwedge_{u \in G} \vartheta(H(ux^{-1}), \vartheta(N(ux^{-1}), A(u))) \\ &\leq \bigwedge_{u \in G} \vartheta(T(H(ux^{-1}), N(ux^{-1})), A(u)) \\ &\leq \bigwedge_{u \in G} \vartheta(T|H, N|(ux^{-1}), A(u)) \\ &= T|H, N|A(x) \end{aligned}$$

因此 $T|H, N|A \supseteq T|\underline{HA}, \underline{NA}|$ 。

定理 6 设 B 是群 G 的 T -直觉模糊正规子群, A 是 G 的 T -模糊(正规)子群, 则有:

- 1) $\overline{BA}$ 是 G 的 T -直觉模糊(正规)子群;
- 2) 若 $B \subseteq A$, 则 $\underline{BA}$ 是 G 的 T -直觉模糊(正规)子群。

证明: 1) i) $B \circ A(e) = \bigvee_{y \in G} T(B(y^{-1}), A(y)) \geq T(B(e), A(e)) = 1^*$;

ii) $B \circ A(x) = \bigvee_{y \in G} T(B(xy^{-1}), A(y)) = \bigvee_{y \in G} T(B(x^{-1}y), A(y^{-1})) = B \circ A(x^{-1})$;

iii) $B \circ A(xy) = (B \circ B \circ A \circ A)(xy) = (B \circ A) \circ (B \circ A)(xy) \geq T(B \circ A(x), B \circ A(y))$ 。

由定理 1 知 $\overline{BA} = B \circ A$, 因此 $\overline{BA}$ 是 G 的 T -直觉模糊子群。

如果 A 是正规的, $\forall x, y \in G$, 有:

$$\begin{aligned} B \circ A(xy) &= \bigvee_{z \in G} T(B(z), A(z^{-1}xy)) \\ &= \bigvee_{w \in G} T(B(xw^{-1}), A(yw)) = \bigvee_{t \in G} T(B(t^{-1}), A(yxt)) \\ &= \bigvee_{t \in G} T(B(t^{-1}), A(tyx)) = B \circ A(yx) \end{aligned}$$

因此 $\overline{BA}$ 是 G 的 T -直觉模糊正规子群。

2) 设 $B \subseteq A$, 则:

i) $\underline{BA}(e) = \bigwedge_{u \in G} \vartheta(B(u^{-1}), A(u)) = \bigwedge_{u \in G} \vartheta(B(u), A(u)) = 1^*$;

$$\begin{aligned} \text{ii) } \underline{BA}(x^{-1}) &= \bigwedge_{u \in G} \vartheta(B(x^{-1}u^{-1}), A(u)) \\ &= \bigwedge_{u \in G} \vartheta(B(u^{-1}x^{-1}), A(u^{-1})) \\ &= \bigwedge_{v \in G} \vartheta(B(vx^{-1}), A(v)) = \bigwedge_{v \in G} \vartheta(B(xv^{-1}), A(v)) = \underline{BA}(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } T(\underline{BA}(x), \underline{BA}(y)) &= T(\bigwedge_{u \in G} \vartheta(B(xu^{-1}), A(u)), \bigwedge_{v \in G} \vartheta(B(yv^{-1}), A(v))) \\ &\leq \bigwedge_{u \in G} T(\vartheta(B(xu^{-1}), A(u)), A(y)) \\ &\leq \bigwedge_{u \in G} \vartheta(B(xu^{-1}), A(yu)) \\ &\leq \bigwedge_{v \in G} \vartheta(B(xyv^{-1}), A(v)) = \underline{BA}(xy) \end{aligned}$$

因此 $\underline{BA}$ 是 G 的 T -直觉模糊子群。

如果 A 是正规的, $\forall x, y \in G$, 有:

$$\begin{aligned} \underline{BA}(xy) &= \bigwedge_{u \in G} \vartheta(B(uy^{-1}x^{-1}), A(u)) \\ &= \bigwedge_{v \in G} \vartheta(B(vx^{-1}), A(vy)) = \bigwedge_{w \in G} \vartheta(B(wy^{-1}), A(xw)) \\ &= \bigwedge_{w \in G} \vartheta(B(yw^{-1}), A(wx)) = \underline{BA}(yx) \end{aligned}$$

因此 $\underline{BA}$ 是 G 的 T -直觉模糊正规子群。

原性,但不具有文献[4]提出的多重多维情形下的还原性。为了解决这个问题,本文提出了一种带权重的真值流推理算法。本算法是在原来的真值流推理算法的基础上引入权重,通过规则前件与所给事实的相似度来确定每条规则的权重,以使真值流推理算法具有在多重多维情形下的还原性。鉴于多重多维模糊推理在模糊控制中的重要作用,这种满足多重多维还原性的带权重的真值流模糊推理算法应该在模糊控制中有良好的应用效果。将这种带权重的真值流模糊推理算法应用到模糊控制中,也是今后工作的一个研究方向。

参考文献

- [1] 汪培庄,张洪敏. 真值流推理及其动态分析[J]. 北京师范大学学报:自然科学版,1989,1:1-12
- [2] 陈永义,陈图云. 特征展开近似推理方法[J]. 辽宁师范大学学

报:自然科学版,1984,3:1-7

- [3] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵,三:I 算法[J]. 中国科学:E 辑,1999,29(1):43-53
- [4] 何映思,全海金,邓辉文. 具有还原性的多重多维模糊推理算法[J]. 计算机科学,2007,34(4):145-148
- [5] LIU Xuecheng. Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations[J]. Fuzzy Sets and Systems,1992,52(9):305-318
- [6] 何新贵. 加权模糊逻辑及其广泛应用[J]. 计算机学报,1989,21(6):458-464
- [7] 徐宗本,张讲社,郑亚林. 计算智能中的仿生学:理论与算法[M]. 北京:科学出版社,2003
- [8] 谢吴航,张忠辅,郑小平,等. 基于模糊数学的网格资源综合调度算法[J]. 重庆工学院学报:自然科学版,2009,23(3):133-137,143

(上接第 215 页)

定理 7 设 H, N 是 G 的 T -直觉模糊正规子群, $A \in IF(G)$, 则 $\overline{HA} \cdot \overline{NA} = \overline{H \cdot NA}$.

证明: $\overline{HA} \cdot \overline{NA} = (H \cdot A) \cdot (N \cdot A) = (H \cdot N) \cdot (A \cdot A) = \overline{H \cdot NA}$.

3.2 群同态下直觉模糊粗糙集上下近似的性质

设 $f: G \rightarrow G'$ 是群之间的满同态, A, A' 分别是 G 和 G' 上的直觉模糊集, 定义 $f(A)(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x)$, $f^{-1}(A')(x) = A'(f(x))$, 显然 $f(A), f^{-1}(A')$ 分别是 G' 和 G 上的直觉模糊集。

定义 6 设 $A, B \in IF(G)$, 给定直觉模糊 T -模, 若满足 $T(\bigvee_{x \in G} A(x), \bigvee_{y \in G} A(y)) = \bigvee_{x \in G, y \in G} T(A(x), A(y))$, 则称 T -模是严保上的。

定理 8 设 $f: G \rightarrow G'$ 是群满同态, 直觉模糊 T -模是严保上的, A, A' 分别是 G 和 G' 上的 T -直觉模糊子群, 则 $f(A), f^{-1}(A')$ 分别是 G' 和 G 的 T -直觉模糊子群, 如果 A, A' 是正规的, 则 $f(A), f^{-1}(A')$ 也是正规的。

证明: i) $f(A)(y_1 y_2) = \bigvee_{f(x)=y_1 y_2} A(x) = \bigvee_{f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2} A(x_1 x_2) \geq \bigvee_{f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2} T(A(x_1), A(x_2)) \geq T(\bigvee_{f(x_1)=y_1} A(x_1), \bigvee_{f(x_2)=y_2} A(x_2)) = T(f(A)(y_1), f(A)(y_2));$

ii) $f(A)(y^{-1}) = \bigvee_{f(x)=y^{-1}} A(x) \geq \bigvee_{f(x^{-1})=y} A(x^{-1}) = f(A)(y);$

iii) $f(A)(e) = \bigvee_{f(x)=e} A(x) = A(e) = 1^*.$

因此 $f(A)$ 是 G' 的 T -直觉模糊子群。

如果 A 是正规的, 则:

$$\begin{aligned} f(A)(y_1 y_2) &= \bigvee_{f(x)=y_1 y_2} A(x) = \bigvee_{f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2} A(x_1 x_2) \\ &= \bigvee_{f(x_2)=y_2, f(x_1)=y_1} A(x_2 x_1) \\ &= \bigvee_{f(x)=y_2 y_1} A(x) = f(A)(y_2 y_1) \end{aligned}$$

因此 $f(A)$ 是 G' 的 T -直觉模糊正规子群。

同理, 可证 $f^{-1}(A')$ 是 G 的 T -直觉模糊子群, 当 A' 是正规的, $f^{-1}(A')$ 也是正规的。

定理 9 设 $f: G \rightarrow G'$ 是群满同态, A, B 是 G 的 T -直觉模糊子群且 B 是正规的, 则 $f(B)f(A) = f(\overline{BA})$.

证明: $f(B)f(A)(y) = f(B) \cdot f(A)(y) = \bigvee_{y_1 y_2 = y} T(f(B)(y_1), f(A)(y_2)) = \bigvee_{y_1 y_2 = y} T(\bigvee_{f(x_1)=y_1} B(x_1), \bigvee_{f(x_2)=y_2} A(x_2)) = \bigvee_{f(x_1)f(x_2)=y} T(B(x_1), A(x_2))$

$$= \bigvee_{f(x)=y} \bigvee_{x_1 x_2 = x} T(B(x_1), A(x_2))$$

$$= \bigvee_{f(x)=y} B \cdot A(x) = f(\overline{BA})(y)$$

因此 $f(B)f(A) = f(\overline{BA})$.

定理 10 设 $f: G \rightarrow G'$ 是群满同态, A', B' 是 G' 的 T -直觉模糊子群且 B' 是正规的, 则 $f^{-1}(\overline{B'})f^{-1}(A') = f^{-1}(\overline{B'A'})$.

证明: $f^{-1}(\overline{B'})f^{-1}(A')(x) = f^{-1}(B') \cdot f^{-1}(A')(x) = \bigvee_{y \in G'} T(f^{-1}(B')(xy^{-1}), f^{-1}(A')(y)) = \bigvee_{y \in G'} T(B'(f(xy^{-1})), A'(f(y))) = \bigvee_{f(y) \in G'} T(B'(f(x)f(y)^{-1}), A'(f(y))) = B' \cdot A'(f(x)) = f^{-1}(B' \cdot A')(x) = f^{-1}(\overline{B'A'})(x)$

因此 $f^{-1}(\overline{B'})f^{-1}(A') = f^{-1}(\overline{B'A'})$.

结束语 本文通过定义在论域群上的 T -直觉模糊正规子群, 得到 T -直觉模糊相似关系, 进而在群结构上建立一对直觉模糊粗糙近似算子, 研究了群上的直觉模糊粗糙集的乘积结构以及群同态下的直觉模糊粗糙集上下近似性质, 这些工作丰富和发展了模糊群的理论。

参考文献

- [1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 20(1): 87-96
- [2] 李晓萍, 王贵君. 直觉模糊群与它的同态像[J]. 模糊系统与数学, 2000, 14(1): 45-50
- [3] 李晓萍, 王贵君. 直觉模糊集的扩张运算[J]. 模糊系统与数学, 2002, 16(1): 40-46
- [4] 李晓, 赵建宏. 直觉模糊正规子群与它的同态像特征[J]. 东北师大学报, 2004, 36(1): 27
- [5] 李晓萍. 关于三角模的直觉模糊群及其同态像[J]. 模糊系统与数学, 2005, 19(1)
- [6] 马驥良, 于纯海. 模糊代数选论[M]. 北京: 学苑出版社, 1989
- [7] 张文修, 王国俊, 刘旺金, 等. 模糊数学引论[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991
- [8] 林梦雷. 直觉模糊群与它的诱导商群[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 2006, 45(2): 157-161
- [9] 李娟, 张诚一. 直觉模糊商群及其同构[J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(5): 57-62
- [10] 王贵君, 李晓萍. 直觉模糊正规子群的乘积结构[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(11): 83-87
- [11] Zhou L, Wu W, Zhang W. On characterization of intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy implicators[J]. Information Sciences, 2009, 179: 883-898