

基于有环因子图的密度进化理论分析^{*})

童胜勤 邓勇强

(华中科技大学电子与信息工程系 武汉 430074)

摘要 密度进化理论是分析低密度校验码的迭代译码性能的有效工具。本文在对密度进化理论进行研究的基础上,探讨了基于有环因子图的密度进化方法。首先讨论了有环因子图中环存在的情况,得到了环存在的概率表达式。然后研究了迭代译码算法中误码率的进化情况,在加入环存在对译码的影响因素后得到了迭代译码中误码率的进化表达式。在该式讨论中,获得了有环情况下密度进化对信道条件的要求,即译码门限。本文的研究表明,在考虑因子图中存在环的情况下进行密度进化分析时,其获得的译码门限要低于不考虑环存在的情况。

关键词 低密度校验码,密度进化,环,因子图,迭代译码

Analysis of Density Evolution on Cycled Factor Graph

TONG Sheng-Qin DENG Yong-Qiang

(Department of Electronics and Information, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract Density evolution (DE) is one of the most powerful tools for analyzing the performance of low-density parity-check (LDPC) codes. With cycle-free factor graph as one of its fundamental assumptions, density evolution has been widely and successfully applied to different channels. An improved density evolution based on cycled factor graph is proposed in this paper. Research on the cycled factor graph and then the probability formula of cycles in the factor graph is presented. Then the error bit probability of iterative decoding algorithm based on cycled factor graph is studied, and the formula of error bit probability is developed. The threshold is got based on the analyzed this formula. It is shown that thresh hold of cycled factor graph is lower than the value of cycle-free case.

Keywords Low-density parity-check (LDPC) codes, Density evolution, Cycle, Factor graph, Iterative decoding

1 引言

低密度校验 (Low Density Parity-Check, LDPC) 码是 Robert G. Gallager 于 1962 年提出的编码^[1]。然而因为各种原因,LDPC 码沉睡了 30 来年,直到 1993 年具有划时代意义的 Turbo 码提出以后,在 Turbo 码的启发下,才有 D. J. Mackay, M. Neal 和 N. Wiberg 等人对 LDPC 码重新进行了研究。他们发现,LDPC 码与 Turbo 一样具有逼近 Shannon 限的性能。自 1999 年以来,这方面的研究文献开始大量出现,LDPC 码已成为编码领域中的一个研究热点^[2]。

在 LDPC 的研究过程中,人们引入了因子图来表述该码的校验节点与变量节点之间的关系,它的译码算法就可以使用因子图来直观说明。LDPC 码的译码主要是置信传播算法,在译码过程中,与译码有关的信息沿着因子图中的边在节点中不断地迭代传递与修正。迭代消息传递与修正的目的在于使图上流动的消息向正确的方向集中。Richardson 等人在 Gallager 的研究基础上,通过对无环因子图上变量节点和校验节点发送信息的研究,建立了密度进化理论,用于分析迭代译码过程中 LDPC 译码器对发送消息概率密度函数进化的影响^[3]。应用密度进化理论可以准确地计算出 LDPC 译码阈值,从而可用于测度 LDPC 码的渐进平均性能。

Richardson 的密度进化理论是建立在无环因子图上的,并且需要传输信道满足两个条件:对称性条件和独立性条件,

因而有一定的局限性。近年来,有人针对不同信道条件下的进化理论进行了研究^[4,5]。本文则侧重于对有环因子图上的进化理论进行探讨,以期获得有环情况下的密度进化分析方法。

2 密度进化理论

设一个构造参数为 (N, d_v, d_c) 型的规则 LDPC 码,其中 N 是码长, d_v 和 d_c 分别是变量节点和检验节点的度数。在无环 Tanner 图上,一个校验节点 z 向相邻变量节点 x 发送的校验消息被限制为来自其他 $d_c - 1$ 个相邻校验节点的输入消息 v_1, \dots, v_{d_c-1} 的函数,记为 $u = \varphi_c^{(z)}(v_1, \dots, v_{d_c-1})$; 同样,一个变量节点 x 向校验节点 z 发送的变量消息被限制为来自其他 $d_v - 1$ 个相邻校验节点的输入消息 u_1, \dots, u_{d_v-1} 的函数,记为 $v = \varphi_v^{(x)}(u_1, \dots, u_{d_v-1})$, l 表示迭代次数。

LDPC 码的译码算法通常被称为置信传播算法或和积算法,可用图 1 的因子图表示。图中 $\{z_i: i=1, 2, \dots, M\}$ 表示校验节点, $\{x_j: j=1, 2, \dots, N\}$ 表示变量节点,其中 M 和 N 分别表示校验矩阵 $H = (h_{ij})_{M \times N}$ 的行和列,令集合 $M(j) = \{i: h_{ij} = 1\}$ 表示与变量节点 x_j 相连的校验节点集合, $N(i) = \{j: h_{ij} = 1\}$ 表示与校验节点 z_i 相连的变量节点的集合。初始消息 f_j^a 是信道转移函数, R_{ij}^a 是校验节点 z_i 向变量节点 x_j 传递的校验信息,表示 z_i 根据其他变量节点 $\{x_k: k \neq j, k \in N(i)\}$ 的当前状态向 x_j 宣称的“ $x_j = a$ 使 z_i 满足”的可信度;

^{*}) 国家自然科学基金重大项目“未来移动通信系统基础理论与技术研究”(No. 60496315); 国家高技术研究发展计划(863 计划)(No. 2003AA12331005)。邓勇强 博士研究生。

Q_{ij}^a 是 x_j 向 z_i 传递的变量信息,表示 x_j 根据其他校验节点 ($z_k: k \neq i, k \in M(j)$) 以及 f_j 向 z_i 宣称“ $x_j=a$ ”的可信度。

密度进化理论就是基于这类译码算法及其因子图而建立的。在应用密度进化理论对 LDPC 的译码进行分析时必须满足两个基本的前提条件:一个是独立性条件,另一个是对称性条件。

独立性条件指的是,在迭代译码过程中,变量节点和校验节点获取的信息是独立的。如同在一个树图上,即因子图上不存在环,所有的消息向一个方向传递,不存在重复信息。

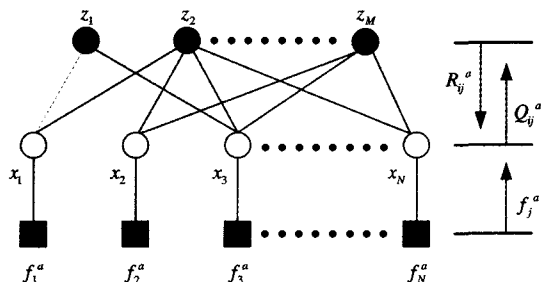


图1 置信传播译码的因子图表示

对称性条件定义是(信道为二元输入编码信道情况时):

(1)信道对称。设信道的输入和输出分别为 x_j 和 y_j , 如果信道转移概率满足等式

$$P(y_j=q|x_j=+1)=P(y_j=-q|x_j=-1) \quad (1)$$

则称信道是输出对称的,简称信道对称。

(2)校验节点对称。对于任意 ± 1 随机序列 $(b_1, \dots,$

$b_{d_c-1})$, 校验节点的消息满足等式

$$\varphi_c^{(l)}(b_1 v_1, \dots, b_n v_n) = \varphi_c^{(l)}(v_1, \dots, v_n) \left(\prod_{j=1}^n b_j \right) \quad (2)$$

称为校验节点对称。

(3)变量节点对称。当变量节点的消息满足等式

$$\varphi_v^{(l)}(-u_0, -u_1, \dots, -u_n) = -\varphi_v^{(l)}(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (3)$$

且 $\varphi_v^{(0)}(-u_0) = -\varphi_v^{(0)}(u_0)$ 时,称为变量节点对称。

当对称性条件满足时,设 $P_e^{(l)}(x)$ 是码字 x 经过 l 次迭代译码后的错误概率,则 $P_e^{(l)}(x)$ 独立于 x , 即译码错误概率独立于传输码字。

Richardson 等人在对 LDPC 码的迭代译码算法的研究中发现^[3],无论什么样的信道,在满足以上无环因子图和两个假设条件下,总能找到经 l 次迭代后译码错误概率密度函数的表达式。如果我们能将信道情况用一个参数表示,那就能把译码错误概率密度函数表示为该信道参数的函数,并可以求得这样的一个信道参数值,它将使得在所有小于该值的信道里面,在一定的迭代次数后,译码错误能趋于 0。

3 有环图上的密度进化方法

在有环图上讨论密度进化的方法,需先要考虑存在的环。为便于分析,可将图 1 所示的因子图展开成为图 2 所示的树。

对于 (N, d_v, d_c) 的 LDPC 码,记 M_l 为 $2l$ 层深度树上的变量节点总数,则

$$M_l = \sum_{i=0}^l (d_v - 1)^i (d_c - 1)^i \quad (4)$$

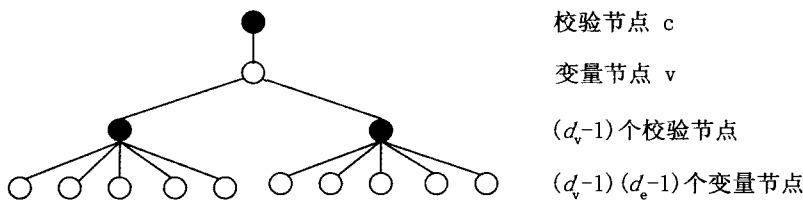


图2 LDPC 码的树状表示

记 C_l 为 $2l$ 层深度树上的信息节点总数,则

$$C_l = 1 + (d_v - 1) \sum_{i=0}^{l-1} (d_v - 1)^i (d_c - 1)^i \quad (5)$$

我们用 N_e^d 表示深度为 d 的树中边 e 的集合,这里边 e 即对应因子图 1 中变量节点与信息节点之间的连线。令 m 表示因子图中所有校验节点的数目, n 表示因子图中所有变量节点的数目。对于一个因子图,考察其环存在的概率的问题可以转化为能否展开为树的概率。以因子图中的校验节点为根,展开成树,设当展开深度为 $2l(l=0, 1, \dots)$ 时,仍然表现为树的形式,即还不存在环,继续进行树的展开。此时从该树的最底层的叶子结点展开,此时的叶子节点为变量节点,不失一般性,设展开 $k(k=0, 1, \dots)$ 根边后依然保持为树,则第 $k+1$ 根边仍然保持为树的概率为

$$p_c = \frac{(m - C_l - k)d_c}{md_c - C_l - k} = 1 - \frac{(C_l + k)(d_c - 1)}{md_c - C_l - k} \geq 1 - \frac{C_l}{m} \quad (6)$$

因此,当以因子图中校验节点展开成树时, N_e^{2l} 为树, N_e^{2l+1} 仍然保持为树的概率满足

$$p \geq \left(1 - \frac{C_l}{m}\right)^{c_{l+1} - c_l} \quad (7)$$

同样,以因子图中变量节点展开时, N_e^{2l} 为树, N_e^{2l+1} 仍然保持为树的概率满足

$$p \geq \left(1 - \frac{M_l}{n}\right)^{M_{l+1} - M_l} \quad (8)$$

则展开成 $2(l+1)$ 深度时不能成为树的概率表达式,即存在环的表达式 P_c 为

$$P_c \leq 1 - \left(1 - \frac{C_l}{m}\right)^{c_{l+1} - c_l} \left(1 - \frac{M_l}{n}\right)^{M_{l+1} - M_l} \leq \frac{M_l^2 + \frac{d_c}{d_v} C_l^2}{n} \quad (9)$$

其中, $l=0, 1, \dots$ 。式(9)中,分子部分为 l 的函数,故可令 $\gamma(l) = M_l^2 + \frac{d_c}{d_v} C_l^2$, 则环存在的概率 P_c 满足表达式

$$P_c \leq \frac{\gamma(l)}{n} \quad (10)$$

得到了环存在的表达式,可以考虑在密度进化中加入环的因素进行讨论。在二元对称信道(BSC)下,对 Gallager 在文[1]中提出的译码算法进行密度进化分析。

设 BSC 的转移概率为 p_0 , 此即为信道初始误传概率,经过第一次迭代后的错误概率由两部分组成。一部分错误的比特被纠正,根据 Gallager 在文[1]中提出的引理 1, 并加入环的影响因素,被纠正的概率为

$$p_0 \left[\frac{1 + (1 - 2p_0)^{d_c - 1}}{2} (1 - P_c) \right]^{d_v - 1} \quad (11)$$

另一部分是经迭代后,新产生的误码,这部分的概率为

$$(1-p_0) \left[\frac{1-(1-2p_0)^{d_c-1}}{2} (1+P_c) \right]^{d_v-1} \quad (12)$$

则经过第一次迭代后,误码概率进化为

$$p_1 = p_0 - p_0 \left[\frac{1+(1-2p_0)^{d_c-1}}{2} (1-P_c) \right]^{d_v-1} + (1-P_0) \left[\frac{1-(1-2p_0)^{d_c-1}}{2} (1+P_c) \right]^{d_v-1} \quad (13)$$

故经过 l 次迭代译码计算后,误码率 p_l 进化为

$$p_l = p_0 - p_0 \left[\frac{1+(1-2p_{l-1})^{d_c-1}}{2} (1-P_c) \right]^{d_v-1} + (1-p_0) \left[\frac{1-(1-2p_{l-1})^{d_c-1}}{2} (1+P_c) \right]^{d_v-1} \quad (14)$$

通过上式我们知道,经过 l 次迭代译码计算后,误码率 p_l 总能表示为初始误码率与迭代次数 l 的迭代函数。对于固定的一组 LDPC 码,其因子图中环在迭代译码过程中对误码率 p_l 的影响只与迭代次数有关,这是可以理解的:只有迭代译码的次数达到或超过环长,译码信息被环传回时,因子图中的环才会较低译码的性能。但是在对 LDPC 码进行分析时,环的存在概率及其长度不能精确表述(这与 LDPC 码的构造方法有关),为便于分析,我们在此处将环存在的概率取其上限值,即对(10)式取等号,因而我们分析的是其最差的情况。

式(14)是在初始误码率 p_0 的情况下,经过 l 次迭代译码后,误码率 p_l 是 p_{l-1} 的函数关系表达式。当 p_0 固定时, p_l 是 p_{l-1} 的单调递增函数,图 3 给出了 $d_v=3, d_c=6$ 时,对应不同 p_0 值 p_l 与 p_{l-1} 的关系曲线。对于我们的译码算法,希望能够经过一定次数的迭代运算,误码率 p_l 能够趋于 0,使得译码成功,也就是须使得

$$\lim_{l \rightarrow \infty} p_l = 0 \quad (15)$$

通过求解上式,可获得满足(15)式的 p_0 上限值 $p_0^* = 0.0325$ 。当 $p_0 < p_0^*$ 时,经过一定次数的迭代译码后,误码率总能收敛于 0,即可成功译码;当 $p_0 \geq p_0^*$ 时,迭代译码的误码率总不能趋于 0,即不能成功译码。图 4 中给出了在不同的 p_0 值的情况迭代译码误码率的收敛情况图。从图中我们可以看到,当 $p_0 \geq p_0^*$ 时,迭代译码的误码率不能收敛与 0,无论经过多少次译码,总是存在误码;当 $p_0 < p_0^*$ 时,经过 l 次迭代译码后的误码率 p_l 的收敛速度与 p_0 成反比, p_0 越小 p_l 收敛越快。

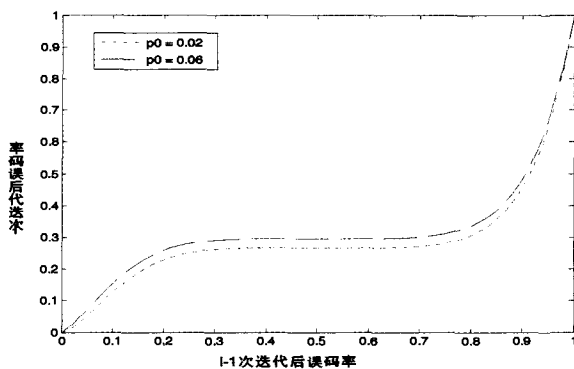


图 3 不同 p_0 值时 p_l 与 p_{l-1} 的函数关系曲线

在本文的分析中, p_0 定义为初始误码率,即信道的转移概率,直接与信道的状况相关,可以视为信道状况的综合参数。因而,对于某一信道,总能找到一个参数对其进行描述,当信道状况优于该参数时,则能够通过迭代译码成功译码,否

则就不能。该参数被定义为信道的译码门限。

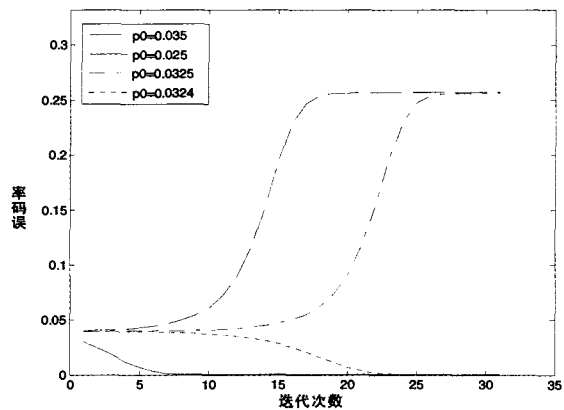


图 4 不同 p_0 值时 p_l 的收敛情况 ($d_v=3, d_c=6$)

在因子图中有环的情况下,由于环的存在影响了译码算法的性能,因而也就降低了译码门限。表 1 中给出了不同 d_v, d_c 时,本文考虑环存在的情况下的译码门限与 Richardson 在文[3]中的无环假设情况下的译码门限比较。可以看出,当存在环时,译码门限要低于无环假设情况下的值,也就是要求更好的信道条件才能获得相当的译码成功。

表 1 考虑环与不考虑环情况下的信道门限值对比

d_v	d_c	码率	p_0^* (不考虑环)	p_0^* (考虑环)
3	6	0.5	0.04	0.0325
4	8	0.5	0.047	0.042
3	5	0.4	0.061	0.056
4	6	0.333	0.066	0.063

结束语 密度进化是分析和优化设计 LDPC 码的有效理论工具, Richardson 等人提出该理论时是基于无环因子图进行分析的,本文对基于有环因子图上的密度进化理论进行了初步的探讨。在获得因子图中环存在的概率表达式后,将其应用于迭代译码的密度进化中,得到了 BSC 信道下 Gallager 提出的译码算法的误码密度进化公式,从而得到了该信道情况下的译码门限。本文研究表明,在考虑因子图中存在环的情况下进行密度进化分析时,其获得的译码门限要低于不考虑环存在的情况。

参考文献

- Gallager R G. Low-density Parity-check Codes. IRE Trans Inform Theory, Jan 1962, 8: 21~28
- Moura J M F, Lu Jin, Zhang Haotian, Structured Low Density Parity-check Codes. IEEE Signal Processing Magazine, Jan 2004, 42~55
- Richardson T J, Urbanke R L. The capacity of low-density parity check codes under message-passing decoding. IEEE Trans Inform Theory, Feb 2001, 47: 599~618
- Kavcic A, Ma X, Mitzenmacher M. Binary intersymbol interference channels: Gallager codes, density evolution and code performance bound. IEEE Trans Inform Theory, Jul 2003, 49: 1636~1652
- Wang Chih-Chun, Kulkarni S R, Poor H V. Density Evolution for Asymmetric Memoryless Channels. IEEE Trans Inform Theory, Dec 2005, 51: 4216~4236