

一类时滞神经网络的全局指数稳定性^{*})

任殿波^{1,2} 张继业¹

(西南交通大学牵引动力国家重点实验室 成都 610031)¹ (西南交通大学 CAD 工程中心 成都 610031)²

摘要 利用 M-矩阵和拓扑学等有关知识,通过构建向量李雅普诺夫函数,研究了一类包含分布时滞和可变时滞的神经网络的平衡点的存在性、唯一性及其全局指数稳定性。在没有假定激励函数有界、可微的情况下,得到了该类神经网络平衡点的存在性、唯一性及其在平衡点全局指数稳定的充分判据。该判据计算简便,且与时间滞后量无关,便于在实践中应用。文中给出了一个算例。

关键词 神经网络,全局指数稳定性,向量李雅普诺夫函数,分布时滞

Global Exponential Stability of a Class of Neural Networks with Distributed Delays

REN Dian-Bo^{1,2} ZHANG Ji-Ye¹

(State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)¹

(CAD Engineering Center, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)²

Abstract Based on the theory of topological degree and properties of M-matrix, by constructing proper vector Liapunov functions, the existence and uniqueness of the equilibrium point and its global exponential stability are investigated for a class of neural networks with distributed and varying delays. Without assuming the boundedness and differentiability of the activation functions, several new sufficient criterions ascertaining the existence, uniqueness and global exponential stability of the equilibrium point of such neural networks are obtained. Since the criterion is independent of the delays and simplifies the calculation, it is easy to test the conditions of the criterion in practice. An example is given to demonstrate the feasibility of the criterion.

Keywords Neural networks, Globally exponential stability, Vector Liapunov function, Distributed delays

神经网络所具有的非线性变换特性和高度并行运算能力使其在模式识别、图像处理、联想记忆等领域具有广泛的应用前景。由于神经网络平衡点的存在性及其稳定性对于其硬件电路的工作性能具有直接影响,而时间滞后因素在神经网络的实现电路中不可避免,并且常常导致系统工作性能不稳定,因此研究具有时间滞后的神经网络平衡点的存在性及其稳定性有着重要的理论和实践意义。关于时滞神经网络的稳定性,很多文献进行了研究,如文[1~14]。由于系统中时滞的产生非常复杂,给出其精确的度量几乎是不可能的。在研究中,一般要对时滞加上某种限制,如对时滞项作出有界、连续或者可导等种种假设。文[1~4]研究了含有固定时滞的神经网络的稳定性;文[5~8]在假定时滞有界的情况下,研究了变时滞神经网络的稳定性;文[9~13]研究了具有分布时滞或无界时滞的稳定性。最近,文[14]在假定激励函数单调非减的条件下,对一类具有分布时滞的动态神经网络的稳定性进行了研究,得到了此类神经网络的渐进稳定性判据。由于文[14]没有考虑可变时滞,并且对该类动态神经网络的全局指数稳定性没有进行研究,本文对文[14]研究的神经网络模型进行了扩充,包含了具有可变时滞的关联项,利用向量李雅普诺夫函数方法,研究该类包含可变时滞和分布时滞的神经网络的全局指数稳定性。

1 系统数学模型及引理

首先介绍后面用到的一些数学符号。 u^T 和 A^T 指向量 u

和矩阵 A 的转置,其中 $u \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$; A^{-1} 表示矩阵 A 的逆阵; $|u| = (|u_1|, \dots, |u_n|)^T$ 表示向量 u 的绝对值; $\|u\| = (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{1/2}$ 表示向量 u 的范数; $|A| = (|a_{ij}|)_{n \times n}$ 表示矩阵 A 的绝对值; $\|A\| = (\max\{\lambda: \lambda \text{ 是 } A^T A \text{ 的特征值}\})^{1/2}$ 表示矩阵 A 的范数; $[A]^s$ 定义为 $[A]^s = [A^T + A]/2$ 。

本文研究的具有变时滞和分布时滞的神经网络的动态行为可用下面的非线性微分方程来描述:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(t) = & -d_i(u_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(u_j(t - \tau_{ij}(t))) \\ & + \sum_{j=1}^n c_{ij} \int_{-\infty}^t k_{ij}(t-s) g_j(u_j(s)) ds + J_i \\ & i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

其中: u_i 是第 i 个神经元的状态变量, $i=1, 2, \dots, n$, n 是神经元的数目; $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $C = (c_{ij})_{n \times n}$ 是连接权值矩阵; $J = (J_1, J_2, \dots, J_n)^T$ 是输入常向量;

$$f(u) = (f_1(u_1), f_2(u_2), \dots, f_n(u_n))^T$$

$$g(u) = (g_1(u_1), g_2(u_2), \dots, g_n(u_n))^T$$

是神经元的激励函数; $\tau_{ij}(t)$ 表示可变的时间滞后。文中假定 $\tau_{ij}(t)$ 连续,且 $\tau_{ij}(t) \in [0, \tau]$, 其中 $t \geq 0$, τ 是一个常数。系统(1)初始状态 $u_i(s) = \phi_i(s)$, $s \leq 0$, ϕ_i 在 $(-\infty, 0]$ 有界且连续。

假定函数 f_j 和 g_j 以及 d_i , k_{ij} 分别满足下面的条件:

假定 1 对于任意 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f_j: R \rightarrow R$ 及 $g_j: R \rightarrow R$ 是全局 Lipschitz 函数,即对所有 x_j 和 y_j , 满足条件 $|f_j(x_j) - f_j(y_j)| \leq L_j |x_j - y_j|$ 和 $|g_j(x_j) - g_j(y_j)| \leq K_j |x_j - y_j|$,

^{*} 新世纪优秀人才支持计划(No. NCET-04-0889)。任殿波 博士研究生,从事交通信息工程及控制的研究;张继业 教授,博士生导师,从事车辆动力学与控制、智能交通系统的研究。

其中 L_j, K_j 是 Lipschitz 常数, 且都大于 0。

文[14]要求激励函数满足 $0 \leq (g_j(x_j) - g_j(y_j))(x_j - y_j) \leq K_j(x_j - y_j)^2$ 。不难看出, 假定 1 对激励函数的约束条件要宽松一些。

假定 2 d_i 在 R 上连续, 且对所有 x_i 和 y_i 满足

$$\frac{d_i(x_i) - d_i(y_i)}{x_i - y_i} \geq D_i > 0, i=1, 2, \dots, n$$

与文[14]相比, 取消了对 d_i 可导的限制。

假定 3 $k_{ij}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 在 $[0, \infty)$ 上分段连续, 并且满足 $\int_0^\infty e^{\beta s} k_{ij}(s) ds = p_{ij}(\beta)$, $p_{ij}(\beta)$ 是 $[0, \delta)$ 上的连续函数, $\delta > 0$, $p_{ij}(0) = 1, i, j = 1, 2, \dots, n$ 。

文中令

$$L = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_n), K = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_n), D = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_n)$$

定义 1 系统(1)的平衡点 u^* 是全局指数稳定的, 假若存在常数 $\lambda > 0$ 和 $M > 0$, 对所有 $t \geq 0$ 满足

$$\|u_i(t) - u_i^*\| \leq M \|\phi_i - u_i^*\| e^{-\lambda t}$$

其中 $\|\phi - u^*\| = \max_{1 \leq i \leq n, s \in (-\infty, 0]} |\phi_i(s) - u_i^*|$ 。

定义 2^[15] 一个 $n \times n$ 实矩阵 $A = (a_{ij})$ 是一个 M -矩阵, 假若 $a_{ij} \leq 0, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$, 且矩阵 A 的所有主子式是正的。

引理 1^[16] 假若矩阵 $A = (a_{ij})$ 的所有非对角元素是非正的, 则下面的陈述是等价的:

- (i) A 是一个 M -矩阵;
- (ii) A 的所有特征根的实部是正的;
- (iii) 存在一个向量 $\xi > 0$, 使得 $\xi^T A > 0$;
- (iv) A 是非奇异的, 且所有 A^{-1} 的元素是非负的;
- (v) 存在正定对角阵 Q , 使得 $QA + A^T Q$ 是正定的。

引理 2^[14] 如果函数 $H(x) \in C^0$ 是连续的, 并且满足以下条件, 则函数 $H(x)$ 是 R^n 上的同胚映射。

- i) $H(x)$ 是 R^n 上的单射,
- ii) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|H(x)\| \rightarrow \infty$ 。

2 平衡点的存在性与唯一性

与系统(1)相联系的非线性映射为

$$H(u) = -d(u) + Af(u) + Cg(u) + J \quad (2)$$

其中 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T, H = (H_1, H_2, \dots, H_n)^T$ 。

我们知道, 方程 $H(u) = 0$ 的解是系统(1)的平衡点。假若映射 $H(u)$ 是 R^n 上的一个同胚, 则存在唯一的点 u^* 满足 $H(u^*) = 0$, 即系统(1)有一个唯一的平衡点 u^* 。

定理 1 如果满足假定 1-3, 且 $D - |A|L - |C|K$ 是一个 M -矩阵, 则系统(1)有一个唯一的平衡点 u^* 。

证明: 要证明系统(1)有一个唯一的平衡点 u^* , 只需证明映射 $H(u)$ 是 R^n 上的一个同胚。系统(1)满足假定 1-3, 则易知 $H(u)$ 在 R^n 上是连续的。下面, 我们分两步来证明 $H(u)$ 是一个同胚映射。

首先, 证明 $H(u)$ 是 R^n 上的单射。用反证法。为了推出矛盾, 先假定存在 $x, y \in R^n$ 且 $x \neq y$, 使得 $H(x) = H(y)$ 。根据假定 1, 假定 2, 得到

$$\begin{aligned} |H(x) - H(y)| &= |-[d(x) - d(y)] + A[f(x) - f(y)] \\ &\quad + C[g(x) - g(y)]| \\ &\geq |d(x) - d(y)| - |A| \|f(x) - f(y)\| \\ &\quad - |C| \|g(x) - g(y)\| \\ &\geq D \|x - y\| - |A|L \|x - y\| - |C|K \|x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-y\| \\ &= (D - |A|L - |C|K) \|x - y\| \end{aligned}$$

由 $|H(x) - H(y)| = 0, x \neq y$, 即 $\|x - y\| > 0$, 得 $D - |A|L - |C|K < 0$ 。因为 $D - |A|L - |C|K$ 是一个 M -矩阵, 按照引理 1, $D - |A|L - |C|K$ 所有特征根的实部是正的, 所以这是一个矛盾, 因此不存在 $x, y \in R^n, x \neq y$, 使得 $H(x) = H(y)$ 。即映射 $H(u)$ 是一个 R^n 上的单射。

然后证明 $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|H(x)\| \rightarrow \infty$ 。定义 $\bar{H} = H(u) - H(0)$ 。我们知道, 要证明 $H(u)$ 是一个同胚, 只需证明 $\bar{H}(u)$ 是一个同胚。因为 $D - |A|L - |C|K$ 是一个 M -矩阵, 根据引理 1 知, 存在一个正定对角阵 $T = \text{diag}\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, 使得 $T[D - |A|L - |C|K]^3$, 所以存在一个充分小的正数 ϵ , 满足

$$[T(-D + |A|L + |C|K)]^3 \leq -\epsilon E_n < 0 \quad (3)$$

其中 ϵ 为一正数, E_n 是单位阵。根据假定 1 和假定 2, 由式(3)得

$$\begin{aligned} [Tu]^T \bar{H}(u) &= [Tu]^T (H(u) - H(0)) \\ &= [Tu]^T [-(d(u) - d(0)) + A(f(u) - f(0)) \\ &\quad + C(g(u) - g(0))] \\ &\leq \|u\|^T [T(-D + |A|L + |C|K)] u \\ &= \|u\|^T [T(-D + |A|L + |C|K)]^3 \|u\| \\ &\leq -\epsilon \|u\|^2 \end{aligned} \quad (4)$$

使用 Schwarz 不等式, 得,

$$\epsilon \|u\|^2 \leq \|T\| \|u\| \|\bar{H}(u)\|$$

于是 $\|\bar{H}(u)\| \geq \frac{\epsilon}{\|T\|} \|u\|$, 因此, $\|\bar{H}(u)\| \rightarrow +\infty$ 。得到当 $\|u\| \rightarrow +\infty$ 时, $\|H(u)\| \rightarrow +\infty$ 。

根据上面两步, 按照引理 2, 我们知道, 对于任意输入 u , 映射 $H(u)$ 是 R^n 上的一个同胚, 因此系统(1)有唯一的平衡点。证毕。

3 平衡点的全局指数稳定性

由于向量李雅普诺夫函数方法是分析大系统稳定性的重要工具^[15, 16], 下面我们利用向量李雅普诺夫函数方法来研究系统(1)的全局指数稳定性。

定理 2 如果满足假定 1-3, 且 $D - |A|L - |C|K$ 是一个 M -矩阵, 则系统(1)有一个唯一的平衡点, 该平衡点是全局指数稳定的。

证明: 因为 $D - |A|L - |C|K$ 是一个 M -矩阵, 根据定理 1, 系统(1)有一个唯一的平衡点, 记 u^* 。令 $x(t) = u(t) - u^*$, 系统(1)被写成下面的形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -\bar{d}_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} F_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \int_{-\infty}^t \\ &\quad k_{ij}(t-s) G_j(u_j(s)) ds \\ &\quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\bar{d}_i(x_i) = d_i(x_i + u_i^*) - d_i(u_i^*), i=1, 2, \dots, n$ 。仍满足假定 2;

$$F_j(x_j) = f_j(x_j + u_j^*) - f_j(u_j^*)$$

$$G_j(x_j) = g_j(x_j + u_j^*) - g_j(u_j^*), j=1, \dots, n$$

仍满足假定 1。根据系统(1)的初始条件可推得方程(5)的初始条件为

$$\phi(s) = \phi(s) - u^*, -\infty < s \leq 0$$

由于系统(1)有唯一的平衡点 u^* , 因此方程(5)有唯一解 $x = 0$ 。

由于 $D - |A|L - |C|K$ 是一个 M -矩阵, 据引理 1 知, 存

在 $\xi_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 满足

$$-D_i \xi_i + \sum_{j=1}^n \xi_j (|a_{ij}| L_j + |c_{ij}| K_j) < 0, i=1, 2, \dots, n$$

构造函数

$$S_i(\mu) = \xi_i (-D_i + \mu) + \sum_{j=1}^n \xi_j [e^{\mu} |a_{ij}| L_j + |c_{ij}| p_{ij}(\mu) K_j], i=1, 2, \dots, n$$

很明显, $S_i(0) < 0$ 。根据假定 3, $p_{ij}(\mu)$ 是在 $[0, \delta]$ 上的连续函数, $\delta > 0$ 。因此 $S_i(\mu)$ 关于 μ 是连续的, 于是存在常数 $\alpha > 0$, 使得

$$\xi_i (-D_i + \alpha) + \sum_{j=1}^n \xi_j [e^{\alpha} |a_{ij}| L_j + |c_{ij}| p_{ij}(\alpha) K_j] < 0 \quad (6)$$

令 $v_i(t) = e^{\alpha t} |x_i(t)|$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ 。沿着方程(5)的解计算 $v_i(t)$ 的右上导数。根据假定 1 和假定 2, 得

$$\begin{aligned} D^+ v_i(t) &= e^{\alpha t} \operatorname{sgn} x_i \{ -\bar{d}_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n [L_j F_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) + c_{ij} \int_{-\infty}^t k_{ij}(t-s) G_j(x_j(s)) ds] \} + \alpha e^{\alpha t} |x_i(t)| \\ &\leq e^{\alpha t} \{ (-D_i + \alpha) |x_i(t)| + \sum_{j=1}^n [L_j |a_{ij}| \|x_j(t - \tau_{ij}(t))\| + K_j |c_{ij}| \int_{-\infty}^t k_{ij}(t-s) |x_j(s)| ds] \} \\ &\leq (-D_i + \alpha) |e^{\alpha t} x_i(t)| + \sum_{j=1}^n [L_j e^{\alpha \tau_{ij}(t)} |a_{ij}| \|e^{\alpha(t-\tau_{ij}(t))} x_j(t - \tau_{ij}(t))\| + K_j |c_{ij}| \int_{-\infty}^t k_{ij}(t-s) e^{\alpha(t-s)} |e^{\alpha s} x_j(s)| ds] \\ &\leq (-D_i + \alpha) v_i(t) + \sum_{j=1}^n [L_j e^{\alpha} |a_{ij}| v_j(t - \tau_{ij}(t)) + K_j |c_{ij}| \int_{-\infty}^t k_{ij}(t-s) e^{\alpha(t-s)} v_j(s) ds] \quad (7) \end{aligned}$$

定义 集合 $r = \{z(l); z_i = \xi_i l, l > 0, i=1, 2, \dots, n\}$ 和 $\Omega(z) = \{u; 0 \leq u \leq z, z \in \gamma\}$ 。令 $\xi_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} \{\xi_i\}$, $\xi_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} \{\xi_i\}$, 取 $l_0 = (1 + \delta) \|\psi\| / \xi_{\min}$, 其中 $\delta > 0$ 是一个常数。不难得到 $v_i(s) \in \Omega(z(l_0))$, 即

$$v_i(s) = e^{\alpha s} |\psi_i(s)| < \xi_i l_0, -\infty \leq s \leq 0 \quad (8)$$

下面, 我们证明

$$v_i(t) < \xi_i l_0, t \geq 0, i=1, 2, \dots, n \quad (9)$$

假若式(9)不成立, 则由式(8)知存在 $t_1 > 0$ 和某个 i , 使得

$$v_i(t_1) = \xi_i l_0, D^+(v_i(t_1)) \geq 0, v_j(t) \leq \xi_j l_0 \quad (10)$$

其中 $-\infty < t \leq t_1, j=1, 2, \dots, n$ 。可是按照式(6)、(7)以及式(10)中 $v_i(t_1) = \xi_i l_0$ 和 $v_j(t) \leq \xi_j l_0$, 得到

$$D^+(v_i(t_1)) \leq \xi_i (-D_i + \alpha) + \sum_{j=1}^n [L_j e^{\alpha} |a_{ij}| + K_j |c_{ij}| p_{ij}(\alpha) \xi_j] l_0 < 0$$

而由式(10)知, $D^+(v_i(t_1)) \geq 0$, 这是矛盾的。所以对 $t \geq 0$, 有 $v_i(t) < \xi_i l_0$ 。进一步, 得到

$$\begin{aligned} |x_i(t)| &< \xi_i l_0 e^{-\alpha t} \leq (1 + \delta) \|\psi\| \xi_{\max} / \xi_{\min} e^{-\alpha t} \\ &= M \|\psi\| e^{-\alpha t}, i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

因此 $|u_i(t) - u_i^*| \leq M \|\phi - u^*\| e^{-\alpha t}$, 其中 $M = (1 + \delta) \xi_{\max} / \xi_{\min}$ 。根据定义 1, 系统(1)的平衡点是全局指数稳定的。证毕。

4 算例

假设神经网络模型可表示为下面的微分方程形式:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= -d_1(u_1(t)) - 0.4 f_1(u_1(t - \tau_{11}(t))) + 0.3 f_2(u_2(t - \tau_{12}(t))) + 0.15 \int_{-\infty}^t k_1(t-s) g_1(u_1(s)) ds + 0.3 \int_{-\infty}^t k_2(t-s) g_2(u_2(s)) ds + J_1 \quad (11a) \\ \dot{u}_2(t) &= -d_2(u_2(t)) - 0.25 f_1(u_1(t - \tau_{21}(t))) - 0.2 f_2(u_2(t - \tau_{22}(t))) + 0.1 \int_{-\infty}^t k_1(t-s) g_1(u_1(s)) ds + 0.1 \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^t k_2(t-s) g_2(u_2(s)) ds + J_2 \quad (11b)$$

其中 $f_1(u) = \sin((\sqrt{2}/2)u) + u$, $f_2(u) = \sin(u)$, $g_1(u) = g_2(u) = (e^u - e^{-u}) / (e^u + e^{-u})$, $d_1(u) = 2u$, $d_2(u) = u$, $k_1(t) = e^{-t}$, $k_2(t) = 2 / (1 + t^3)$ 。容易验证 $f_1(u)$ 、 $f_2(u)$ 和 $g_1(u)$ 、 $g_2(u)$ 满足假定 1, 且 $L_1 = 1 + \sqrt{2}/2$, $L_2 = 1$, $K_1 = K_2 = 1$; $d_1(u)$, $d_2(u)$ 满足假定 2, 且 $D_1 = 2$, $D_2 = 1$; $k_1(t)$ 、 $k_2(t)$ 满足假定 3。于是有

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.4 & 0.3 \\ 0.25 & -0.2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ L &= \begin{bmatrix} 1.707 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

得到 $D - |A|L - |C|K = \begin{bmatrix} 1.167 & -0.6 \\ -0.35 & 0.7 \end{bmatrix}$ 是一个 M 矩阵。

根据定理 2, 可判定神经网络(11)存在平衡点, 且在平衡点全局指数稳定。

结束语 由于时间滞后在神经网络的实现电路中不可避免, 且常常导致系统工作性能不稳定, 因此研究具有时间滞后的神经网络平衡点的存在性及其稳定性有着重要的理论和实践意义。本文通过构建向量李雅普诺夫函数, 研究了一类具有分布时滞和可变时滞的神经网络的全局指数稳定性。在进一步放松对激励函数约束条件的情况下, 得到了该类动态神经网络平衡点的存在性、唯一性及其在平衡点全局指数稳定的充分判据。

参考文献

- 1 Cao J. A set of stability criteria for delayed cellular neural networks. *IEEE Transactions on Circuits Systems-I*, 2001, 48: 494~498
- 2 Sree Hari Rao V, Phaneendra R M Bh. Global dynamics of bidirectional associative memory neural networks involving transmission delays and dead zones. *Neural Networks*, 1999, 12: 455~465
- 3 Van Den Driessche P, Zou X. Global attractivity in delayed Hopfield neural networks models. *SIAM J Appl Math*, 1998, 58(6): 1878~1890
- 4 Zhang J, Jin X. Global stability analysis in delayed Hopfield neural networks models. *Neural Networks*, 2000, 13(7): 745~753
- 5 Peng J, Qiao H, Xu Z. A new approach to stability of neural networks with time-varying delays. *Neural Networks*, 2002, 15: 95~103
- 6 Cao J, Wang J. Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays. *IEEE Trans Circuits Systems I*, 2003, 50(1): 34~44
- 7 Zhang J. Globally exponential stability of neural networks with variable delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 2003, 50(2): 288~291
- 8 Liu Y, Tang W. Exponential stability of fuzzy cellular neural networks with constant and time-varying delays. *Physics Letters A*, 2004, 323: 224~233
- 9 Yi Z, Ping P A, Leung K S. Convergence analysis of cellular neural networks with unbounded delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems -I*, 2001, 48: 680~687
- 10 Feng C, Plamondon R. On the stability analysis of delayed neural networks systems. *Neural Networks*, 2001, 14: 1181~1188
- 11 Chen Y. Global stability of neural networks with distributed delays. *Neural Networks*, 2002, 15: 867~871
- 12 Zhang O, Wei X, Xu J. Global exponential stability of Hopfield neural networks with continuously distributed delays. *Physics Letters A*, 2003, 315: 431~436
- 13 Zhang J, Sud Y, Iwas T. Absolutely exponential stability of a class of neural networks with unbounded delay. *Neural Networks*, 2004, 17: 391~397
- 14 Chen W, Zheng W. Global asymptotic stability of a class of neural networks with distributed delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems -I*, 2006, 53(3): 644~652
- 15 Siljak D D. Large-scale dynamic systems stability and structure. New York: Elsevier, 1978
- 16 Michel A N, Farrell J A, Porod W. Qualitative analysis of neural networks. *IEEE Trans Circuits Syst*, 1989, 36(2): 229~243
- 17 Chen Y. Global stability of neural networks with distributed delays. *Neural Networks*, 2002, 15: 867~871
- 18 Zhang J, Yang Y, Zeng J. String stability of infinite interconnected system. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(7): 791~796