

一种快速的基于球体混合重建的碰撞检测算法

赵伟^{1,2,3} 李文辉^{1,2}

(吉林大学计算机科学与技术学院 长春 130012)¹

(吉林大学符号计算与知识工程教育部重点实验室 长春 130012)²

(长春工业大学计算机科学与工程学院 长春 130012)³

摘要 为了解决虚拟特征和虚拟环境中虚拟物体的相交问题,必须对实时的虚拟应用环境实施快速的碰撞检测。提出了基于球体混合重建的碰撞检测算法,对球体混合表面提出了一个子线性时间复杂性的重建过程;利用四元组构造变换范围,扩展了从线性到球形混合的构造变换方法;采用循环划分的方法完成了由球体混合到线性混合的分解过程。尽管这个方法的实现过程较线性的方法更难些,但算法的执行过程所需时间与线性方法相差无几,其复杂性也与线性结构的相同。

关键词 碰撞检测,球体混合,单元四元组,球体重建

中图分类号 TP391 **文献标识码** A

Fast Collision Detection Algorithm for Spherical Blend Reconstruction

ZHAO Wei^{1,2,3} · LI Wen-hui^{1,2}

(College of Computer Science & Technology, Jilin University, Changchun 130012, China)¹

(Key Laboratory of Symbol Computation and Knowledge Engineering of Ministry of Education, Jilin University, Changchun 130012, China)²

(School of Computer Science & Engineering, Changchun University of Technology, Changchun 130012, China)³

Abstract Fast collision detection are necessary in order to resolve interactions between a virtual character and its environment. We presented a novel collision detection algorithm based on spherical blend skinning. A procedure was presented for refitting of bounding spheres for spherical blend skinning with sublinear time complexity. Constructed rotation bound by a quaternion. This refitting operation is an extension of the refitting for linear blending. Completed decomposes from spherical blending to linear by rotational component. Although it is of course a little more difficult than in the linear case, the resulting algorithm is almost as easy to implement and the computation complexity of the presented algorithm is almost the same as that of the linear version.

Keywords Collision detection, Spherical blending, Unit quaternion, Spherical reconstruction

1 引言

最近,虚拟环境中实时物体的仿真有了很大的进展,尤其是解决物体表面真实感的问题,很多学者做了较深入的研究,提出了很多在虚拟环境中解决物体相交问题的快速碰撞检测算法。目前,从完成检测的特点上看,碰撞检测算法可以归为两大类:一类是硬件 CPU 与 GPU 通过负载均衡调配策略完成或通过并行处理技术完成检测^[1-4],采用这一方法虽然可以提高碰撞检测的速度和精度,但会增加额外的硬件开销,不利于推广;另一类是通过变换空间几何形体的方法,主要是采用层次包围盒(BVH)或采用自底向上遍历树形重建所有的包围球的方法^[5-7]完成碰撞检测,由于该方法不需要增加机器硬件,因此一直被广泛采用。

近几年,一类更有效的根据需要进行重建的算法成为研究的热点。这类算法是根据有碰撞检测需要时才重建包围

盒。算法最先由 Akenine-Mouer 2003 年提出并应用在 K-Dops 中^[8],2004 年 Klug 与 Alexa 对这个算法进行了改进^[9]。经改进的算法对向量代换没有一个很好的处理办法,使具有向量代换的过程很难实现。另外,这个算法只适应部分实际的变形模型,不是对每一种变形模型都有效。2003 年 Mohr 和 Gleicher 提出了线性混合的方法^[10],采用增加辅助连接和重新计算顶点权值的方法完成碰撞检测的过程。这个方法同样有缺点,因为算法的运行时间的复杂性依赖于连接的数量,增加辅助连接必然增加时间复杂性。2004 年 Heim 提出了基于 3D 空间变形模型的碰撞检测算法^[11],算法虽然可以快速地执行,但重建过程被限制在包围体的同一层上,尤其对细节描述的 3D 模型更是如此。

2004 年 Hejl 提出了一种与球体混合类似的去壳算法^[12]。这是一个优秀且简单的算法,只是顶点受邻接顶点的影响,只适用于 3D 模型。本文提出的碰撞检测方法可以直

到稿日期:2008-08-14 返修日期:2008-10-13 本文受国家自然科学基金项目(60573182, 69883004),教育部博士点基金项目(20060183 042),吉林省科技发展计划项目(20060527, 20040531)资助。

赵伟(1967-),男,博士,副教授,硕士生导师,主要研究方向为数据库与虚拟现实, E-mail: prince1205@163.com;李文辉(1961-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为图像处理与虚拟现实。

接使用 Hejl 的去壳方法而不需修改,因此它是一个更普通的碰撞检测方法。为了减少变形模型,提高碰撞检测的精度和速度,2005 年 Kava 和 Zara 提出线性混合去壳的算法^[13],算法在检测的速度和精度上有了很大的提高,也是目前对虚拟物体重建的最好、最快的算法之一。它的缺点是在重建虚拟物体表面常会出现扭曲现象,破坏了虚拟物体的真实感,如图 1 的(a)、(b)所示。

本文的主要贡献是:提出了一个新的球体混合去壳的碰撞检测算法。核心是一个有效的球体重建操作,利用四元组构造变换过程,对球体混合在子线性时间复杂性的情况下就可以完成,真正实现了快速的“按需重建”的过程,增强了虚拟物体的真实感,避免了虚拟物体表面的扭曲现象。如图(1)(c)、(d)所示,算法可以简单地实现并且可以快速地执行。

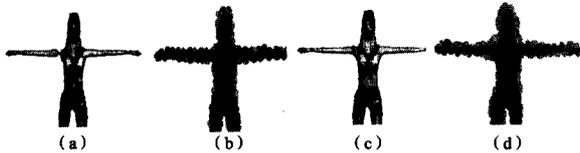


图 1 线性混合与球形混合执行结果的比较
(a)线性混合的重建结果;(b)线性混合重建的包围球;
(c)四元组球体混合的重建结果;(d)四元组球体混合重建的包围球。

图 1 线性混合与球形混合执行结果的比较

2 相关知识

设在欧几里德空间 R^d 中(d 代表维数),向量 $v \in R^d$ 由元素 $(v_1, \dots, v_d)^T$ 组成。为了简单表示,给出了所有可能凸面值的集合:

$$W_d = \{w \in R^d; w_1 \geq 0, \dots, w_d \geq 0, \sum_{i=1}^d w_i = 1\}$$

$\min_{\alpha} \subseteq R^d$ 的凸壳(即最小的凸集 ming_{α}),表示为 $\min SET_{\alpha}$ (\min_{α})。两个向量 $v_1 \in R^d, v_2 \in R^d$ 的值为 (v_1, v_2) , $\|v_1, v_2\|$ 表示 (v_1, v_2) 的最短路径。单元四元组三维球表面表示为 $S_3 = \{\|x\| = 1; x \in R^4\}$ 。

2.1 去壳与碰撞检测

假设顶点 v 依附于连接 (j_1, \dots, j_n) , n 个连接的权值为 $w = (w_1, \dots, w_n)$,各点的连接 (j_1, \dots, j_n) 被称作影响顶点 v 的连接集合,用 $J(v)$ 表示。权值 w 的第 i 个部分为 w_i ,代表连接 j_i 的影响程度。

我们用 q_1, \dots, q_n 表示四元组与转置矩阵 C_{j_1}, \dots, C_{j_n} 的相关部分。变换过程可见文献^[14],在去壳变形过程中,四元组通过线性插值法计算 $\frac{w_1 q_1 + \dots + w_n q_n}{\|w_1 q_1 + \dots + w_n q_n\|}$ 且变换结果转换到转置矩阵 T_w 中。在变形的网状结构中,顶点位置通过下式计算:

$$v_i = \sum_{j=1}^n w_j C_{j_i} t_c + T_w(v - t_c) \quad (1)$$

这里 t_c 为转置中心, C_{j_1}, \dots, C_{j_n} 为转置矩阵。通过球体混合可以很容易计算 t_c ,细节可以参见文献^[15]。在球体混合等式(1)中,第一项 $\sum_{j=1}^n w_j C_{j_i} t_c$ 为线性部分,第二项 $T_w(v - t_c)$ 为球体部分。线性部分主要是将线性混合部分应用到变换中心 t_c ,球体部分主要是插入相关连接的变换。

根据需要的重建过程,最重要的是最后顶点 v_i 的位置。经线性混合后, v_i 将不在 $\min SET_{\alpha}(C_{j_1} v, \dots, C_{j_n} v)$ 中。在球体混合中 v_i 位于球体 \min_{α} 的表面。对 \min_{α} 定义为: $\min_{\alpha} =$

$\{\sum_{i=1}^n w_i C_{j_i} t_c + T_w(v - t_c); w \in W_n\}$ 。按需重建的球体混合算法主要是找到一个有效的区域作为 \min_{α} 集合的一个子集。

本文提出的这一碰撞检测算法需要一个包围球树,这棵树代表着 3D 模型的位置。包围球树的建立过程是一个自顶向下逐步求精的过程。开始时,将整个 3D 模型做成只有一个区域的包围球,随后将它划分为两部分区域且递归执行该过程,用 Gaertner 算法计算最小的包围球^[16]。当完成二叉树构造时,一些节点采用文献^[13]的启发式算法裁剪一些节点。一般来说,裁剪掉那些包围球与双亲节点包围球大小相似的节点,就可以得到一棵有序树,代替二叉树。

对于实际的碰撞检测,我们运用了基于 BVH 的标准算法,输入 2 个 3D 模型,每一个模型用一个 BVH。任务就是找到所有的碰撞三角形,或者执行如下的算法:首先,对包围球的根节点做相交测试。如果没有连接,结束算法,没有碰撞;如果相交,移到下一层包围盒,继续重复循环执行。最后一层在各自的三角形上进行相交测试。本文提出的算法是在相交测试前进行插入,然后再进行球体的重建过程,即使是 3D 变形模型也是如此。

2.2 高效的球体重建

2.2.1 问题分解

假设重建一个中心为 O ,半径为 r 的球 S ,它由一些封闭三角形的集合构成。定义所有三角形的顶点为 v_1, \dots, v_k 。为了简化表示,首先假设所有这些顶点与连接集 $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ 相关,即

$$J = J(v_1) = \dots = J(v_k)$$

任务就是要计算一个新球体,这个球体封闭顶点 v_1, \dots, v_k 可以通过等式(1)计算。由于 $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq S$,通过包围球 S 代替顶点集 $\{v_1, \dots, v_k\}$,从而代替包围体 v_{11}, \dots, v_k ,由集合(2)完成:

$$M = \bigcup_{w \in W_n} (\sum_{i=1}^n w_i C_{j_i} t_c + T_w(S - t_c)) \quad (2)$$

集合(2)包围了通过球体混合产生的所有表面的变形。显然,这将产生一个非常松散的包围球,对碰撞检测是没有价值的。必须给定顶点的权值,这需要在连接集 J 中对所有连接从小到大计算顶点的权值范围。对于每一个连接 $j \in J$,用 $[low_j, high_j]$ 表示权值范围,每个顶点 v_1, \dots, v_k 的权值都要加入到连接集 J 。设权值取值范围是 $[low_j, high_j]$,定义凸多面体的有限集 W_n' 如下:

$$W_n' = \{low_i \leq w_i \leq high_i, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n w_i = 1; w \in R^n\}$$

把这个集合应用到式(2)中,代替 W_n ,得

$$N = \bigcup_{w \in W_n'} (\sum_{i=1}^n w_i C_{j_i} t_c + T_w(S - t_c)) \quad (3)$$

集合 W_n' 是一个 n 维包围盒 $\{low_i \leq w_i \leq high_i, i = 1, \dots, n; w \in R^n\}$ 与 $\{w \in R^n; \sum_{i=1}^n w_i = 1\}$ 的交集,则 W_n' 是一个被限定的 R^n 的凸集。因此,可以用一个有 m 个点的凸壳表示。定义点集 $P = \{p_1, \dots, p_m\}, \forall p_i \in P$ 依靠顶点的权值。在建包围球时,可以提前计算集合 W_n' 。表示集合 W_n' 的 p_i 表达式如下:

$$W_n' = \min SET_{\alpha}(p_1, \dots, p_m) = \{\sum_{i=1}^m u_i p_i; u \in W_m\} \quad (4)$$

2.2.2 线性混合部分

线性部分是将线性混合部分应用到变换中心 t_c ,通过球

体混合去壳算法对给定模型进行计算,计算结果是一个独立顶点权值。利用式(4)可以将式(3)变换为

$$\left\{ \sum_{i=1}^n w_i C_{j_i} t_c : w \in W_n' \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m u_k p_k \right) C_{j_i} t_c : u \in W_m \right\}$$

这里 p_k 表示向量 p_k 第 i 个元素,因为 $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m u_k p_k \right) C_{j_i} t_c = \sum_{k=1}^m u_k \left(\sum_{i=1}^n p_k C_{j_i} t_c \right)$,这时我们就可以转换变换中心为

$$r_k' = \sum_{i=1}^n p_k C_{j_i} t_c, k=1, \dots, m \quad (5)$$

合并等式 $\left\{ \sum_{i=1}^n w_i C_{j_i} t_c : w \in W_n' \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^m u_k r_k' : u \in W_m \right\} = \min SET(r_1', \dots, r_m')$ 则线性混合部分正好为一个 3D 点的凸壳,这些点由预先计算 $p_i \in P$ 与等式(5)给出。

2.2.3 球体混合部分

定义 1 设欧几里德空间 R^d 中,点集 $P = \{P_1, \dots, P_m\}$, $Q = \{Q_1, \dots, Q_n\}$,对 $\forall P_i \in P \forall Q_j \in Q, P_i \oplus Q_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (P_i + Q_j)$ 。

在集合(3)中处理 T_w 线性四元组部分,用中心 O 、半径 r 重建包围球 S 。设 L 描述如下集合:

$$L = \bigcup_{w \in W_n} T_w(S - t_c) = \{T_w(o - t_c) : w \in W_n'\} \oplus \{x \in R^3 : \|x\| \leq r\}$$

我们用 e_1, \dots, e_n 表示四元组与矩阵 C_{j_1}, \dots, C_{j_n} 转置部分的联系。 T_w 是一个通过四元组 $w_1 e_1 + \dots + w_n e_n$ 给定的转换矩阵。由于每一个非零四元组定义唯一一个 3D 转置,因此我们通过四元组集合 $\{w_1 e_1 + \dots + w_n e_n : w \in W_n'\}$ 构造所转换的区域,四元组可以看作 R^4 的向量, R^4 可以用 R^3 表示。通过 $e_k' = \sum_{i=1}^n p_k e_i, (k=1, \dots, m)$ 计算另一个四元组 e_1', \dots, e_m' 的集合,则 $\{w_1 e_1 + \dots + w_n e_n : w \in W_n'\} = \{u_1 e_1' + \dots + u_m e_m' : u \in W_m\}$ 。因此,可以从 $\min SET_\alpha(e_1', \dots, e_m')$ 给四元组构造一个转置区域。

2.3 理论基础

首先给出球帽的 2 个等价定义。

定义 2 在半空间中,球心为 $o_{s_1} \in R^d$ 、半径为 $r_1 \in R$ 与 $o_{s_2} \in R^d$ 、半径为 $r_2 \in R$ 的两球表面是一个非空的交集。

定义 3 球心为 o_s ,点 f_s 在球表面,角 $\alpha_s \in [0, \pi]$,球半径 $r_s = \|f_s - o_s\|$,球帽可表示为

$$\{\|x - o_s\| = r_s, (x - o_s, f_s - o_s) \geq r_s^2 \cos(\alpha_s) : x \in R^d\}$$

定理 1 定义 2 与定义 3 是等价定义。

证明:对于 $d \in R^d, U \in R$ 半空间可以写成 $\{x \in R^d : (x, d) \geq U\}$ 。定义 2 中球表面可以表示为 $\{x \in R^d : \|x - o_s\| = r_s\}$,定义 3 可表示为 $S_{\omega p} = \{\|x - o_s\| = r_s, (x, d) \geq U : x \in R^d\}$,则 $(x - o_s, f_s - o_s) \geq r_s^2 \cos(\alpha_s)$ 为 $(x, f_s - o_s) \geq r_s^2 \cos(\alpha_s) + (o_s, f_s - o_s)$,得 $d = f_s - o_s$ 且 $U = r_s^2 \cos(\alpha_s) + (o_s, f_s - o_s)$ 。

因为 $(x, d) \geq U$,则 $(x, f_s - o_s) \geq r_s^2 \cos(\alpha_s) + (o_s, f_s - o_s)$,不失一般性,我们可以假设 $\|d\| = r_s$ (由于 $(x, d) \geq U$ 能够通过非零量增加且仍然代表同一个半空间)。球帽顶点可简单地描述为 $f_s = d + o_s$,可以找到一角 α_s 满足等式 $U = r_s^2 \cos(\alpha_s) + (o_s, d)$ 。由定义 1 知半空间相交球体表面是非空交集,则 $(x, d) \geq U$ 。这意味着从平面 $(x, d) = U$ 到中心 o_s 的距离小于或等于 r_s 。而从 $(x, d) = U$ 到 o_s 的距离可由公式 $\frac{|U - (o_s, d)|}{r_s}$ 表示,则 $\frac{|U - (o_s, d)|}{r_s} \leq r_s$,即 $|U - (o_s, d)| \leq$

r_s^2 。证毕。

在 S_3 上用 f_c 表示球帽 S_{cap} 的顶点,用 α_c 表示角度。由于 S_3 是以 0 为中心、以 1 为半径的球,则球心 $o_c = 0$ 、半径 $r_c = 1$ 。由于 S_3 的特点, f_c 可用一个单元四元组代表变换 R_c 。所有变换可由 $S_{\text{cap}}、R_c$ 与任意坐标轴及角度变换 $[0, 2\alpha_c]$ 组成^[14]。如果旋转集合区域由 $S_{\text{cap}} \subseteq S_3$ 表示,可以通过 $\beta = \{R(o - t_c) : R \in C\}$ 限定最初的集合 $(T_w(o - t_c) : w \in W_n')$, C 是一个变换集合。集合 β 是沿任意坐标轴角度在 $[0, 2\alpha_c]$ 的旋转向量 $R_c(o - t_c)$,则 β 是球帽,顶点是 $R_c(o - t_c)$,中心为 0、角度为 $2\alpha_c$ 。

为了构造球体 S_3 上的一个球帽,现在使四元组 e_1', \dots, e_m' 标准化为单元四元组, $e_{\text{unit } k} = \frac{e_k'}{\|e_k'\|}, k=1, \dots, m$ 。用 e_{unit} 代替 e_k' 。在 S_3 上构造球帽,保留了四元组 $e_{\text{unit } 1}, \dots, e_{\text{unit } m}$ 。

定理 2 设 e_1, \dots, e_m 是非零四元组,且 $e_{\text{unit } 1} = \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, e_{\text{unit } m} = \frac{e_m}{\|e_m\|}$,则集合 $M = \min SET_\alpha(e_1, \dots, e_m)$ 与集合 $N = \min SET_\alpha(e_{\text{unit } 1}, \dots, e_{\text{unit } m})$ 代表同一个变换。

证明:① M 中的任何变换也在 N 中。 $\forall a \in M$ 有 $a = \sum w_i e_i$,设 $A = \sum w_i \|e_i\|, u_i = \frac{w_i \|e_i\|}{A}$,显然 $A > 0, u_i \geq 0$ 且 $\sum u_i = 1$,则 $u \in W_m, \sum u_i n_i \in N$,则 $A \cdot \sum u_i n_i = a$ (即 $\sum u_i n_i$ 与 a 代表同一个变换),于是有 $A \cdot \sum u_i n_i = A \cdot \frac{\sum w_i \|e_i\| e_i}{\sum \|e_i\|} = \sum w_i e_i = a$ 。

② 任何 N 中的变换也在 M 中。对于 $t \in W_m, \forall b \in N$,有 $b = \sum t_i n_i, B = \sum \frac{t_i}{\|e_i\|}$ 且 $S_i = \frac{t_i}{\|e_i\| B}$ 。另 $B > 0$ 且 $S \in W_m$,则 $\sum S_i e_i \in M$,故

$$B \cdot \sum S_i e_i = B \cdot \sum \frac{t_i e_i}{\|e_i\| B} = \sum t_i n_i = b$$

证毕。

在球 S_3 上由 $e_{\text{unit } 1}, \dots, e_{\text{unit } m}$ 构造球帽,通过一个球心为 o_E 、半径为 r_E 的封闭球 $E \subseteq R^4$ 限定 $e_{\text{unit } 1}, \dots, e_{\text{unit } m}$ 。在构造过程中,如果需要,仍可采用文献[10]中的 Gaertner 算法找到最小的包围球,或者采用文献[13]中的 James 算法得到一个近似的包围球。即通过计算 $e_{\text{unit } 1}, \dots, e_{\text{unit } m}$ 的平均值作为球心,然后定义最小可能的半径,可以得到一个封闭球。

在计算封闭球 E 之后, $E \cap S_3$ 是期望的球帽。

定理 3 设 S_a 为 R^d 上球心为 o_a 、半径为 r_a 球的表面,设 S_b 为 R^d 上球心为 o_b 、半径为 r_b 的球,则交集 $S_a \cap S_b$ 是一个球帽,即 $S_a \cap S_b = S_a \cap H$ 。这里 H 为 R^d 上的半空间。如果 $o_a = 0, r_a = 1$ 且 $r_b < 1$,则 $0 \notin H$ 。从 0 到 H 的距离为

$$\frac{1 + \|o_b\|^2 - r_b^2}{2 \|o_b\|}$$

证明:由 $S_a = \{\sum (x_i - o_{a_i})^2 = r_a^2 : x \in R^d\}, S_b = \{\sum (x_i - o_{b_i})^2 \leq r_b^2 : x \in R^d\}$,则 $S_a \cap S_b = \{\sum (x_i - o_{a_i})^2 = r_a^2, \sum (x_i - o_{b_i})^2 \leq r_b^2 : x \in R^d\}$,即:

$$\sum (x_i^2 - 2x_i o_{a_i} + o_{a_i}^2) = r_a^2 \quad (7)$$

$$\sum (x_i^2 - 2x_i o_{b_i} + o_{b_i}^2) \leq r_b^2 \quad (8)$$

(8)-(7),得

$$\sum (2(o_{a_i} - o_{b_i})x_i + o_{b_i}^2 - o_{a_i}^2) \leq r_b^2 - r_a^2 \quad (9)$$

式(9)是一个描述半空间的等式,可以表示为 H ,定理的

第一部分得证。第二部分用 $x=0, o_a=0, r_a=1$ 代入式(9)得 $\sum o_b^2 \leq r_b^2 - 1$ 。由于我们假设 $r_b < 1$, 即 $x=0$ 不在 H 中, 因此, 从 H 到 0 的距离与从超平面决定 H 到 0 的距离是同一段距离。从 0 到超平面 $(x, d)=D, d \in R^d, D \in R$ 的距离是 $dist(0, D) = |D| / \|d\|$ 。故有 $|D| = |r_b^2 - 1 - \|o_b\|^2| = 1 + \|o_b\|^2 - r_b^2$ 且 $\|d\| = 2\|o_b\|$, 则后一部分得证。证毕。

定理 4 设 e_1, \dots, e_m 是单元四元组, 被 R^4 上半径 $r < 1$ 的球 S 封闭, 则集合 $S_{cap} = S \cap S_3$ 是一个球帽:

$$\frac{w_1 e_1 + \dots + w_m e_m}{\|w_1 e_1 + \dots + w_m e_m\|} \in S_{cap}, w_i \in W_m.$$

证明: 由定理 3 知, S_{cap} 是一个球帽, 且 $S_{cap} = H \cap S_3$, 这里 H 是不含有零向量的半空间。显然 $e_i \in S_{cap}$ (因为 $e_i \in S_3$ 且 $e_i \in S$), 则一定有 $e_i \in H$ 。由于半空间总是凸状的, 则有 $w_1 e_1 + \dots + w_m e_m \in H$ 。设 $e' = w_1 e_1 + \dots + w_m e_m$, 因为 $\frac{e'}{\|e'\|} \in S_3$, 显然 $\frac{e'}{\|e'\|} \in H$ 。由三角形不等关系 $\|e'\| = \|\sum w_i e_i\| \leq \sum \|w_i e_i\| = \sum w_i \|e_i\| = \sum w_i = 1$, 有 $\frac{1}{\|e'\|} \geq 1$ 。其次, 对于任意 $\beta \geq 1$ 有 $\beta e' \in H$, 尤其 $\beta = \frac{1}{\|e'\|}$ 。因为 $0 \notin H$, 存在向量 d , 半空间 H 可表示为 $H = \{x \in R^4: (x, d) \geq 1\}$ 。由于 $e' \in H$, 则 $(e', d) \geq 1$, 故 $(\beta e', d) \geq 1$, 即 $\beta e' \in H$ 。证毕。

推论 1 如果 e_1, \dots, e_m 在 S_{cap} 上, 则所有变换 $\min SET_\alpha(e_1, \dots, e_m)$ 也在 S_{cap} 上。

故可以直接得到球帽的结果 $S_{cap} \subseteq R^3$, 即 $(T_w(p-r_c): w \in W_n') \subseteq S_{cap}$ 。球帽 S_{cap} 的顶点为 $T_c(p-r_c)$, 中心为 0 且角度为

$$\alpha = 2\arccos(d_H), d_H = \frac{1 + \|o_E\|^2 - r_E^2}{2\|o_E\|} \quad (6)$$

这里 d_H 代表从 H 到 0 的距离, 像定理 3 中计算的一样。由于球 E 和 S_3 相交, E 不可能完全在 S_3 的内部, 即 $\|o_E\| + r_E < 1$ 为假。即 $\|o_E\| + r_E \geq 1$, 则 $-r_E^2 \leq -(1 - \|o_E\|)^2 = -1 + 2\|o_E\| - \|o_E\|^2$ 从下式得

$$d_H \leq \frac{1 + \|o_E\|^2 - 1 + 2\|o_E\| - \|o_E\|^2}{2\|o_E\|} = \frac{2\|o_E\|}{2\|o_E\|} = 1$$

由于 $d_H \geq 0$, \arccos 在式(6)中有定义且 $\alpha \in [0, \pi]$ 只有一个最小的封闭球的球帽 S_{mincap} 。由定理 5 得最小的封闭球 $S_{minclose} \subseteq R^3$, 中心为 $\cos(\alpha) T_c(p-r_c)$, 半径为 $\sin(\alpha) \|T_c(p-r_c)\| = \sin(\alpha) \|p-r_c\|$ 。

定理 5 设 $S_{cap} \subseteq R^d$ 是一个球心为 0 、半径为 r 、顶点为 t 、角为 $\alpha \in [0, \pi]$ 的球帽, 则球帽 S_{cap} 的最小封闭球 $S_{minclose}$ 的球心为 $t \cos \alpha$ 、半径为 $\|t\| \sin \alpha$ 。

证明: 首先证明球帽 S_{cap} 不能被半径小于 $\|t\| \sin \alpha$ 的球封闭。因为存在 2 个向量 $v_1, v_2 \in S_{cap}$, 长度为 $2\|t\| \sin \alpha$ 。构造这些向量, 取任意向量 v , 使 $(v, t) = 0$ 且 $\|v\| = \|t\| = r$, 则可定义 $v_1 = t \cos \alpha + v \sin \alpha, v_2 = t \cos \alpha - v \sin \alpha$, 它们的长度为 $2\|v\| \sin \alpha = 2\|t\| \sin \alpha$ 。

再证 $v_1, v_2 \in S_{cap}$ 。计算

$$\begin{aligned} \|v_1\| &= \sqrt{\|t\|^2 \cos^2 \alpha + \|v\|^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{r^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (v_1, t) &= (t \cos \alpha + v \sin \alpha, t) = (t, t) \cos \alpha + (v, t) \sin \alpha \\ &= r^2 \cos \alpha \end{aligned}$$

得 $v_1 \in S_{cap}$, 同理可证 $v_2 \in S_{cap}$ 。

再证 $S_{cap} \subseteq S$ 。任意取 $x \in S_{cap}$, 由球帽定义: $\|x\| = r$ 且 $(x, t) \geq r^2 \cos \alpha$ 。为了证明 $x \in S$, 计算:

$$\|x - t \cos \alpha\|^2 = (x - t \cos \alpha, x - t \cos \alpha) = \|x\|^2 - 2(x, t \cos \alpha) + \cos^2 \alpha \|t\|^2$$

由 $\|t\| = \|x\| = r$ 且 $-2(x, t \cos \alpha) \leq -2r^2 \cos^2 \alpha$, 得

$$\|x\|^2 - 2(x, t \cos \alpha) + \cos^2 \alpha \|t\|^2 \leq r^2 - 2r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \cos^2 \alpha$$

化简为 $r^2(1 - \cos^2 \alpha) = r^2 \sin^2 \alpha$ 。两边取平方根 $\|x - t \cos \alpha\| \leq r \sin \alpha$, 则 $x \in S$ 。证毕。

通过前面分析, 可以得到线性区域为 $\min SET_\alpha(r_1', \dots, r_m')$, 球体区域为 A 。二者的区域可以表示为 $\min SET_\alpha(r_1' \oplus A, \dots, r_m' \oplus A)$, 即最后混合球封闭区域为 $r_1' \oplus A, \dots, r_m' \oplus A$ 。这个封闭球可以通过如前所述的方法计算, 封闭球的中心是集合 $r_1' \oplus A, \dots, r_m' \oplus A$ 的平均值。假设球 S 所有的顶点 v_1, \dots, v_i 都在连接集 J 中, 否则即顶点 v_1, \dots, v_i 在更多的连接集 J_1, \dots, J_z 中, 可以对每个连接集重复同一个算法。用这一方法我们可以得到包围球 $r'_{1,1} \oplus A_1, \dots, r'_{m_1,1} \oplus A_1, r'_{1,2} \oplus A_2, \dots, r'_{m_2,2} \oplus A_2, \dots, r'_{1,z} \oplus A_z, \dots, r'_{m_z,z} \oplus A_z$ 。

3 球体混合重建算法

用 $S_{(o,r)}$ 表示一个中心为 o 、半径为 r 的球, 符号 p_i 表示 n 维向量 p_k 的第 i 个元素, 线性表 L_2 存储 e_{unitk} 。为了简化算法, 取 $S_{(o,r)}$ 中 $r=0$, 即 $S_{(e_{uniti}, 0)}$ 。

算法 基于球体混合的重建算法

输入: $S_{(o,r)}$ 为被重建的球, $List_1, List_2$ 为两个线性表, C_1, \dots, C_N 为连接变换的矩阵, J 为影响球 $S_{(o,r)}$ 的连接集合, p_1, \dots, p_m 为描述权值范围的点集, t_c 为变换中心。

输出: 重建的表面变形的球

Sphere-Construct(S)

{ 清空线性表 $List_1$;

for($i=1; i \leq m; i++$)

将变换矩阵 C_i 转换为单元四元组 e_{uniti} ;

for($j=j_1; j < j_n; j++$) /* $\forall j_i \in J = \{j_1, \dots, j_n\}$ */

{ 清空线性表 $List_2$;

for($k=1; k \leq m; k++$)

$$\{ r_k' = \sum_{i=1}^n p_{ki} C_i t_c;$$

$$e_k' = \sum_{i=1}^n p_{ki} e_i;$$

$$e_{unit} = \frac{e_k'}{\|e_k'\|};$$

将 $S_{(e_{unit}, 0)}$ 插入到线性表 $List_2$ 中;

$S_{(o_E, r_E)}$ = 建立线性表 $List_2$ 的包围球;

$$M = \frac{o_E}{\|o_E\|}$$

T_c = 将四元组 M 转换为变换矩阵;

$$\alpha = 2\arccos\left(\frac{1 + \|o_E\|^2 - r_E^2}{2\|o_E\|}\right)$$

}

for($k=1; k \leq m; k++$)

{

$$o_k = r_k' + \cos(\alpha) T_c(p - t_c);$$

$$r_k = \sin(\alpha) \|p - t_c\|;$$

将球 $S_{(o_k, r_k)}$ 插入到线性表 $List_1$ 中;

}

}

返回线性表 List₁ 中的包 + S_(0,r);

算法的最后一行在返回的包围球中增加 S_(0,r), 表示可以通过增加球的半径 r, 得到不同的球, 这样算法更具一般性。

4 实验结果

为了评测本文提出算法的精度和速度, 我们设计了 3 个实验, 与文献[13]中提出的线性混合检测算法进行了对比。

4.1 实验 1: 重建球的半径测试

为了提供一个可比较的实验模型, 在文献[13]的模型上执行测试。模型用 5677 个顶点、9016 个三角形和 33 个连接。建立模型用 7752 个顶点、14680 个三角形和 67 个连接。采用文献[16]中最小包围球的计算算法构造最小包围球树。重建球的紧密性, 如表 1 所列。表 1 给出包围球树前 10 层的最小、平均、最大半径的参考值, 采用线性混合重建的方法和球体混合重建方法的半径值及标准值。从表中可以看出, 当包围球树的层数增加时, 采用球体混合重建的方法越来越接近线性混合的方法, 也越来越接近标准值。当重建球的层数为 10 时, 重建球半径与标准值相差无几。图 2 给出了人体表面的重建过程, 上层(a)、(b)、(c)表示图像的参考数据, 中间(d)、(e)、(f)是采用线性混合重建的方法重建的结果, 可以看出在臂部的关节处出现了扭曲现象。底层(g)、(h)、(i)表示采用本文提出的球体混合重建的算法重建的结果, 没有产生扭曲现象, 更接近真实图像。图 3 给出了线性混合重建与球体混合重建包围球树球体的半径比较。

表 1 线性混合和球体混合建立模型包围球树的最小、平均、最大及标准半径的比较(mm)

Level	Reference			Linear Blending			Spherical Blending			Optimal		
	min	ave	max	min	ave	max	min	ave	max	min	ave	max
1	34.55	34.55	34.55	72.17	72.17	72.17	79.55	79.55	79.55	34.41	34.41	34.41
2	18.11	18.86	19.74	26.17	31.58	34.48	26.23	33.95	37.84	17.97	22.05	26.57
3	3.11	7.38	10.47	3.11	8.40	14.89	3.11	8.89	17.33	3.11	7.39	10.13
4	0.98	3.68	6.23	0.98	4.03	7.96	0.98	4.12	9.23	0.98	3.69	6.47
5	0.24	1.69	3.69	0.24	1.80	5.05	0.24	1.83	5.28	0.24	1.70	4.33
6	0.20	0.91	2.84	0.20	0.97	3.50	0.20	0.98	4.01	0.20	0.92	2.89
7	0.15	0.61	2.09	0.15	0.65	2.68	0.15	0.66	3.58	0.15	0.61	2.09
8	0.15	0.42	1.16	0.15	0.43	1.59	0.15	0.43	1.17	0.15	0.42	1.29
9	0.12	0.30	0.54	0.12	0.30	0.59	0.12	0.30	0.78	0.12	0.30	0.54
10	0.10	0.21	0.32	0.10	0.21	0.34	0.10	0.21	0.51	0.10	0.21	0.32

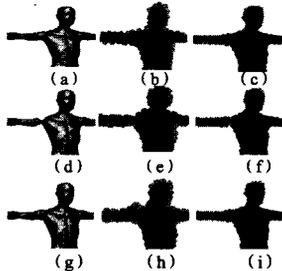


图 2 线性混合重建与球体混合重建图像的包围球比较

4.2 实验 2: 重建球的时间测试

我们在 PIV 2.4G PC 机正常工作环境下测试了重建球的碰撞检测速度, 分别采用本文提出的球体混合重建的算法和文献[13]的基于线性混合的重建算法。表 2 给出了采用两种不同混合重建球方法的时间比较, 图 4 给出了两种方法重建球所需时间的图像。实验给出了 10 组重建球的数据, 并对这 10 组数据取平均值。本文提出的算法重建每个球需要的平

均时间为 0.829 μ s, 文献[13]方法重建每一个球需要的平均时间为 0.815 μ s, 这几乎与线性混合重建球的方法得到同样满意的结果。而实际情况是本文提出的重建方法在所有这些球中只有一小部分球需要重建, 因此碰撞检测的时间还会更短。图 5 是两个卡通人的虚拟场景测试, 图中给出了应用本文提出的算法重建包围球树的第 5 层和第 6 层的情形。本文提出的重建算法在第 5 层只有 16% 的球需重建, 第 6 层只有 8% 的球需重建。从总的碰撞检测过程来看, 本文提出的基于球体混合重建的方法比线性混合重建和经典的碰撞检测方法具有更高的效率。再做一下最坏情况的测试。在这个实验中, 给出了标准的全部碰撞的时间及检测物体是否碰撞的时间及碰撞检测算法在发现第一个相交三角形对时的时间。表 3 给出了虚拟场景中采用线性混合重建的方法、本文提出的球体混合按需重建的方法及传统的自底向上的重建方法[17]的测试结果, 测试的时间单位为 ms。在表 3 的第一行, 给出测试场景中虚拟人发生碰撞的检测时间, 第二行表示虚拟场景中检测所有的碰撞三角形需要的时间, 第三行表示返回一对碰撞三角形需要的时间。从结果看出, 即使在最坏的情况下, 球体混合重建的方法所用时间也是最少的, 类似于线性混合的方法。

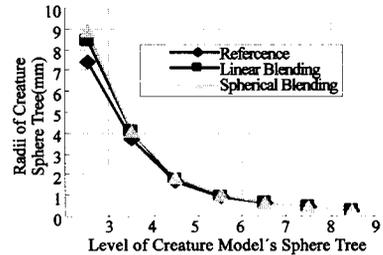


图 3 线性混合重建与球体混合重建模型球树不同层的半径比较

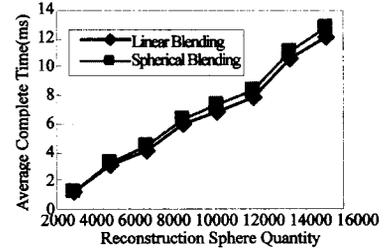


图 4 线性混合重建与球体混合重建包围球的时间比较

表 2 两种混合重建球的平均时间比较(ms)

Reconstruction sphere quantity	Linear Blinding Reconstruction	Spherical Blending Reconstruction
1536	1.236	1.262
3865	2.293	2.315
5353	4.156	4.390
7658	5.933	6.128
8911	6.908	7.155
10116	7.851	7.898
13570	10.513	10.787
15686	12.152	12.397

表 3 变化场景中的碰撞检测平均时间比较(ms)

Scenario	Linear Blinding Skinning	Spherical Blinding Skinning	Bottom-up
	Cartoon	0.21	
All Collision triangles	5.18	5.37	31.17
One Pair of triangles	0.62	0.67	25.35



图5 虚拟场景中不同层次包围球树的重建情况

4.3 实验3:复杂碰撞情形的测试

在碰撞检测过程中,如何处理虚拟场景中物体的穿透问题,怎样完成穿透图像的重建,一直是研究的热点。本文提出的算法同样适合复杂的碰撞检测过程。图6给出了存在碰撞的穿透响应过程,第2和第3列分别给出了包围球树的第5层和第7层的重建过程。从图6可以看出,对于复杂的碰撞过程,本文提出的算法也是适用的。



图6 虚拟场景中复杂情况的处理

结束语 本文提出了一个基于球体混合变形模型的碰撞检测算法,对于所有的变形模型,不需要考虑物体表面的变形情况便可以快速而精确地完成碰撞检测。实验证明,球体混合重建算法要求上限是很低的,这个算法健壮性及与其它算法的兼容性也很好。它可以通过球体混合重建和减小变形的办法在两个物体间发现碰撞。本文提出的关键技术是在单元四元组球上采用变换包围盒的方法实现碰撞检测,在需要重建的包围球上重建数据结构。算法的唯一限制是要求顶点数目的复杂性是线性的(对于相关顶点的数目,实际上它只要求于线性复杂性就可以了)。在未来的研究中,将考虑在线性复杂性的条件下,将这种混合技术应用在其它的几何模型中实现碰撞检测。

参考文献

[1] Hoff K,Zaferakis A,Manocha D. Fast and simple 2D geometric proximity queries using graphics hardware[C]//Int'l Conf. Interactive 3D Graphics. Berlin ACM Press,2001:145-148
 [2] 范昭炜,万华根,高曙明. 基于流的实时碰撞检测算法[J]. 软件学报,2004,15(10):1505-1514

[3] Zhao Wei,He Yanshuang,Li Wenhui. Research on Parallel Collision Detection Algorithm Based on Pipelining and Divide-and-Conquer[C]//Int'l Conf. Intelligence Computation and Application. Wuhan,China University of Geosciences Press,2007:277-282
 [4] 赵伟,何艳爽. 一种快速的基于并行的碰撞检测算法[J]. 吉林大学学报:工学版,2008,38(1):152-157
 [5] 魏迎梅,吴泉源,石教英. 碰撞检测中的固定方向凸包围盒的研究. 软件学报,2001,12(7):1056-1063
 [6] Brown J,Sorkin S,Latombe J. Real-time simulation of deformable objects[J]. Computer Animation,2001,10(6):228-236
 [7] Redon S,Kim Y,Lin M C,et al. Interactive and continuous collision detection for avatars in virtual environments[C]//Proc. of the 3th IEEE Int'l Conf on Virtual Reality. Cambridge: IEEE Computer Society Press,2004:117-124
 [8] Larsson T,Moller T A. Efficient collision detection for models deformed by morphing[J]. The Visual Computer, 2003,19(2/3):164-174
 [9] Klugt T, Alexa M. Bounding volumes for linearly interpolated shapes[C]//Proc. of the 22nd Int'l Conf on Computer Graphics. Crete, Greece: IEEE Computer Society Press,2004:134-139
 [10] Mohr A,Gleicher M. Building efficient, accurate character skins from examples [J]. ACM Transaction on Graph (SIGGRAPH2003),2003,22(3):562-568
 [11] Heim O,Marshall C S,Lake A. Fast collision detection for 3D bones-based articulated characters [J]. Game Programming Gems 4,2004(4):503-514
 [12] Hejl J. Hardware skinning with quaternions[J]. Game Programming Gems 4,2004(4):487-495
 [13] Kavan L,Zara J. Fast collision detection for skeletally deformable models[J]. Computer Graphics Forum,2005,24(3):363-372
 [14] Eberly D. A practical approach to real-time computer graphics [J]. 3D Game Engine Design,2001(9):25-29
 [15] Kavan L,Zara J. Spherical blend skinning: A real-time deformation of articulated models[C]//ACM SIGGRAPH Symposium on Interactive 3D Graphics and Games. ACM Press,2005:9-16
 [16] Gaertner B. Fast and robust smallest enclosing balls[C]//Proc. of the 7th Annual European Symposium on Algorithms. Prague: Springer Verlag Press,1999:325-338
 [17] Brown J,Sorkin S,Bruyns C,et al. Real-time simulation of deformable objects: tools and application [C]//Proc. of the 14th Int'l conf on Computer Animation. Seoul, South Korea: IEEE Computer Society Press,2001:228-258

(上接第127页)

[5] Miao Huaikou, Chen Shengbo, Liu Huanzhou, et al. An Approach to Generating Test Cases for Testing Component-based Web Applications[C]//IITA 2007. IEEE Computer Society, 2007:264-269
 [6] 刘焕洲,缪淮扣. Web应用程序建模和测试用例生成方法[J]. 计算机工程,2008,34(6):60-62

[7] Kung DC, Liu Chien-hung, Hsia P. An Object-oriented Web Test Model for Testing Web Applications[C]//First Asia-Pacific Conference on Quality Software. New York, USA, Oct. 2000: 111-120
 [8] Liu Chien-hung, Kung D C, Hsia P. Object-based Data Flow Testing of Web Applications[C]//First Asia-Pacific Conference on Quality Software. New York, USA, Oct. 2000:30-31