基于加权最小二乘的卡尔曼滤波算法

陈 鹏[1,2] 钱 徽[1] 朱淼良[1]
（浙江大学计算机科学与技术学院 杭州 310027）[1] （安徽师范大学物理与电子信息学院 芜湖 241000）[2]

摘 要 为了将卡尔曼滤波(KF)应用于非线性系统中，利用了离散采样点将非线性模型线性化。通过加权最小二乘原理，得到近似的线性化模型，再将KF算法应用于这个线性模型中。结果表明，加权最小二乘与KF结合的方法在非线性模型中的计算结果同扩展卡尔曼滤波(EKF)算法接近，且不需要EKF那样求偏导就能很容易地应用到非线性系统中。这种方法实现容易，预测可靠，具有实际应用的价值。

关键词 预测，非线性系统，卡而曼滤波，采样

中图法分类号 TP273 **文献标识码** A

Weighted Minimum Mean Square Kalman Filter

CHEN Peng[1,2] QIAN Hui[1] ZHU Miao-liang[1]
(College of Computer Science and Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)[1]
(College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)[2]

Abstract In order to use Kalman Filter (KF) in nonlinear systems, a new method was proposed. Using the principle that a set of discretely sampled points can be used to form a linear system, the estimator yields performance equivalent to the Extended Kalman Filter (EKF) for nonlinear systems and can be elegantly used to nonlinear systems without the differential steps required by the EKF. We argue that the ease of implementation and more accurate estimation features of the new filter recommend its use in applications.

Keywords Estimation, Non-linear systems, Kalman filtering, Sampling

预测和滤波是工程界最常用的两个工具。当需要从含有噪声的测量数据中预测系统状态时，就需要用某种预测算法从数据中预测出系统的真实状态。当系统动态模型和测量模型为线性时，可以用KF算法给出最小均方预测[1]。然而在很多应用中，系统动态模型和测量模型是非线性的。人们研究了各种将KF算法扩展至非线性系统的方法。一个结果是对非线性滤波问题给出最优解需要完整的条件概率密度函数。要完整地表示出这个条件概率密度函数，可能需要无限个参数，因此人们提出了各种近似方法。

也许在非线性系统中受到最广泛应用的预测算法就是EKF算法[2]。EKF算法先将非线性模型线性化，然后将KF算法用在线性化的模型上。EKF算法有两个弱点：一是当线性化点处于高度非线性化的区域时，线性化误差会很大，结果导致EKF算法不稳定；二是很多应用中雅可比矩阵很难求，因此实现起来很困难。本文给出了一种新的滤波算法。在线性系统中这种算法同KF算法一样，且不需要求雅可比矩阵就能应用到非线性系统中。这个滤波算法的基础是加权最小二乘(WMMSE)，它能够用一些加权的离散点逼近出一条近似直线。由于不需求雅可比矩阵，而且个别高度非线性区域不会对整体的线性化结果造成太大的影响，因此我们认为这种将非线性模型线性化的方法要比EKF的线性化方法优越。实例表明，这个算法易于实现，且线性化精度同EKF方法接近，具有实际应用价值。

1 相关研究综述

针对非线性系统的预测问题，人们提出了各种解决策略。EKF采用一阶泰勒展开将非线性模型线性化，然后用KF算法进行预测。UKF通过有限个点进行非线性映射的方法得到映射后的均值和方差估计，然后再用KF方法预测[3]。粒子滤波算法采取了无参数的方法，使用粒子集对非线性系统进行预测[4]。Marginalized Particle Filter算法则把非线性系统分解为线性部分及非线性部分，将粒子滤波算法应用于非线性部分，对线性部分则采用KF算法，从而将粒子滤波同卡尔曼滤波有机地结合了起来[5]。

2 算法的基本思想

WMMS-KF算法通过加权最小二乘法，利用有限的离散加权点来确定近似直线，然后使用KF算法进行预测。

2.1 加权最小二乘线性化

通过对EKF线性化误差的分析，发现EKF误差来源于过分强调均值，只在均值处通过泰勒展开进行线性化。当系统非线性化程度过高时，均值及方差预测的误差较大。为克

到稿日期：2008-12-31 返修日期：2009-03-05 本文受浙江省科技厅重大项目(2006c13096)资助。

陈 鹏(1975—)，男，博士研究生，讲师，主要研究方向为人工智能，E-mail：chenpeng@zju.edu.cn；**钱 徽**(1974—)，男，博士，副教授，主要研究方向为图像处理、智能机器人等；**朱淼良**(1946—)，男，教授，博士生导师，主要研究方向为人工智能、计算机视觉、智能机器人等。

服 EKF 对一阶二阶矩预测误差大及需要求偏导的缺点,我们采用加权最小二乘的方法进行线性化。这种方法不需求偏导,且离散点的个数和位置都可调节,具有一定的灵活性。当设置的离散点同均值点无限接近时,其极限值即为在均值处的偏导值,此时所得结果同 EKF 方法相同。这也是基于加权最小二乘法的卡尔曼滤波预测结果同 EKF 方法预测结果较为接近的原因。式(1)、式(2)为线性方程组及加权最小二乘法公式:

$$A\bar{u}=b \tag{1}$$

$$A^T\Sigma^{-1}A\bar{u}=A^T\Sigma^{-1}b \tag{2}$$

其中,Σ^{-1}为权重矩阵。一种直接的方法是将离散点处的概率值作为权重。由于均值处发生的概率值较大,因此相应的权重也较大。其他离散点处发生的概率小,相应的权值也小。例如对如下非线性系统:

$$x_{t+1}=f(x_t,t)+\varepsilon_t=x_t/2+\frac{25x_t}{1+x_t^2}+8\cos(1.2t)+\varepsilon_t$$

以均值 $\mu,\mu-\sigma,\mu+\sigma$ 3 个离散点为例进行说明。3 个离散点处的函数值和相应的概率值(权重)如表 1 所列。

表 1 离散点处 $x,f(x)$及 $p(x)$值

位置	X	f(x)	p(x)
$\mu-\sigma$	0.711	17.0289	2.4197
μ	0.811	17.5030	3.9894
$\mu+\sigma$	0.911	17.7682	2.4197

由表 1 中数据,可得:

$$A=\begin{pmatrix}0.711 & 1\\ 0.811 & 1\\ 0.911 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix}2.4197 & 0 & 0\\ 0 & 3.9894 & 0\\ 0 & 0 & 2.4197\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}17.0289\\ 17.5030\\ 17.7682\end{pmatrix}$$

将其带入加权最小二乘法式(2),可得近似直线为:

$f(x)=3.6965x+14.4479$

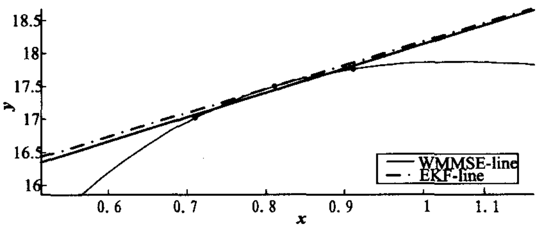


图 1 EKF 法得到的近似直线和 WMMSE 法得到的近似直线(实线为 WMMSE 法得到的线性化直线,虚线为 EKF 法得到的线性化直线)

表 2 EKF,WMMSE-KF,MC 对经 $f(x)$影射后均值和方差估计结果对比

预测参数	EKF	WMMSE-KF	MC
μ	17.503	17.4457	16.4857
σ	1.306	1.3666	4.8716

EKF 和 WMMSE 两种方法线性化结果的对比如图 1 所示。EKF,WMMSE 及精确的 MC 法对均值和方差的预测结果比较如表 2 所列。由表 2 中数据可以看出,WMMSE 法用 3 个离散点进行线性化后,其对方差和均值的估计结果都要比 EKF 准确。不同间隔、不同采样点个数的计算结果如表 3 所列。

表 3 不同采样间隔、不同采样点个数的计算结果

采样间隔	采样数	μ 估计值	σ 估计值
0.1	3	17.4457	1.3666
0.1	5	17.4062	1.4532
0.1	7	17.3987	1.4854
0.1	9	17.3982	1.4887
0.1	11	17.3982	1.4888
0.05	3	17.4863	1.3211
0.05	5	17.4595	1.3544
0.05	7	17.4326	1.3958
0.05	9	17.4133	1.4357
0.05	11	17.4033	1.4649

2.2 基于加权最小二乘的滤波算法

将 WMMSE 线性化方法同 KF 算法结合,便得到了基于 WMMSE 的 KF 算法。算法步骤如下:

1)设置矩阵 A,b 及加权矩阵Σ^{-1};

2)代入式(2),求系数矩阵 A,向量 b;

3)得到近似直线:

$x_t=g(u_t,x_{t-1})+\varepsilon_t\approx Ax_{t-1}+b+\varepsilon_t$

4)用 Kalman 方法对此线性系统进行预测;

5)转 1)。

3 实验结果与分析

下面将 EKF、粒子滤波(PF)和基于加权最小二乘线性化方法的 KF 应用于同一个非线性系统中,并对它们的预测结果进行比较。考虑如下非线性系统:

$$x_{t+1}=x_t/2+\frac{25x_t}{1+x_t^2}+8\cos(1.2t)+\varepsilon_t \tag{3}$$

$$y_t=\frac{x_t^2}{20}+e_t \tag{4}$$

式(3)为运动方程,式(4)为测量方程。其中,$x_0\sim N(0,5)$,ω_t 和 e_t 为相互独立的白噪声序列。$\omega_t\sim N(0,10)$,$e_t\sim N(0,1)$。这是一个具有可加噪声的离散非线性时变系统[6,7]。EKF 算法、PF 算法与基于 WMMSE 的 KF 算法预测结果如图 2 所示,预测步数设为 100。

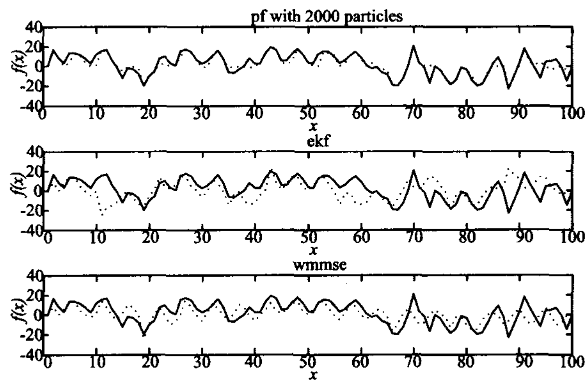
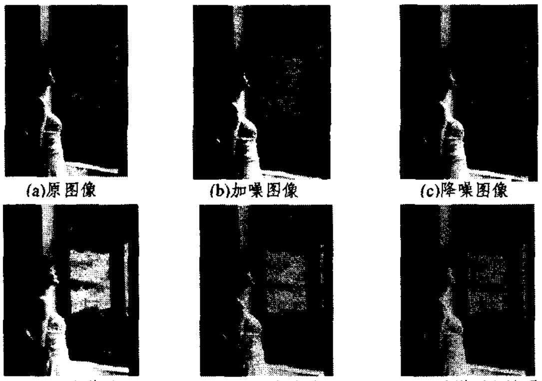


图 2 PF,EKF 及 WMMSE 计算结果比较(虚线为真实 x 值,实线为预测值)

为便于比较,3 种算法所使用的随机数据来自于事先保

(下转第 257 页)

增强可以近似看作滤除图像中乘法噪声的过程。所以，我们只在实验图像中加入加法噪声。如在图 11(a)中加入 Gaussian 噪声(0,0.001)。



(a)原图像 (b)加噪图像 (c)降噪图像

(d)(a)的增强 (e)(b)的增强 (f)(b)的增强与降噪

图 11

图 11(b)的 PSNR 是 30.981。图 11(c)是图 11(b)的本文方法降噪，其 PSNR 是 35.619。图 11(e)是图 11(b)的本文方法增强，其 PSNR 是 25.378。图 11(f)的 PSNR 是 31.135。

(a)原图像 (b)加噪图像(PSNR=30.8dB) (c)图像降噪与增强(PSNR=30.3dB)

图 12

(a)原图像 (b)加噪图像(PSNR=31.8dB) (c)图像降噪与增强(PSNR=30.4dB)

图 13

图 11 中的各个图像的处理方法和参数在第 2 节中都有详细的描述。从图 11(e)可知，在真彩图像增强的处理过程中，图像中的噪声被明显放大。从图 11(f)可知，本文的方法在真彩图像增强过程中可以有效抑制真彩图像中的噪声，达到了既增强真彩图像又抑制图像中的噪声的双重目的，并且增强后的图像色彩人眼感觉舒适，细节保持良好。

为了验证本文方法的可重复性和适应性，用另两幅风景图像试验验证本文方法，如图 12 和图 13 所示。

通过实验观察，增强与降噪后的真彩图像色彩生动，图像细节保持良好，处理后的图像人眼感觉舒适。本文方法不仅能够有效增强真彩图像，同时还能够明显抑制真彩图像中的噪声。

结束语 本文方法处理的真彩图像，色彩没有明显偏离，细节保持良好，图像增强适度，人眼观察舒适，并且还能够有效抑制真彩图像中的噪声。今后，应该寻找比 HSV 色彩空间更有效分离色彩和亮度的色彩空间，而且这个色彩空间能够被物理学和神经生理学所证明。还应该寻找更有效地滤除真彩图像中的噪声的方法。同时，由于小波理论和方法的不断发展，还可以使用脊波变换和曲波变换来增强与降噪真彩图像，以便取得比静态小波变换更好的效果。

参 考 文 献

[1] Xiong Jie. Real Color Image Enhanced by Illumination—Reflectance Model and Wavelet Transform[C]// International Forum on Information Technology and Applications, IFITA 2009 Processings. 2009:691-695

[2] George J, Indu S P. Color Image Enhancement and Denoising Using an Optimized Filternet Based Structure Tensor Analysis[C] //ICSP 2008 Processing. 2008:236-239

[3] Gonzalez K R C, Woods R E. Digital Image Processing[M]. Publishing House of Electronics Industry, 2005:268

[4] Jobson D J, Rahman Z, Woodell G A. A multi-scale retinex for bridging the gap between color images and the human observation of scenes[J]. IEEE Trans. Image Process, 1997, 6(7):965-976

[5] Land E H, McCann J J. Lightness and retinex theory [J]. J. Opt. Soc. Am. A, 1971, 61(1):1-11

[6] Land E H. An alternative technique for the computation of the designator in the retinex theory of color vision[C]// Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1986, 83:3078-3080

[7] Rahman Z, Jobson D J, Woodell G A. Retinex processing for automatic image enhancement[J]. Journal of Electronic Imaging, 2004, 13(1):100-110

[8] Hurlbert A. Formal connection between lightness algorithms [J]. J. Opt. Soc. Am. A, 1986, 3(10):1684-1693

[9] 飞思科技产品研发中心. 小波分析理论与MATLAB7实现[M]. 北京:电子工业出版社, 2005:102

[10] 阎静文,等. 数字图像处理[M]. 北京:国防工业出版社, 2007:95-104

(上接第 231 页)

存好的随机序列。可以看出，PF 算法预测结果较准确，EKF 算法与基于 WMMSE 的 KF 算法预测结果接近。

结束语 本文引入了一种基于加权最小二乘的线性化方法，并将其同 KF 算法结合，得出了可用于非线性系统且不需要求偏导的滤波算法。实验表明，这种算法的预测结果同 EKF 相似，但不需要 EKF 算法中的求偏导步骤。在一些偏导较难计算的系统中，这种算法有一定的应用价值。

参 考 文 献

[1] Kalman R E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems[J]. Transactions of the ASME, 1960, 82:35-45

[2] Thrun S, Burgard W, Fox D. Probabilistic Robotics[M]. London: The MIT Press, 2005

[3] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proc of the IEEE Aerospace and Electronic Systems, 2004, 92(3):401-422

[4] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(2):174-188

[5] Schon T, Gustafsson F, Nordlund P J. Marginalized particle filters for mixed linear/nonlinear state-space models [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(7):2279-2289

[6] Schön T B. Estimation of Nonlinear Dynamic Systems Theory and Applications[D]. Linköpings Universitet, Linköping, 2006

[7] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. IEEE Proc on Radar and Signal Processing, 1993, 140(2):107-113