双域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法*)

黄 涛 周启海

(西南财经大学经济信息工程学院 成都 610074)

摘 要 本文依据同构化凸壳构造基本定理,提出了效率更高的双域单向水平倾角最小化圈绕二维点集凸壳新算法,实现了对卷包裹凸壳算法、单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳算法的改进与创新。本新算法的同构化特点是:1)"初始顶点与双域生成"处理:找出给定二维点集 S 的最低点和最高点,即 Y 轴坐标值最小点(若有多个最小点,则只取最左的最小点)和 Y 轴坐标值最大点(若有多个最大点,则只取最右的最大点),作为凸壳逆时针圈绕的初始顶点;并以这两个初始顶点为端点的线段,把原二维点集划分为两个独立的子点集 $S_{右}$、$S_{左}$。2)进行单向"圈绕寻找下一新顶点":A)在 $S_{右}$ 内,过逆向次新顶点作 X 轴正向射线,并找出当前子点集内对该逆向次新顶点正向射线(为始边的)倾角最小的点,此最小点即为 $S_{右}$ 逆向最新顶点;B)在 $S_{左}$ 内,过次新顶点作 X 轴负向射线,并找出当前子点集内对该逆向次新顶点负向射线(为终边的)倾角最小的点,此最小点即为 $S_{左}$ 逆向最新顶点。3)删除对已得各顶点所构成的子凸壳各内点。4)仅当所剩当前点集非空时才从"2)"继续作逐边双域单向圈绕。

关键词 同构化,凸壳算法,顶点射线,水平倾角,双域单向圈绕

A New Algorithm for Finding Convex Hull Based on Coiling with a Minimum Lever Pitch in Double Domains and Single Direction

HUANG Tao ZHOU Qi-Hai

(School of Economic Information Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 610074)

Abstract According to the isomorphic fundamental theorem of the convex hull construction, a more efficient new algorithm to find a convex hull based on coiling with a minimum lever pitch in double domain and single direction is advanced. It has realized the improvement of the Gift Wrapping convex hull algorithm and Coiling with a Minimum Lever Pitch in Single Domain and Single Direction Convex Hull Algorithm. This new algorithm isomorphism characteristic is: 1)"the generation of initial vertex and double domain": find out the bottommost point and the highest point on the convex hull S as the initial vertex of the convex hull, which has the minimum or the maximum coordinate value of the Y axis among all the points in given 2D point set (if the bottommost point is not only one, the bottommost and leftmost or the highest rightmost point should be selected). The line which take the two initial vertexes as end points divide the 2D point set into two absolute point set S_{right} S_{left}. 2) in the 2D point set S_{left} do the process of seeking the newest apex with single direction: A. in S_{right}, passing the last new regressive vertex, make the vertex's half line paralleled by X axis along positive direction, and find out the current vertexes with a minimum pitch to its vertex's regressive half line(as the initial line) to be the newest vertex in coiling; B. A. in S_{left}, passing the last new regressive vertex, make the vertex's half line paralleled by X axis along negative direction, and find out the current vertexes with a minimum pitch to its vertex's regressive half line(as the final line) to be the newest vertex in coiling; 3) Deletes the sub-convex hull's inner points. And loop from"2)"to coil with double direction side by side continuingly while the reminded point set is not empty.

Keywords Isomorphic, Convex hull algorithm, Vertex's half line, Pitch of base lines, Double domain and single direction coiling

1 引言

20 世纪提出的凸壳问题,其算法研究始于 70 年代、盛于 80 年代、极于 90 年代。凸壳,在"计算图形、图像处理、模式识别、指纹识别、地物辨识、地质勘探、网点布局、环境监测、信息加密、……"中,均有广泛而重要的学术意义与应用价值。近 40 年来,为了改进和提高二维点集或线段集凸壳(以下简称凸壳)算法及其效率,各国学者做了许多工作[1~19]。然而,进入 21 世纪以来,传统的凸壳算法研究出现了停滞不前的尴尬窘况。作者基于同构化凸壳构造基本定理,于文[1,2]提出并实现单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳算法,已对卷包裹凸壳算法做了重要改进。为了进一步改进卷包裹凸壳算法、单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳算法,本文提出了效率更高的双域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法。

2 凸壳问题与凸壳算法

定义 1 设多边形 Q 的顶点是给定平面内的点 $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2), \cdots, Q_n(x_n, y_n)$。若线段 Q_iQ_j $(i\neq j, 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n, 3\leqslant n<+\infty)$ 总在多边形 Q 内,则称 Q 为凸多边形。

定义 2 设 $S=\{P_i(x_i, y_i) \mid 1\leqslant i\leqslant m, 3\leqslant m<+\infty\}$ 是给定平面内的二维点集;Q 是可覆盖 S 中所有点的凸多边形,Q 的顶点 $Q_i\in\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_n\}\subseteq S, 3\leqslant n\leqslant m$;$Q'$ 是非 Q 的任一可覆盖 S 中所有点的凸多边形。若恒有 $Q\subseteq Q'$,则称 Q 是可覆盖 S 中所有点的最小凸多边形。

*)基金项目:西南财经大学科研基金项目(No. 06K75)。**黄 涛** 讲师,主要研究方向:计算机应用;**周启海** 教授,博士生导师,主要研究方向:计算几何、算法研究与实现、财经计算、同构化信息处理等。

定义 3 设二维点集 $S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m,3\leqslant m<+\infty\}$ 由给定平面内的点构成。若 Q 是可覆盖 S 中各点的最小凸多边形，则称 Q 为二维点集 S 的凸壳，而点集 S 中各点的位置分布区域称为凸壳 Q 的顶点分布域（简称分布域）。

定义 4 如何寻求给定二维点集 $S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m,3\leqslant m<+\infty\}$ 的凸壳，称为凸壳问题。

通俗讲，凸壳问题的几何原型，可简单而形象地说明，如图 1 所示。设 $1\leqslant k\leqslant m,3\leqslant m<+\infty$，对木版上的有限点集 S 中各点 $P_k(x_k,y_k)$ 处，分别各钉一个图钉，再用一条橡皮带从该点集的外沿去围绕一圈这些图钉。显然有：首先，被缠紧的橡皮带圈必定构成一个凸多边形 Q；其次，所有图钉总不会出现在该橡皮带圈（即所得凸多边形 Q）所围成的区域之外。

A) 木版上各点处各钉一个图钉：二维点集 S； B) 外围缠绕各图钉所得橡皮带圈：凸壳 Q

图 1 凸壳问题几何原型的形象说明示意图

定义 5 凡能构造性生成给定二维有限点集 $S=\{P_k(x_k,y_k)\mid 1\leqslant k\leqslant m,3\leqslant m<+\infty\}$ 的凸壳的算法，统称凸壳生成算法。

3 卷包裹凸壳算法简介

1970 年 D. Chand 和 S. Kapur 提出的卷包裹凸壳算法[17]是较有代表性的最早凸壳算法。其算法思想可概括为（如图 2 所示）：

首先过 Y 坐标最小的点 Q_1 画一水平直线 L，显然该点是凸壳的一个顶点，然后 L 绕 Q_1 按逆时针方向旋转，碰到 S 中的第二个点 Q_2 时，直线 L 改绕 Q_2 逆时针方向旋转而在 Q_1 与 Q_2 之间留下一线段，该线段为凸壳的一条边。继续旋转下去，最后直线 L 旋转 360°回到 Q_1，便得到所要求的凸壳。

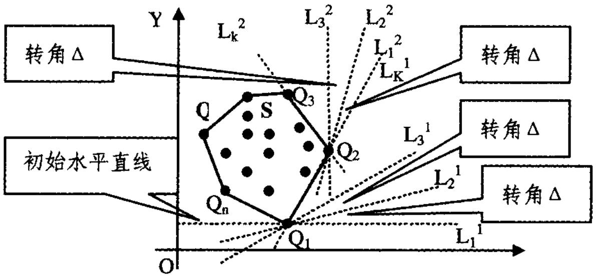

图 2 卷包裹凸壳算法示意图

应当指出：作者的同构化凸壳算法深度挖掘与创新研究表明——卷包裹凸壳算法，尽管它存在不少缺点，但它的宝贵潜质与基本活力就在于它较真实地反映了凸壳的自然态同构化圈绕特点[1]，而这或许将给人以终究会大幅甚至根本改进凸壳算法的启迪。事实上，只要能对卷包裹凸壳算法施行“用足其缠绕潜能，克服其近似缺点，消除其低效弱点”的同构化改进与创新，就一定会创造出性能更佳的凸壳新算法（例如：单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳算法、单域双向水平倾角最小化圈绕凸壳算法）。

4 单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳算法简介

作者依据同构化凸壳构造基本定理所提出的单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳算法[1,2]（以下简称单向圈绕凸壳算法），实现了对卷包裹凸壳算法的改进和创新。其算法思想可概括为（如图 3 所示）：

①找出给定二维点集的最低点，即 Y 轴座标值最小点（若有多个最小点，则只取最左的最小点），并作为凸壳初始顶点（即最低顶点）；

② 过最近新顶点，作平行 X 轴正方向的同向顶点射线，并找出当前点集内对该顶点射线倾角最小的点，以作为逐边圈绕的最新顶点；

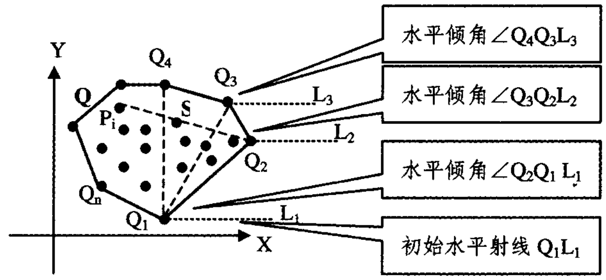

图 3 单向圈绕凸壳算法示意图

③在当前点集分布域中，删除由初始顶点、次新顶点、最新顶点构成三角形所覆盖的全部点，并当所剩当前点集非空时，才从“②”继续作逐边圈绕。

单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳算法，改善了卷包裹凸壳算法效能，但它仍需消除其“凸壳内点删除速度不够快”的弱点。

5 双域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法

双域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法（以下简称双域单向圈绕凸壳算法），就是对单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳算法[1]的进一步改进和创新。

5.1 单向圈绕凸壳算法的理论基础

本双域单向圈绕凸壳算法的理论基础，是同构化凸壳构造基本定理。

同构化凸壳构造基本定理 记二维点集 $S=\{P_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m,3\leqslant m<+\infty\}$，凸多边形 Q 的顶点集为 $R=\{Q_1(x_1,y_1),Q_2(x_2,y_2),\cdots,Q_n(x_n,y_n)\}=\{Q_i(x_i,y_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n\leqslant m<+\infty,3\leqslant n,3\leqslant m\}$。如果凸多边形 Q 是二维点集 S 的凸壳，则有：

(1)（顶点对内点的）凸壳内点无关性定理：凸壳 Q 的所有顶点 $Q_i(x_i,y_i)$ 必不在 S 与 R 的余集中，即 $Q_i(x_i,y_i)\notin S-R,1\leqslant i\leqslant n\leqslant m<+\infty,3\leqslant n,3\leqslant m$。

(2)（顶点对顶点的）凸壳顶点独立性定理：凸壳 Q 的任一顶点 $Q_k(x_k,y_k)$ 必不在 R 与 $\{Q_k\}$ 的余集中，即 $Q_k(x_k,y_k)\notin R-\{Q_k(x_k,y_k)\},1\leqslant k\leqslant n\leqslant m<+\infty,3\leqslant n,3\leqslant m$。

其数学证明，详见文[1]。

基于同构化凸壳构造基本定理，作者认为凸壳生成算法

改进与优化的同构化方向应当是：第一、根据凸壳内点无关性定理，应一方面使凸壳顶点分布域极小化，即让包含凸壳顶点的判定区域尽可能小，以大大减少凸壳顶点判定时的无效处理量；另一方面使顶点判定对象直接化，即让所判定对象尽可能接近当前所寻顶点，以大幅提高凸壳顶点判定对象的直接针对性。第二、根据凸壳顶点独立性定理，一方面可从不同初始对象出发，来改进和优化串行凸壳新算法；另一方面可对不同视角对象处理，来改造和创造并行凸壳新算法。因此，在生成凸壳过程中，应尽力缩小顶点的可能分布域——在尽可能小的分布域内，尽可能快地直接找出并只找出其各个顶点（即凸壳各条边的各端点）的凸壳新算法；进而，再对有并行潜力的优秀串行凸壳新算法施以并行化改造与创新。无疑，这必定是今后进一步改进和提高凸壳算法效率的主要捷径。

5.2 双域单向圈绕凸壳算法的基本定义与算法构造

定义6 二维点集 $S=\{P_k(x_k,y_k)\mid 1\leqslant k\leqslant m, 3\leqslant m<+\infty\}$ 中：

(1) Y 轴座标值最小点 $P_1(x_1, y_1=\min\{y_k\mid 1\leqslant k\leqslant m, 3\leqslant m<+\infty\})$ 称为二维点集 S 的凸壳的最低点；Y 轴座标值最大点 $Q_1(x_1, y_1=\max\{y_k\mid 1\leqslant k\leqslant m, 3\leqslant m<+\infty\})$，称为二维点集 S 的凸壳 Q 的最高点。连接 P_1 点和 Q_1 点，线段 P_1Q_1 将 S 分为左、右两个区域 $S_{左}$ $S_{右}$（$S_{左}$ $S_{右}$ 的划分方法：若 P_1 和 Q_1 的 x 值同，则 $S_{左}=\{P_k(x_k,y_k)\mid x_k>x\}$；$S_{右}=\{P_k(x_k,y_k)\mid x_k<=x\}$；否则：对以 P_1 为端点且平行于 X 轴正方向的射线 $L_{正j}$ 为始边，从 Q_1 到二维点集 S 中任一点 P_k 的射线为终边所形成的夹角 $\angle P_kP_1L_{正j}$ 取正切函数，凡大于 $tg(\angle Q1P_1L_{正j}))$ 的点位于右域，否则为左域。P_1 为右域凸壳逆向（即逆时针）圈绕的初始顶点，Q_1 为左域逆向（即逆时针）圈绕的初始顶点。

(2) 在右域以凸壳 Q 任一逆向顶点 $Q_{逆j}$（$1\leqslant j\leqslant n\leqslant m<+\infty, 3\leqslant n, 3\leqslant m$）为端点且平行于 X 轴正方向的射线 $Q_{逆j}L_{正j}$，称为逆向顶点 $Q_{逆j}$ 的正向水平线。以"逆向顶点 $Q_{逆j}$ 的正向水平线 $L_{正j}$ 为始边，而从 $Q_{逆j}$ 到二维点集 S 中任一点 P_k 的射线为终边"的夹角 $\angle P_kQ_{逆j}L_{正j}$（$0\leqslant\angle P_kQ_{逆j}L_{正j}\leqslant 2\pi$），称为点 P_k 对逆向顶点 $Q_{逆j}$ 的逆向水平倾角。

(3) 在左域对凸壳 Q 任一逆向顶点 Q_i（$1\leqslant i\leqslant n\leqslant m<+\infty, 3\leqslant n, 3\leqslant m$）为端点且平行于 X 轴负方向的射线 $Q_iL_{负i}$，称为逆向顶点 $Q_{顺i}$ 的负向水平线。以"逆向顶点 Q_i 的负向水平线 $L_{负i}$ 为终边，从 $Q_{顺i}$ 到二维点集 S 中任一点 P_k 的射线为始边"的夹角 $\angle P_kQ_iL_{负i}$（$0\leqslant\angle P_kQ_iL_{负i}\leqslant 2\pi$），称为点 P_k 对逆向顶点 Q_i 的逆向水平倾角。

其示例，如图3所示。

据此，本文提出了双域单向圈绕凸壳新算法，并可描述如下：

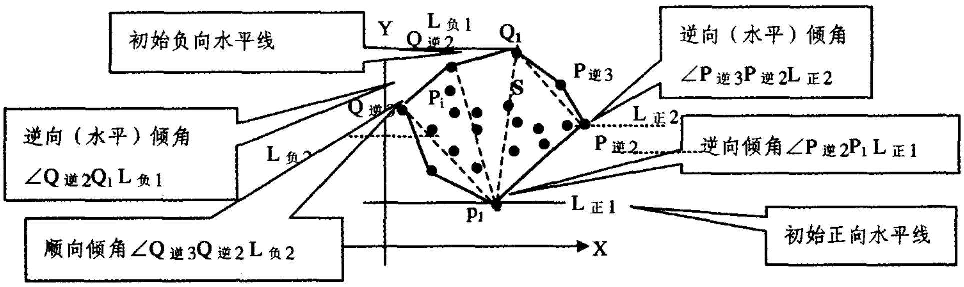

图3 双域单向圈绕凸壳算法示意图

第0步："初始顶点生成"处理。在分布域 S 的右域 $S_{右}$ 中，找出 Y 轴座标值最小的一个初始极点（即最低点，若有多个最小点，则只取最左的最小点）P_1，并作为凸壳最低顶点 Q_1，同时，使凸壳当前"逆向顶点组"的初始组序号 i，取其初值1。

第1步：当分布域 $S_{右}$ 非空时，作逆向圈绕寻找凸壳当前最新顶点（即凸壳的下一组逆向最新顶点，而该组最新顶点具有特性——"初始组必为一个，最后组方可一个，其余组总为一对"）处理。

(1) 右域逆向圈绕寻找当前最小逆向水平倾角点（即凸壳当前逆向最新顶点）处理。

①"构造当前逆向次新顶点的正向水平射线"处理：过凸壳当前逆向次新顶点 $P_{逆i}$，作 $P_{逆i}$ 的平行 X 轴正方向的正向水平射线 $P_{逆i}L_{正i}$。

②在分布域 $S_{右}$ 中，逆向圈绕地找出对当前逆向次新顶点 $P_{逆i}$ 的正向水平射线 $P_{逆i}L_{正i}$（作始边）的水平倾角最小点 $P_{逆j}$，使它满足 $\angle P_{逆j}\ P_{逆i}L_{正i}=\min\{\angle P_kQ_{逆i}L_{正i}\mid P_k\in S\}$）。（注：若有多个逆向水平倾角最小点，则只取最后一个最小逆向水平倾角点，即离当前次新逆向顶点 $P_{逆i}$ 最远的那个最小逆向水平倾角点 $P_{逆j}$）；

③把当前所得逆向水平倾角最小点 $P_{逆j}$，按逆向生成顺序，依次保存、标记为凸壳逆向最新顶点 P_a（满足：$1<a\leqslant[n/2]+1$；若最后一组最新顶点为不同顶点时，则 $\max\{a\}+\max\{b\}-1=n$，否则 $\max\{a\}+\max\{b\}-2=n$）。

(2) 左域 $S_{左}$ 逆向圈绕寻找当前最小逆向水平倾角点处理。

①"构造当前逆向次新顶点的负向水平射线"处理：过凸壳当前逆向次新顶点$_{逆i}$，作 $Q_{逆i}$ 的平行 X 轴负方向的正向水平射线 $Q_{逆i}L_{负i}$。

②在分布域 $S_{左}$ 中，逆向圈绕地找出对当前逆向次新顶点 $Q_{逆i}$ 的正向水平射线 $Q_{逆i}L_{正i}$（作始边）的水平倾角最小点 $Q_{逆j}$，使它满足 $\angle Q_{逆j}\ Q_{逆i}L_{正i}=\min\{\angle_kQ_{逆i}L_{正i}\mid Q_k\in S\}$）。（注：若有多个逆向水平倾角最小点，则只取最后一个最小逆向水平倾角点，即离当前次新逆向顶点 $Q_{逆i}$ 最远的那个最小逆向水平倾角点 $Q_{逆j}$）；

③把当前所得逆向水平倾角最小点 $Q_{逆j}$，按逆向生成顺序，依次保存、标记为凸壳逆向最新顶点 Q_a（满足：$1<a\leqslant[n/2]+1$；若最后一组最新顶点为不同顶点时，则 $\max\{a\}+\max\{b\}-1=n$，否则 $\max\{a\}+\max\{b\}-2=n$）。

第2步："分布域极小化处理"（即当对前已得各顶点所构成的当前子凸壳内点删除）：

如果在对应左域、右域所找到的当前逆向左域最新顶点 Q_a、右域最新顶点 Q_b 是不同顶点——

则：①在当前分布域 $S_{左}$ 中，删除与初始顶点 Q_1 位于"由

当前左域逆向最新顶点 Q_a 和初始顶点 P_1 所构成直线”同一侧的全部点；并把所剩分布域仍记为 $S_{左}$。在当前分布域 $S_{右}$ 中，删除与初始顶点 P_1 位于“由当前右域逆向最新顶点 P_a 和初始顶点 Q_1 所构成直线”同一侧的全部点；并把所剩分布域仍记为 $S_{右}$。②回到第 1 步，继续作双域单向圈绕寻找。

否则(即当前左域逆向最新顶点 Q_a 为 P_1、右域逆向最新顶点 Q_b 为 Q_1)：表明此时所求凸壳的各顶点均已找出，故无需再作当前子凸壳内点删除处理，并中止其逐边圈绕。

第 3 步：最后，按照逆向顺序把所得各顶点，依次两两连接而得到的凸多边形 Q，必定是所求二维有限点集 S 的凸壳 Q。

不难看出：本凸壳新算法，经极小化处理后的新分布域 S 中，其无效内点个数通常都会快速减少(而全然不同于卷包裹凸壳算法的“无效内点总数，永远固定不变”，也大不同于单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳算法的“无效内点删除，相对速度不快”)，故它进一步提高了凸壳 Q 生成速度。

5.3 双域单向圈绕凸壳算法技术关键与核心基础的数学证明

显然，“当前域最小逆向水平倾角点(即凸壳当前域逆向最新顶点)处理”、“左、右分布域极小化处理”，是双域单向圈绕凸壳算法的技术关键与核心基础。它可归结为下列三个重要命题：

命题 1 凸壳 Q 的顶点，与“分布域极小化处理”无关。

命题 2 右域当前逆向次新顶点的逆向水平倾角最小点 P_j，必定是初始二维有限点集 $S_{右}$ 的凸壳 Q 的下一所求逆向新顶点。

命题 3 左域当前逆向次新顶点的逆向水平倾角最小点 P'_j，必定是初始二维有限点集 $S_{左}$ 的凸壳 Q 的下一所求逆向新顶点。

现给出其数学证明如下。

(1)命题 2 可直接证明：分布域 S 的极小化处理中，所删除的仅为且均为凸壳 Q(含其各子凸壳)的内点及已求得的各顶点。故根据文[1]所证明的凸壳内点无关性定理与顶点独立性定理，可知凸壳 Q 的尚未求得的各顶点必仍在极小化处理后的新分布域 S 中。因此，命题 1 成立。

(2)命题 2 可用数学归纳法证明(如图 3 所示)。

当 $i=1$ 时：由定义 5 可知，初始顶点 $Q_{逆1}$ 是凸壳 Q 的最低点，故分布域 S 中各点必在顶点 $Q_{逆1}$ 的水平射线 $Q_{逆1}L_{逆1}$ 之上。由于用单向圈绕算法所求得的点 $P_{逆j}$ 是初始顶点(即初始逆向次新顶点)$Q_{逆1}$ 的逆向水平倾角最小点，故满足“对分布域 S 中所有点 $P_{逆i}$(即其余顶点和其它内点)，必有 $\angle P_{逆i}Q_{逆1}L_{逆1} \geqslant \angle P_{逆j}Q_{逆1}L_{逆1}$”。并且，可用反证法证明“$Q_{逆1}$ 的逆向水平倾角最小点 P_j 是凸壳 Q 的第 2 个逆向顶点 $Q_{逆2}$”如后：假设此时的点 $P_{逆j}$ 不是逆向第 2 个顶点 $Q_{逆2}$，则点 $P_{逆j}$ 只能“是凸壳 Q 的逆向第 1 条边 $Q_{逆1}Q_{逆2}$ 上的内点，但这与算法构造的‘点 $P_{逆j}$ 是离初始逆向顶点 $Q_{逆1}$ 的逆向水平倾角最小点中最远点——远端点’相矛盾)”；或者“是逆向第 1 条边 $Q_{逆1}Q_{逆2}$ 外的内点，但这将使 $\angle Q_{逆2}Q_{逆1}L_{逆1} < \angle P_{逆j}Q_{逆1}L_{逆1}$，而与‘$P_{逆j}$ 是初始顶点 $Q_{逆1}$ 的逆向水平倾角最小点’相矛盾”。所以，$Q_{逆1}$ 的逆向水平倾角最小点 $P_{逆j}$ 必定是凸壳 Q 的第 2 个逆向顶点 $Q_{逆2}$，即此时命题 2 成立。

假设 $1<i=k\leqslant[n/2]$ 时(其中 n 为凸壳 Q 的顶点个数)，命题 2 成立(即逆向水平倾角最小点 $P_{逆k+1}$ 是凸壳 Q 的第 $k+1$ 个逆向顶点 $Q_{逆k+1}$)。

当 $i=k+1\leqslant[n/2]+1$ 时：首先，根据假设 $i=k$ 时命题 2 成立，故点 $Q_{逆k+1}$ 是凸壳 Q 的第 $k+1$ 个逆向顶点。其次，根据命题 1，除已求得的第 1、2、…、k、$k+1$ 个逆向顶点 $Q_{逆1}$、$Q_{逆2}$、…、$Q_{逆k}$、$Q_{逆k+1}$ 外的所有点 $P_{逆i}$(即其余待定逆向顶点和其它内点)，必定都在经极小化处理后的当前分布域 S 中。其三，由于用单向圈绕凸壳算法所求得的点 $P_{逆j}$ 是第 $k+1$ 个逆向顶点 $Q_{逆k+1}$ 的逆向水平倾角最小点，故满足“对当前分布域 S 中所有点 $P_{逆i}$，必有 $\angle P_{逆i}Q_{逆k+1}L_{逆k+1} \geqslant \angle P_{逆j}Q_{逆k+1}L_{逆k+1}$”。假设此时的逆向水平倾角最小点 $P_{逆j}$ 不是第 $k+2$ 个逆向顶点 $Q_{逆k+2}$，则点 $P_{逆j}$ 只能“是凸壳 Q 的逆向第 $k+1$ 条边 $Q_{逆k+1}Q_{逆k+2}$ 上的内点，但这与‘$P_{逆j}$ 是第 $k+1$ 个顶点 $Q_{逆k+1}$ 水平倾角最小点中最远点——远端点’相矛盾”，或者“是第 $k+1$ 条边 $Q_{逆k+1}Q_{逆k+2}$ 外的内点，但这将使 $\angle Q_{逆k+2}Q_{逆k+1}L_{逆k+1} < \angle P_{逆j}Q_{逆k+1}L_{逆k+1}$，而与‘$P_{逆j}$ 是第 $k+1$ 个顶点 $Q_{逆k+1}$ 的水平倾角最小点’相矛盾”。所以，此时命题 2 也成立。

因此，命题 2 成立。

(3)与命题 2 证明同理，也不难用数学归纳法证明命题 3，故可从略。

结论 本文提出的双域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法，实现了凸壳顶点生成的小分布域化。本算法不仅克服了卷包裹凸壳算法的近似与低效等缺点，也克服了单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳算法的“内点删除速度不够快”等弱点，从而使其时间、空间复杂度与效率均优于这两者；而且，颇易于改造为并行化算法。因此，它将有效提高二维凸壳生成速度，可进一步改进和提高二维凸壳在图像处理、文字分解、模式识别、物体分类、计算图形、指纹识别、遥测遥控、地物辨识、地质勘探、空天利用、信息加密等的应用水平和工作效率。

参 考 文 献

1 周启海，杨祥茂，吴红玉. 单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]. 西华大学学报(自科版)，2006(2)
2 周启海，黄涛，杨祥茂. 基于链表的单域单向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法的计算机实现[M]. 见：程序设计语言及其教学探索，北京：清华大学出版社，2006. 196～199
3 陈国良. 并行计算 结构·算法·编程[M]. 高等教育出版社，2002
4 周培德. 计算几何 算法分析与设计[M]. 清华大学出版社，2000
5 周启海，吴红玉，黄涛. 单域双向水平倾角最小化圈绕凸壳新算法[J]. 计算机科学，2007(8)
6 Sunday D. The Convex Hull of a 2D Point Set or Polygon. http://softsurfer.com/Archive/algorithm_0109/ algorithm_0109.htm
7 Rourke J O. Computational Geometry in C. 2nd Edition, Chap 3 “Convex Hulls in 2D”[M], 1998
8 Barber C, Dobkin D, Huhdanpaa H. The Quick hull algorithm for convex hulls [J]. ACM Trans on Mathematical Software, 1997, 22:469～483
9 Kirkpatrick D G, Seidel R. The Ultimate Planar Convex Hull Algorithm? SIAM Jour Computer, 1986, 15:287～299
10 Preparata F, Shamos M. Computational Geometry: An Introuction. 1985
11 Kallay M. The Complexity of Incremental Convex Hull Algorithms in Rd [J]. Info. Proc. Letters, 1984, 19: 197
12 Andrew A M. Another Efficient Algorithm for Convex Hulls in Two Dimensions [J]. Info Proc Letters, 1979, 9:216～219
13 Akl S G, Toussaint G. Efficient Convex Hull Algorithms for Pattern Recognition Applications [A]. In: Proc. 4th Int' l Joint Conf. on Pattern Recognition. Kyoto, Japan, 1978. 483～487
14 Bykat A, Convex Hull of a Finite Set of Points in Two Dimensions [J]. Info. Proc. Letters, 1978, 7:296～298
15 Preparata F, Hong S J. Convex Hulls of Finite Sets of Points in Two and Three Dimensions [J]. Comm ACM, 1977, 20:87～93
16 Eddy W. A New Convex Hull Algorithm for Planar Sets [J]. ACM Trans Math Software, 1977, 3(4):398～403
17 Jarvis R A. On the Identification of the Convex Hull of of a Finite Set of Points in the Plane [J]. Info. Proc. Letters, 1973, 2:18～21
18 Graham R. An Efficient Algorithm for Determining the Convex Hull of a Finite Point Set [J]. Info. Proc. Letters, 1972, 1:132～133
19 Chand D, Kapur S. An algorithm for convex polytope [J]. ACM, 1970, 17:78～86