

# 粒子群算法种群结构与种群多样性的关系研究\*

段晓东<sup>1,3</sup> 高红霞<sup>2,3</sup> 张学东<sup>2</sup> 刘向东<sup>3</sup>

(东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110004)<sup>1</sup> (辽宁科技大学计算机科学与工程学院 鞍山 114044)<sup>2</sup>  
(大连民族学院非线性信息技术研究所 大连 116600)<sup>3</sup>

**摘要** 本文采用种群熵刻画粒子群算法中种群的多样性,并通过一组标准测试函数分析了不同的种群结构及邻域关系对粒子群算法种群多样性变化和算法性能的影响。实验结果表明,不同的种群结构具有不同的信息传递特性,对粒子种群多样性的变化及算法的搜索效果有着较大的影响,因此对于不同的问题需根据其特点选择不同的种群结构。

**关键词** 粒子群优化,种群熵,种群结构

## Relations between Population Structure and Population Diversity of Particle Swarm Optimization Algorithm

DUAN Xiao-Dong<sup>1,3</sup> GAO Hong-Xia<sup>2,3</sup> ZHANG Xue-Dong<sup>2</sup> LIU Xiang-Dong<sup>3</sup>

(Faculty of Information Science and Engineering, Northeastern University, Liaoning 110004)<sup>1</sup>

(Faculty of Computer Science and Engineering of Liaoning University of Science and Technology, Anshan 114044)<sup>2</sup>

(The Research Institute of Nonlinear Information Technology of Dalian Nationalities University, Dalian 116600)<sup>3</sup>

**Abstract** This article adopts population entropy to portray the diversity of population, and has analyzed the influence of the different topology to the population entropy through a group of standard test functions. The test result indicates that, as a result of its own characteristic, different population structure has the tremendous influence to the population diversity and search effect of the algorithm, therefore when solving different problem, we should choose different population structure according to the characteristic of the problem.

**Keywords** Particle swarm optimization, Population entropy, Population structure

## 1 引言

粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization, 简记作 PSO)作为一种新的优化技术,由于其收敛速度快、参数设置少,近年来受到众多学者的研究和重视<sup>[1,2]</sup>。它常被用于解决大量非线性、不光滑和多峰值的复杂优化问题,现已广泛应用于许多科学和工程领域。

但是,在实际应用过程中人们也发现,PSO 算法易于过早收敛。其主要原因在于进化过程中种群的多样性损失过快。文[3]中对种群多样性的度量给出了定义,并提出了基于元胞结构的自适应调节种群结构算法,且算法的达优率较高。文[4]提出不同的种群结构对算法的性能存在着较大的影响。那么种群结构的异同对种群的多样性是否又有影响?种群结构与具体问题间是否存在联系?这些问题对进一步改进粒子群算法是非常重要的,这也是本文要解决的问题。

## 2 基本粒子群优化算法

基本 PSO 算法通过个体间的协作与竞争实现对问题最优解的搜索。算法先随机生成初始种群,其中每个粒子都为优化问题的一个候选解,并根据目标函数为之确定一个适应值。粒子在解空间中运动,并由一个速度矢量决定其运动方向和距离。通常,每个粒子追随当前自身最优位置和种群的最优位置而动。经过逐代搜索,算法最后得到问题的最优解<sup>[5]</sup>。

记第  $t$  代第  $i$  个粒子位置为

$$x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T$$

第  $t$  代第  $i$  个粒子速度为

$$v_i(t) = (v_{i1}(t), v_{i2}(t), \dots, v_{in}(t))^T$$

第  $t$  代个体  $i$  的最优位置为

$$p_i(t) = (p_{i1}(t), p_{i2}(t), \dots, p_{in}(t))^T$$

第  $t$  代种群的全局最优位置为

$$p_g(t) = (p_{g1}(t), p_{g2}(t), \dots, p_{gn}(t))^T$$

粒子将按(1)、(2)式改变其速度和位置。

$$v_{id}(t+1) = wv_{id}(t) + c_1r_1(p_{id}(t) - x_{id}(t)) +$$

$$c_2r_2(p_{gd}(t) - x_{id}(t)) \quad (1)$$

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + v_{id}(t+1) \quad (2)$$

其中,  $d = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, N, N$  为种群规模,  $r_1$  和  $r_2$  为均匀分布于  $[0, 1]$  的随机数;  $c_1$  和  $c_2$  为加速度限定因子,通常取为 2。为使粒子速度不致过大而影响算法效率,一般设定速度分量上限  $V_{max}$ , 即当(1)式中的  $|v_{id}| > V_{max}$  时,取  $|v_{id}| = V_{max}$ 。 $w$  为惯性权重<sup>[6]</sup>。

## 3 多样性度量及种群结构

### 3.1 多样性度量

随着 Shannon 把热力学中熵的概念引入信息论,信息熵的应用已经渗透到许多学科<sup>[7]</sup>。作为不确定方法的一个重要概念,它常被用于较粗略地给出不确定性的度量。本文采用种群熵对粒子群算法中种群的多样性进行度量。

**定义 1**<sup>[3]</sup> 若第  $t$  代种群有  $Q$  个子集:  $|S_1|, |S_2|, \dots, |S_Q|$ , 各个子集所包含的数目记为  $|S_1|, |S_2|, \dots, |S_Q|$  ( $Q \leq$

\* 本研究获国家自然科学基金(69974008, 60573124)、教育部优秀青年教师资助计划及辽宁省教育厅基金项目资助。段晓东 博士,教授,主要研究方向为仿生计算与计算复杂性;高红霞 硕士研究生;张学东 博士,教授;刘向东 博士,教授。

$N$ ), 且  $S_p \cap S_q = \emptyset, \bigcup_{q=1}^Q S_q = A^t$ , 其中  $p, q \in \{1, 2, \dots, Q\}$ ,  $A^t$  为第  $t$  代种群的集合, 则定义第  $t$  代种群的熵为

$$E = - \sum_{j=1}^Q p_j \lg(p_j) \quad (3)$$

其中,  $N$  为种群规模,  $p_j = |S_j|/N$ .

种群熵表达种群在搜索空间各个子空间的粒子分布情况。由定义 1 可知, 种群中所有粒子的适应值都相同时, 熵取最小值  $E = 0$ ; 种群中粒子的适应值越多, 意味着粒子分配得越平均, 熵值就越大。

### 3.2 不同种群结构的描述

粒子群算法是种群优化算法, 粒子群可以认为是粒子在解空间内, 按一定规律传递信息, 并根据信息的变化改变自身状态所产生的自组织行为。种群拓扑结构是指整个种群所有粒子间的连接方式(相互连接的粒子进行通信), 而邻域结构则是单个粒子和与其通信粒子的连接方式<sup>[8]</sup>。种群邻域结构的限定可制约信息在整个种群中的流动, 且可以控制算法的探测和开发能力<sup>[9]</sup>。本文主要分析全连通结构(图 1(a))、一维环形结构(图 1(b))和二维连通结构(图 1(c))。三种种群结构如图 1 所示。

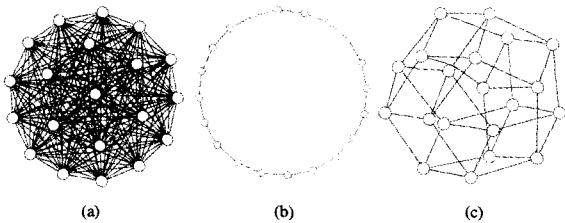


图 1 三种不同种群结构图

为分析不同邻域结构对种群多样性的影响, 对二维连通结构根据其不同的邻域关系, 又分为两种连接方式进行讨论。本文采用元胞结构表示二维连通结构的不同的邻域关系。根据元胞的空间分布, 可将元胞结构分为一维、二维和三维<sup>[10]</sup>。本文采用二维环形的元胞结构进行表示。图 2(a)表示四邻域关系, 图 2(b)表示八邻域关系, 其中灰色元胞为黑色元胞的邻居。这里称具有四邻域关系的二维连通结构为二维连通四, 具有八邻域关系的二维连通结构为二维连通八。

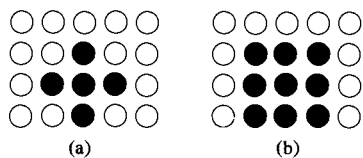


图 2 二维连通种群结构的两种邻域关系

采用不同的种群结构时, 粒子间信息传递的方式和速度都是不同的。为刻画不同种群结构的区别, 文[4]中采用种群结构平均距离、种群结构直径和种群结构分布序列对各种种群结构进行了描述, 各指标定义如下。

**定义 2** 种群中任意两个粒子间的平均边数, 称为种群结构平均距离。

**定义 3** 种群中两粒子间的最大距离, 称为种群结构直径。

**定义 4** 种群中从一个粒子开始经过  $i$  条边所能到达的平均结点数记为  $d_i$ , 则序列  $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$  称为种群结构的分布序列。

种群结构平均距离和直径分别表示信息传递整个种群所经过的平均距离和最大距离。若某个粒子搜索到较好的区域时, 它将仅仅直接影响它的  $d_1$  个邻居粒子, 而  $d_2$  个粒子只能在  $d_1$  个粒子都已学习后才能够开始学习。所以信息在不同的种群结构中的传递都存在着一一定的延迟。种群结构分布序列则在某种程度上反映了这一延迟。依据上述各指标的定义, Rui Mendes 等人计算了全连通结构、一维环形结构和二维连通四结构的各种指标, 本文计算了二维连通八结构的各种指标, 各结构相应的指标值如表 1 所示。

表 1 不同种群结构及参数

种群结构	平均距离	直径	分布序列
全连通	1	1	19
一维环形	5.26	10	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1
二维连通四	2.32	4	4, 7, 6, 2
二维连通八	1.58	2	8, 11

从表 1 可以看出, 全连通结构的分布序列最短, 因此信息传递速度最快, 从粒子群算法产生至今这种结构一直被广泛地应用着。一维环形结构是结点间边的数目最少的结构, 从表中的数据可以看出信息在粒子间的传递也最缓慢。这使得较优解区域的位置信息需要较长时间的传递才能传遍整个种群, 因此有利于解空间不同的区域同时得到搜索。二维连通结构在进化计算和元胞自动机领域有着比较普遍的应用。本文重点分析了两种不同邻域关系的二维连通结构, 一种为四邻居二维连通结构, 另一种为八邻居二维连通结构。二维连通结构中, 信息传递速度介于全连通结构和一维环形结构之间, 且四邻居结构中信息传递速度较八邻居结构更慢一些。

对于单峰函数, 因为只有一个最优值点, 所以应采用具有较快信息传递速度的种群结构, 这样有利于算法快速收敛。而对于具有多个局部极值点的多峰函数, 若采用信息传递速度过快的种群结构, 则算法将会过早收敛, 导致很难搜索到最优结果; 若采用信息传递速度过慢的种群结构, 则当迭代一定的次数后, 粒子也会由于学习不到更好的信息, 而陷入局部最优, 且算法执行效率较低。文[3]提出, 根据算法的搜索情况, 自适应地调整种群结构, 对种群的搜索进行控制, 在多峰问题的解决上取得了良好效果。

## 4 实验及结果分析

为分析不同种群结构与种群多样性间的关系, 本文采用一组标准测试函数<sup>[11]</sup>进行了两组实验: 第一组为种群结构与种群多样性间的关系分析实验; 第二组为种群结构与算法性能间的关系分析实验。各测试函数表达式如下。

(1) Ackley 函数:

$$f(x) = -20 \exp \left[ -0.2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \right] - \exp \left( \sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i) / n \right) + 20 + e, -32 < x_i < 32$$

(2) Griewank 函数:

$$f(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos \left( \frac{x_i}{\sqrt{i}} \right) + 1, -600 < x_i < 600$$

(3) Rastrigin 函数:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10], -5.12 < x_i < 5.12$$

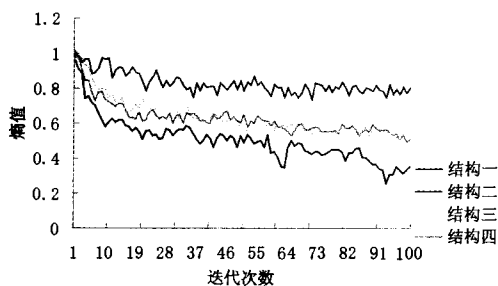
(4) Rosenbrock 函数:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i-1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 + (x_i - 1)^2], -30$$

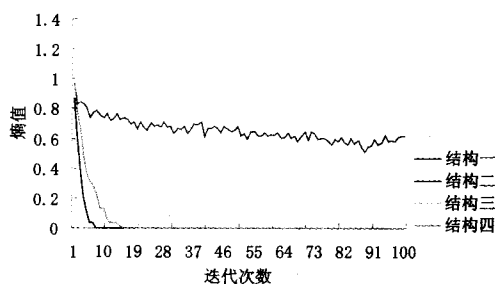
$$\langle x_i \rangle < 30$$

测试时,取粒子个数  $N=20$ ,  $c_1=2.0$ ,  $c_2=2.0$ ,  $w=0.4$ , 为使测试结果更具合理性,每个函数每次迭代 100 次,重复 30 次。

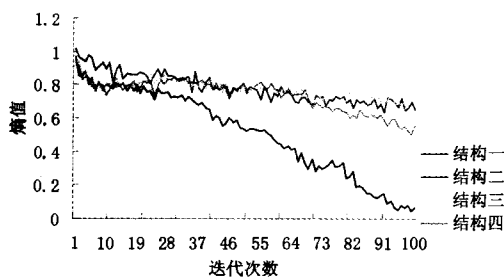
第一组实验结果采用熵值随迭代次数的变化曲线来表



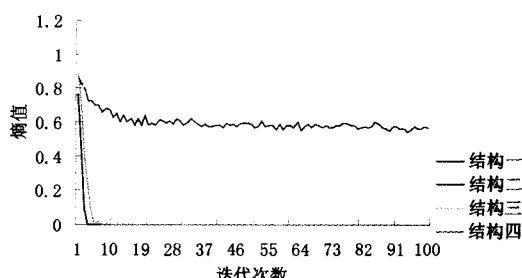
(a) Ackley 函数熵值变化曲线



(b) Griewank 函数熵值变化曲线



(c) Rastrigin 函数熵值变化曲线



(d) Rosenbrock 函数熵值变化曲线

图 3 各函数在不同结构下熵值变化曲线图

表 2 各函数在不同种群结构下的平均熵值及熵值标准差

函数	全连通结构	一维环形结构	二维连通四	二维连通八
	熵值标准差	熵值标准差	熵值标准差	熵值标准差
Ackley	0.5043±0.1211	0.8311±0.0588	0.6364±0.1063	0.6270±0.0904
Griewank	0.0227±0.1147	0.6556±0.0745	0.1553±0.2429	0.0457±0.1574
Rastrigin	0.5096±0.3137	0.7823±0.0883	0.7780±0.0525	0.7375±0.0953
Rosenbrock	0.0129±0.2869	0.5987±0.0532	0.0423±0.1735	0.0231±0.1204

从图 3 可以看出,不同的种群结构由于其自身的特性,对粒子群中信息的传递及种群的多样性变化有着较大的影响。对于单峰函数(图 3(b)、(d)),全连通结构可以取得较好的效果,这是因为它具有较快的信息流动速度,因此种群可较快地收敛。而对于多峰函数(图 3(a)、(c)),四种结构的差别不是很明显。

从表 2 可以得知,具体的问题中,一维环形结构在种群多样性总体保持效果上优于其它结构;但不同种群结构下,种群多样性变化的幅度有着一定差别。对函数 Ackley,一维环形结构的熵值标准差最小,因此对 Ackley 函数,一维环形结构下种群多样性变化最为稳定。对函数 Griewank 和函数 Rosenbrock,同样是一维环形结构最为稳定;而对函数 Rastrigin,

并计算了平均熵值及熵值标准差。平均熵值越大,则种群多样性总体保持越好;标准差越小,则这种结构下种群的多样性变化幅度越小。自变量维数取  $n=30$  时,所得结果如图 3 和表 2 所示。图 3 中结构一、结构二、结构三和结构四分别表示全连通结构、一维环形、二维连通四和二维连通八。

gin,二维连通结构较为稳定。由此可知,一维环形结构在各函数下的种群多样性总体保持效果及变化幅度普遍较好,这是因为该结构较其它结构具有更慢的信息传递速度,所以种群多样性的变化也比较稳定。

由于熵值变化曲线及熵值标准差,并未直接反映出种群结构与算法性能间的关系。为更好地说明二者间的联系,第二组实验中选取算法平均最优适值及其标准差作为评价指标。平均最优适值与理论最优值越接近,则算法优化结果越好;同时,为比较算法跳出局部极值的能力,采用了达优率这一评价指标。统计 100 次搜索达优的结果,计算出达优率。结果如表 3 所示。

表 3 不同种群结构算法性能的比较

函数	全连通结构		一维环形结构		二维连通四		二维连通八	
	平均最优值及标准差	达优率	平均最优值及标准差	达优率	平均最优值及标准差	达优率	平均最优值及标准差	达优率
Ackley	0.19±0.48	88%	0.34±0.04	68%	0.01±0.11	99%	0.01±0.09	99%
Griewank	0.04±0.01	73%	0.94±0.01	75%	0.01±0.02	100%	0.01±0.02	100%
Rastrigin	16.57±4.66	82%	18.12±5.64	78%	16.35±4.45	100%	16.54±4.76	100%
Rosenbrock	55.45±64.65	86%	65.19±32.37	65%	60.16±45.36	72%	51.08±34.16	79%

$$x_j = \begin{cases} \omega_{lower} \times \frac{\sum_{v \in \underline{A}(x)} v_j}{|\underline{A}(x)|} + \omega_{upper} \times \frac{\sum_{v \in (\overline{A}(x) - \underline{A}(x))} v_j}{|\overline{A}(x) - \underline{A}(x)|}, & \text{if } (\overline{A}(x) - \underline{A}(x)) \neq \emptyset \& \& \underline{A}(x) \neq \emptyset \\ \omega_{lower} \times \frac{\sum_{v \in \underline{A}(x)} v_j}{|\underline{A}(x)|} & \text{if } (\overline{A}(x) - \underline{A}(x)) \neq \emptyset \& \& \underline{A}(x) = \emptyset \\ \omega_{upper} \times \frac{\sum_{v \in (\overline{A}(x) - \underline{A}(x))} v_j}{|\overline{A}(x) - \underline{A}(x)|} & \text{if } (\overline{A}(x) - \underline{A}(x)) \neq \emptyset \& \& \underline{A}(x) = \emptyset \end{cases}$$

同时,使用自底向上的思想,生成的种子将对最后的双聚类的生成影响很大,因此对于粗糙  $k$  均值算法以及算法中参数的设置还有很多待改进的地方。

**结束语** 本文采用自底向上的思想,先使用粗糙  $k$  均值法生成双聚类的种子,再对种子添加行和列,生成初始的双聚类。分析结果删除这些双聚类中一些波动性不一致的数据,得到最后的双聚类。对生成的双聚类作图,并与 Cheng 和 Church<sup>[1]</sup> 的双聚类结果进行比较。实验证明,本算法的双聚类结果较为满意,运算时间也是可以接受的。同时,使用自底向上的双聚类算法能更高效地找到共表达水平很高即 HScore 值较小的双聚类。在以后的研究中,可以进一步考虑对初始粗糙  $k$  均值聚类生成的种子添加行和列这一操作使用随机搜索算法,从而能够得到更高效的双聚类算法。

### 参考文献

1 Cheng Yizong, George G M. Biclustering of Expression Data. In: Proceeding of the 8th International Conference on Intelligent Sys-

tems for Modcular Biology, ACM Press, 2000. 93~103  
 2 Pawlak Z. Rough Sets. International Journal of Information and Computer Sciences, 1982, 11:145~172  
 3 Pawlak Z. Rough Classification. International Journal of Man-Machine Studies, 1984, 20: 469~483  
 4 Pawlak Z. Rough Sets ; Theoretical Aspects of Reasoning About Data. Boston; Kluwer Academic Publishers, 1991  
 5 Yao Y Y, Li X, Lin T Y, et al. Representation and Classification of Rough Set Models. In: Proceeding of the Third International Workshop on Rough Sets and Soft Computing, San Jose, California, 1994  
 6 Lingras P, West C. Interval Set Clustering of Web Users with Rough K-Means. Journal of Intelligent Information System, 2004, 23(1):5~16  
 7 Lingras P, West C. Comparison of Conventional and Rough K-Means Clustering. In: International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing, Lecture Notes in Artificial Intelligence, Berlin, 2003  
 8 苗夺谦,王珏. 粗糙集理论中概念与运算的信息表示. 软件学报, 1999(10):113~116  
 9 王珏,苗夺谦,周育健. 关于 Rough Set 理论与应用的综述. 模式识别与人工智能, 1996, 9:337~344  
 10 Miao Duoqian, Chen Min, Wei Zhihua, et al. A Reasonable Rough Approximation of Clustering Web Users. Lecture Notes in Computer Science(待发表)

(上接第 166 页)

从表 3 可以看出,对单峰函数,全连通结构可以取得较好的优化结果。这是因为全连通结构具有较快的信息流动速度,粒子可以很快地学习到最佳粒子的信息,所以算法可以较快地收敛。而对多峰函数,二维连通四在优化结果、稳定性和摆脱局部最优的能力方面均优于其它结构。这是由于该结构具有较小的邻域结构,它使得最佳粒子的信息可以慢慢地向外传递,且不会像一维环形结构一样传递过慢,从而增强了算法局部开采的能力。

综上所述,对于简单单峰问题,适宜采用具有较快信息传递速度的全连通结构;而对于复杂多峰问题采用二维连通四较好。这是由于不同的种群结构有着不同的信息传递速度,从而影响了种群进化时多样性的变化,最终影响了算法的性能。因此,对于不同的问题需根据其特点选择不同的种群结构。

**结论** 本文在 Rui Mendes 等人工作的基础上,采用种群熵这一种群多样性指标,对种群的多样性进行了定量描述,并分析了全连通结构、一维环形结构和二维连通结构对种群多样性及算法性能的影响。采用一组标准测试函数进行了实验,得出如下结论:

- (1) 不同的种群结构对算法种群多样性的变化有着较大的影响。
- (2) 不同的种群结构具有不同的信息传递方式及速度,进而对种群多样性总体保持效果及变化的幅度有着较大影响,所以种群结构的选择应根据具体问题而定。
- (3) 对于简单单峰问题,宜采用具有较快信息传递速度的种群结构;而对于复杂多峰问题,宜采用具有较慢信息传递速度的结构。
- (4) 不同的种群结构,通过影响种群进化时多样性的变化,从而对算法的性能产生了影响。
- (5) 本文建议对于简单单峰问题采用全连通结构;而对

于复杂多峰问题采用二维连通四。

(6) 粒子群算法有着参数设置少,收敛速度快等优点,但也存在着易于陷入局部最优的缺点,而种群结构与种群多样性间关系的分析,使得我们对于粒子群算法有了更进一步的了解,这为提供算法控制方式及进一步改进粒子群算法将会起到很好的启示作用。

**致谢** 感谢外国文教专家重点项目的资助,同时感谢加拿大 Alberta 大学林延平教授在访问期间对本文提出的建议和有意义的探讨。

### 参考文献

1 Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks [C]. Perth Australia, 1995. 1942~1948  
 2 Eberhart R C, Kennfdy J. A new optimizer using particle swarm theory [A]. In: Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science [C], Nagoya Japan, 1995. 39~43  
 3 段晓东,高红霞,刘向东,等. 一种基于种群熵的自适应粒子群算法[J]. 计算机工程(已收录)  
 4 Mendes R, Kennedy J, Neves J. The fully informed particle swarm: simpler, maybe better [J]. IEEE Transaction on Evolutionary Computation, 2004, 8(3): 204~210  
 5 张丽平,俞欢军,陈德钊,等. 粒子群优化算法的分析与改进[J]. 信息与控制, 2004, 33(5): 513~514  
 6 Shi Y, Eberhart R C. A modified particle swarm optimizer [A]. In: Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation [C]. Piscataway NJ: IEEE Press, 1998. 303~308  
 7 Shannon C E. The mathematical Theory of Communication [M]. Urbana: University of Illinois Press, 1992  
 8 张丽平. 粒子群优化算法的理论及实践[D]. 浙江大学, 2005. 20~21  
 9 Kennedy J, Mendes R. Population structure and particle swarm can learn from its environment [A]. In: Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. Honolulu, Hawaii USA, 2002. 1671~1676  
 10 Chopard B, Droz M. 物理系统的元胞自动机模拟[M]. 祝玉学,赵学龙译. 清华大学出版社, 2003  
 11 王凌. 智能优化算法[M]. 清华大学出版社, 2001