

基于 ARNOLDI 过程的参数估计^{*}

解 凯

(北京印刷学院信息与机电工程学院 北京 102600)

摘 要 本文提出在超分辨率复原中使用基于 Arnoldi 过程来高效计算正则化参数的方法。通过 Arnoldi 过程分解,该方法将大型稀疏系统矩阵投影到 Krylov 子空间上并表达成一个小型稠密的 Hessenberg 矩阵。给出了利用 Hessenberg 矩阵简化超分辨率复原中解计算的公式。推导了快速计算 L 曲线的定理。该方法可减少正则化参数的计算代价。

关键词 Arnoldi 过程,正则化参数,超分辨率图像

Arnoldi Process-based Parameter Estimation

XIE Kai

(College of Information & Mechanical Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600)

Abstract The paper proposes an efficient method based on the Arnoldi process for the estimation of L-curve in super-resolution image restorations. Through the Arnoldi process the method can generate orthogonal bases for the Krylov subspaces and small and condensed Hessenberg matrices which are matrix representations of the orthogonal projections of the large and sparse system matrix in super image restoration onto the Krylov subspaces. The paper presents the simple solution in super image restoration by the Hessenberg matrix and formulates the theorem for quickly computing L-curve. The method can reduce the computational complexity of the regular parameters.

Keywords Arnoldi process, Regular parameter, Super-resolution image

1 引言

超分辨率图像复原就是用一组低质量、低分辨率图像来产生高质量、高分率图像。早期的工作是由 Tsai 和 Huang^[1] 及许多研究者主要从工程角度把超分辨率问题看作重建和识别问题。超分辨率复原问题是一个大型稀疏线性方程组求解问题,因此常用的方程组求解方法并不适用,需要使用正则化法求近似解,即需要用 L-曲线来确定正则化参数^[2],但该方法计算代价昂贵。Molina^[3] 提出频率域多通道信号处理通用框架,来处理高分辨率问题中的参数估计问题。他们使用最大似然概率来估计参数,但该方法并不是高效率的。本文提出使用 Arnoldi 过程来快速计算 L-曲线。

2 问题描述

假设大小为 $N=L_1N_1 \times L_2N_2$ 的超分辨率图像,它以字典排列方式形成向量 $x=[x_1, x_2, \dots, x_N]$, x 是理想的图像。令 L_1 和 L_2 表示水平和垂直方向的整数制内插因子,低分辨率图像大小为 $M=N_1 \times N_2$ 。令第 k 帧图像 $y_k=[y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,M}]$, 其中 $k=[1, 2, \dots, p]$ 。假设低分辨率图像被施加叠加性噪声,有如下观测模型^[4]:

$$y_k = DB_k M_k x + n_k, 1 \leq k \leq p \quad (1)$$

$$y_k = W_k x + n_k \quad (2)$$

M_k 是 $L_1N_1L_2N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ 变形矩阵,这个矩阵涉及运动场矢量和插值等内容。 B_k 表示 $L_1N_1L_2N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ 模糊矩阵, D 是 $N_1N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ 亚采样矩阵。 n_k 表示按字典顺序排列的噪声向量。不失一般性,我们将模型表达为

(2)式。 W_k 是大小为 $N_1N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ 的系统矩阵。将所有帧排列成一个向量,得到

$$Y = Wx + n \quad (3)$$

其中 Y 为 p 幅图像叠加在一起的 $pN_1N_2 \times 1$ 向量 $[y_1^T, y_2^T, \dots, y_p^T]^T$; n 为 $pN_1N_2 \times 1$ 噪声向量; W 为 $pN_1N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ 系统矩阵。它的大小依赖低分辨率图像的数量。该系统矩阵是结构的、典型病态且非常庞大。为了求解(3)式,需定义代价函数,它最小化残余向量范式:

$$\arg \min_x \| Y - Wx \|^2 \quad (4)$$

求该问题逆的困难是不能放大已测数据中的噪声效果,因此对于超分辨率复原问题,需要加入正则项到代价函数,以约束解空间。正则化方法中,通用正则项可表示如下:

$$E(x) = \arg \min_x (\| Y - Wx \|^2 + \mu x^T R x) \quad (5)$$

μ 为正则化参数,控制解的光滑度。 R 为正则化矩阵,是对称正定的,一般来说 $R = C^T C$, 其中 C 矩阵表示高通滤波器。为了简化,假定 R 是单位矩阵(注:这个假设不失一般性,通过重定义变量 x , 任何对称正定矩阵都能简化成标准型 $R = I$)。最小化(5)式的解被表示如下:

$$x_\mu = (W^T W + \mu I)^{-1} W^T Y \quad (6)$$

正则化参数的恰当选择对于正则化方法是很重要的。选择恰当正则化参数的一种方法是基于下述曲线:

$$P(\mu) = (\| x_\mu \|^2, \| Wx_\mu - Y \|^2) \quad \text{for } \mu > 0$$

该曲线定义为 L-曲线(L-curve),这主要是由于对于大尺度问题该曲线形状像字母“L”。Hansen 和 O'Leary^[2] 提出选择恰当正则化参数对应于 L 曲线的“顶点”,这个顶点被定义

^{*}黑龙江省教育厅科学基金(10551115)和北京印刷学院院选人才引进基金项目。解 凯 博士,教授。

为该曲线的最大曲率点。对于大尺度病态问题,用 L-curve 标准来确定恰当正则化参数的主要困难是计算 L-curve 上点的代价太昂贵,即每个点都需要计算出(4)式的最小化解。

3 基于 Arnoldi 过程的迭代方法

应用 l 步 Arnoldi 过程^[5]到矩阵 W 和初始向量 Y ,将产生如下分解:

$$WQ_l = Q_l H_l + q_{l+1} h_{l+1, l} e_l^T \quad (7)$$

其中 $Q_l \in R^{N \times l}$, $Q_l^T Q_l = I$, $Q_l e_1 = Y / \|Y\|$, $q_{l+1} \in R^N$, $Q_l^T q_{l+1} = 0$, $\|q_{l+1}\| = 1$, $h_{l+1, l} \in R$, 是 H_l 矩阵中一元素。 $H_l \in R^{l \times l}$ 是一个上 Hessenberg 矩阵。 e 为单位向量。假设 l 足够小,以至于(7)式分解存在,同时 Q_l 矩阵列向量张成 Krylov 空间:

$$K_l(W, Y) = \text{span}\{Y, WY, \dots, W^{l-1}Y\} \quad (8)$$

设(3)式的解具有如下形式:

$$x_{\mu, l} = Q_l z_{\mu, l} \quad (9)$$

将此 Galerkin 方程带入(6)式,有

$$Q_l^T (W^T W + \mu I) Q_l z = Q_l^T W^T Y \quad (10)$$

该方程是(6)式系统方程正交投影到 Krylov 子空间 $K_l(W, Y)$ 上,在此空间上可确定(9)方程的一个近似解。

引入下述类似的上 Hessenberg 矩阵:

$$\bar{H}_l = \begin{bmatrix} H_l & \\ & h_{l+1, l} e_l^T \end{bmatrix} \in R^{(l+1) \times l} \quad (11)$$

其中的各项来源于 Arnoldi 分解的(7)式。令 $Q_{l+1} = [Q_l, q_{l+1}]$, 则(7)式可写成

$$WQ_{l+1} = Q_{l+1} \bar{H}_l \quad (12)$$

因此(10)式可写成

$$(\bar{H}_l^T \bar{H}_l + \mu I) z = \|Y\| \bar{H}_l^T e_1 \quad (13)$$

解向量 z 的计算可通过下列最小二乘问题的解求得:

$$\min_{z \in R^l} \left\| \begin{bmatrix} \bar{H}_l^T \\ \mu^{1/2} I \end{bmatrix} z - \|Y\| e_1 \right\|^2 \quad (14)$$

Elden^[6]描述了借助 Given 旋转变换来高效计算上述最小二乘问题,其计算时间复杂性是 $O(l)$ 级浮点乘法运算。我们注意到矩阵 \bar{H}_l 是独立于正则化参数 μ 的。因此给定该矩阵,对于每个正则化参数 μ ,解向量 z 的计算时间复杂性是 $O(l)$ 级浮点乘法运算。根据文[7],计算一个正则化参数时间复杂性是 $O(N^2)$ 级浮点乘法运算,而 l 远远小于 N 。因此,基于 Arnoldi 过程方法的计算代价是相当低的。

对于每个大于等于 1 的 l 值,有如下的 L 曲线:

$$L_l = \{ (\|x_{\mu, l}\|, \|Wx_{\mu, l} - Y\|) : \mu > 0 \}$$

定理 根据上述(7)式的 Arnoldi 过程分解,下列等式成立:

- 1) $\|x_{\mu, l}\|^2 = \|z_{\mu, l}\|^2$;
- 2) $\|Wx_{\mu, l} - Y\|^2 = \|\bar{H}_l^T z_{\mu, l} - \|Y\| e_1\|^2$ 。

证明: 1) 因为 Q_l 为标准正交矩阵,所以 $\|x_{\mu, l}\|^2 = \|z_{\mu, l}\|^2$ 成立。

$$\begin{aligned} 2) \|Wx_{\mu, l} - Y\|^2 &= \|WQ_l z_{\mu, l} - Y\|^2 \\ &= \|Q_{l+1} \bar{H}_l^T z_{\mu, l} - Q_{l+1} Q_{l+1}^T Y\|^2 \\ &= \|\bar{H}_l^T z_{\mu, l} - Q_{l+1}^T Y\|^2 \end{aligned}$$

根据 Arnoldi 过程分解,有 $Q_l e_1 = Y / \|Y\|$, 由上述 Q_{l+1} 定义即可得 $Q_{l+1} e_1 = Y / \|Y\|$, 所以 $\|Y\| e_1 = Q_{l+1}^T Y$, 2) 式得证。

由上述定理可知, L 曲线的计算代价变得非常低廉。

4 实验

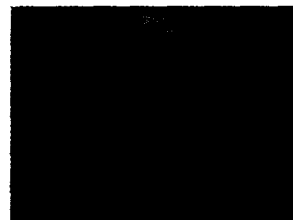
我们使用上述方法估计正则化参数。我们使用的工具是 Matlab6.0 和 Vc++6.0。下面采用一个实际拍摄的低分辨率图像序列进行实验,共 4 帧图像,取自于实验室。取第一帧为参考帧,内插因子取 2。运动模型采用平移+旋转模型,采用基于光流的方法进行运动估计。图 1(a)表示采样所得帧 80×60 像素的一低分辨率图像。用双线性插值生成的放大图像显示在图 1(b)。



(a) 实际采样低分辨率图像 (80*60)



(b) 双线性插值放大图像



(c) 基于曲率带的超分辨率图像 $\mu = 1.0 \times 10^{-3}$

图 1 基于 Arnoldi 过程的超分辨率图像复原

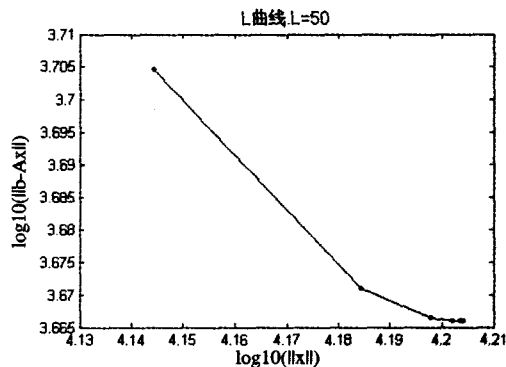


图 2 用于超分辨率图像复原的 L 曲线 ($l=50$)

为了确定超分辨图像复原算法中的正则化参数,我们使用基于 Arnoldi 方法。正则化参数取值为在区间 $[10^{-5}, 10^{-1}]$ 。选择 Arnoldi 算法的执行次数 l 为 50,正则化参数取值范围为

$$\mu_j = 1 \times 10^{-5+(j-1)/2}, 1 \leq j \leq 9$$

与各 μ_j 值所对应的点和连线显示如图 2。图中最左边的点对应最大的 μ_j 值;最右边的点对应最小 μ_j 值。因此组成了 L 形状的曲线。图 2 给出正则化参数是 $\mu_j = 0.001 (j=5)$ 。图 1(c)是我们用梯度下降最优化方法和 L-curve 确定的正则

化参数优化所得的超分辨率图像。从结果看双线性插值生成的高分辨率图像图 1(b) 明显模糊。图 1(c) 的结果明显清晰, 也明显比图 1(a) 清晰。说明用 Arnoldi 过程方法确定的正则化参数优化所重建的超分辨率图像结果明显好。

结论 本文使用 Tikhonov 正则化方法和梯度最速下降优化方法求解超分辨率图像, 我们提出基于 Arnoldi process 的正则化参数快速确定方法。它只需要一次使用 Arnoldi process 算法, 而计算每个正则化参数只需少量的计算即可。理论和实验证明该方法计算正则化参数是快速和有效的, 对大尺度线性超分辨率图像复原问题的参数估计是有效的工具。

参考文献

1 Tsai R Y, Huang A K. Multi-frame image restoration and registration. In: As advances in Computer Vision and Image Process-

ing, 1984, 1:317~339
 2 Hansen P C, O'Leary D. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. SIAM J Sci Comput, 1993, 14(6): 1487~1503
 3 Molina R, Vega M, Abad J, et al. Parameter Estimation in Bayesian High-resolution Image Reconstruction with Multisensors. IEEE Trans on Image Processing, 2003, 12(12): 1655~1667
 4 Park S C, Park M K, Kang M G. Super-resolution Image Reconstruction: A Technical Overview. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, 21~36
 5 Golub G H, Van Loan C F. Matrix Computations. The Johns Hopkins University Press, 1996
 6 Elden L. Algorithms for the Regularization of Ill-conditioned Least Squares Problems. BIT, 1997, 17:134~145
 7 张新明. 超分辨率图像复原的研究:[博士学位]. 北京:北京工业大学, 2002

(上接第 184 页)

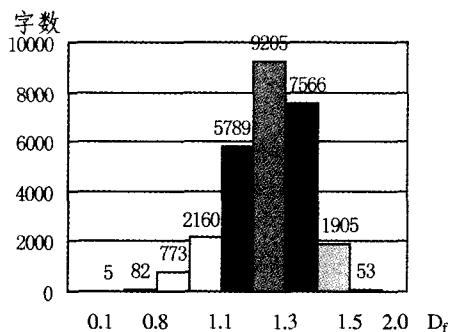


图 3 GB18030 汉字的格分维计算

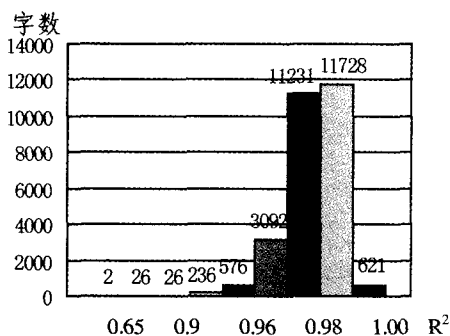


图 4 GB18030 汉字的相关性分析

表 1 GB18030 汉字的格分维 D_f 与相关性系数 R^2 统计表

D_f 值区间	字数	百分比%	R^2 值区间	字数	百分比%
[0.10,0.50)	5	0.0182	[0.00,0.65)	2	0.0036
[0.50,0.80)	82	0.2978	[0.65,0.85)	26	0.0944
[0.80,1.00)	773	2.8070	[0.85,0.90)	26	0.0944
[1.00,1.10)	2160	7.8437	[0.90,0.95)	236	0.8569
[1.10,1.20)	5789	21.0219	[0.95,0.96)	576	2.0915
[1.20,1.30)	9205	33.4265	[0.96,0.97)	3092	11.2281
[1.30,1.40)	7566	27.4748	[0.97,0.98)	11231	40.7836
[1.40,1.50)	1905	6.9177	[0.98,0.99)	11728	42.5884
[1.50,2.00]	53	0.1925	[0.99,1.00]	621	2.2551
合计	27538	100	合计	27538	100
[1.00,1.50)	26625	96.6846	[0.95,1.00]	27248	98.9469

由图 3、图 4 及表 1 可知: 大多数汉字的格分维集中在 [1.00, 1.50] 之间, 分形相关性系数 R^2 大于 0.95。其中, 作者对 R^2 值小于 0.90 的汉字作了详细分析, 其中 8 个汉字是

空格或空白字符图形, 有 5 个是一级字库与二级字库之间的间隔字符, 其余部分的字图像仅仅在点阵字模的“边界”上有少量为“1”的像素点, 其线性相关性较弱。但总体而言, 96.6846% 汉字的分形维数在 [1.00, 1.50] 之间, 98.9469% 汉字的 R^2 值在 [0.95, 1.00] 中。因此可以说, GB18030 汉字具有显著的分形特性, 在很大程度上具有分形图像的标度不变性, 可以利用分形理论来研究汉字的相关性质。

结论 本文工作的特色在于: (1) 研究对象是国家标准局新近颁布的 GB18030 大汉字库中的 27538 个汉字的分形特性; (2) 所用理论是作者在文 [6] 中新近提出的格分维理论及其计算方法; (3) 所得结论是 96.6846% 汉字的分形维数在 [1.00, 1.50] 之间, 98.9469% 汉字的分形相关性系数 R^2 值在 [0.95, 1.00] 之间, 这表明汉字具有显著的分形特性, 可以利用分形理论研究汉字的相关性质。

汉字本身是一个复杂的图形, 而且是在逐渐演化的图形, 对汉字的研究是一个复杂的课题。本文工作仅是从分形维数的角度来研究, 文中涉及的思想方法和计算数据对于相关领域的研究者具有一定的借鉴作用和参考价值。

参考文献

1 Falconer K J. The Geometry of Fractal Sets [M]. London: Cambridge University Press, 1985
 2 Mandelbrot B. Fractal Geometry of Nature [M]. Freeman, San Francisco, 1982
 3 叶竹秋, 林跃鑫. 生命科学中的分形研究[J]. 自然杂志, 2001, 23(2): 87~90
 4 陈衍仪. 图像压缩的分形理论和方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1997
 5 Grassberger P. Generalizations of the Hausdorff Dimension of Fractal Measures [J]. Phys Lett, 1985, 107A: 101~105
 6 陈志成. 复杂系统中分形混沌与逻辑的相关性推理研究[D]: [学位论文]. 西安: 西北工业大学, 2004
 7 陈志成, 何华灿, 毛明毅, 等. 基于格图象的康托集分维与泛逻辑运算[J]. 计算机科学, 2004, 31(4): 92~95
 8 毛明毅, 何华灿, 陈志成, 等. 分形图像的泛逻辑运算模型[J]. 计算机工程与应用, 2004, 40(2): 23~56
 9 国家质量技术监督局. GB18030-2000, 信息交换用汉字编码字符集基本集的扩充[S], 2001
 10 林宁. 关于 GB18030 汉字编码标准集[N]. 中国计算机报, 2001, 54
 11 陈志成, 何华灿, 毛明毅. GB18030 字库的解读与压缩封装程序设计[J]. 计算机工程与应用, 2002, 38(18): 119~129
 12 沈恒范. 概率论与数理统计教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995