

基于非局部自相似性的谱聚类图像去噪算法

柯祖福¹ 易本顺^{1,2} 谢秋莹¹

(武汉大学电子信息学院 武汉 430072)¹ (武汉大学深圳研究院 深圳 518057)²

摘要 常见的图像去噪方法只是单独地利用了无噪图像或含噪图像的先验信息,并没有将这两种图像的先验信息有效地结合起来。针对这个问题,提出一种联合无噪图像块的先验信息和含噪图像块的非局部自相似性进行去噪的图像去噪算法。首先,对无噪图像块进行谱聚类,通过谱聚类进行学习,图像中的相似块被聚集到同一类,并将学习得到的聚类信息用于含噪图像块的聚类;然后,向量化同一类中的含噪图像块并聚集形成一个矩阵,该矩阵中包含的原始图像数据构成一个低秩矩阵;再通过一个低秩逼近过程估计出相应的原始图像数据;最后,根据逼近得到的原始图像数据重建图像。实验结果表明,相较于已有的自适应正则化的非局部均值去噪算法以及基于主成分分析和局部像素聚类的两级图像去噪算法,提出的算法不仅可以获得较大的峰值信噪比,而且还能较好地保存图像的细节,取得了更好的去噪效果。

关键词 图像去噪,谱聚类,非局部自相似性,低秩逼近

中图分类号 TP393 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.05.055

Image Denoising Method of Spectrum Clustering Based on Non-local Similarity

KE Zu-fu¹ YI Ben-shun^{1,2} XIE Qiu-ying¹

(School of Electronic Information, Wuhan University, Wuhan 430072, China)¹

(Shenzhen Institute of Wuhan University, Shenzhen 518057, China)²

Abstract The conventional image denoising algorithms just make use of the prior information of the natural image or the noise image alone, without effective combination of the prior information of two images to realize the image denoising. For this problem, a novel image denoising method which joins the prior information of the natural image and the non-local similarity of the noise image was proposed in this paper. Firstly, the similar blocks in natural image are clustered in the same class by the spectrum clustering, and the result of the spectrum clustering with the natural image is used to get the clustering of the noise image blocks. Then, the gotten same class blocks of the noise image are vectorized as a low-rank matrix. Secondly, the low-rank approximation process is adopted on the matrix to estimate the relative original image data. Finally, the original image can be reconstructed by the estimated image data. The experimental results show that compared with the RNL (adaptive regularization of the NL-Means) and LPG-PCA (two-stage image denoising by principal component analysis with local pixel grouping), the proposed algorithm can provide significant performance improvement with respect to both PSNR and local information preservation, which produces better denoising effect.

Keywords Image denoising, Spectrum clustering, Non-local self-similarity, Low-rank approximation

1 引言

现实中的数字图像在数字化和传输过程中常受到成像设备与外部环境噪声干扰等影响,使得图像的后续处理过程(如图像分割、图像重建和超分辨率等)不可避免地受到图像质量退化的影响。因此,从含噪图像中恢复出高质量的原始图像一直是数字图像处理领域的研究热点^[1-4]。

Rudin等人根据自然图像的梯度符合“重尾”分布的特点提出了全变分模型^[5]。该方法在去噪的同时可以较好地保存图像的边缘信息,但是也存在一些不足:图像的平坦区域产生

了阶梯效应,而图像的纹理区域过度平滑,并且造成了对比度下降。针对变分模型存在的问题,一些学者在空域调整正则项^[6],对该算法进行了改进。Buades等人提出了非局部均值图像去噪算法^[7]。该算法的核心是利用图像块的非局部自相似性进行去噪,针对每个待去噪的像素点使用像素邻域来表征其特征,在一个较大的窗口内搜索与该像素邻域相似的图像块,利用相似块的中心像素的加权平均来估计当前像素邻域的中心像素的像素值。在光滑区域和重复的纹理区域,该算法取得了良好的去噪效果;但是在一些特殊的结构区域,会因为找不到足够多的相似块而导致噪声残留。后来,许多学

到稿日期:2016-11-04 返修日期:2017-01-04 本文受深圳市基础研究项目(JCYJ20150630153917254)资助。

柯祖福(1990—),男,硕士生,主要研究方向为多媒体信息处理, E-mail: whukezufu@whu.edu.cn; 易本顺(1965—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为多媒体网络信息处理, E-mail: yibs@whu.edu.cn; 谢秋莹(1991—),女,硕士生,主要研究方向为多媒体信息处理, E-mail: 1073576294@qq.com。

者针对非局部均值图像去噪算法存在的不足,对其进行了改进。其中, Camille Sutour 等人结合变分模型和非局部均值图像去噪算法各自的优点,提出了自适应正则化的非局部均值图像去噪算法^[8]; Mahmoudi 等人提出在加权平均的过程中通过剔除不相关的邻域来加快算法的计算速度^[9]; Zhang 等人提出了更有效的搜索相似图像块和计算权值的方法^[10]。非局部均值图像去噪算法的提出具有划时代的意义,它引领研究人员开始关注如何充分利用图像本身存在的先验信息来构建去噪模型;同时涌现出了一类基于自相似性的图像去噪算法^[11-12]。为了利用自适应基的优越性,一些学者将主成分分析^[13-14]用于图像块的去噪。近年来,随着图像去噪理论的发展,低秩逼近开始被引入到图像去噪领域^[15],并且取得了良好的去噪效果。

为了有效地利用无噪图像和含噪图像中的先验信息进行去噪,本文结合低秩逼近过程构造了一个全局能量函数用于去噪。首先,使用谱聚类算法对无噪图像块进行学习并将得到的聚类信息用于含噪图像块的聚类;接着,向量化同一类中的含噪图像块并聚集形成一个矩阵,再采用低秩逼近过程估计出该矩阵所包含的原始图像数据;最后,多次迭代上述过程,当所构造的全局能量函数取得最小值时停止迭代,从而就能重建出原始图像。实验结果表明,本文提出的去噪模型能有效地利用无噪图像块的先验信息和含噪图像块的非局部自相似性来提升去噪效果。

2 谱聚类原理

聚类^[16]是根据数据之间存在的某种相似性对数据进行分组的过程,被广泛应用于数据分析领域。传统的聚类算法有 K-Means 和高斯混合模型等,通过最小化目标函数,它们在大多数情况下可以取得较好的聚类效果,但是在某些情况下可能会因为条件选取不当而陷入局部最优解,导致聚类出错。

近年来,学者们通过深入地研究,提出了谱聚类算法^[17-19]。相对于传统的聚类算法,该算法不仅具有较低的计算复杂度,而且具有更好的聚类准确性和鲁棒性。假设给定样本数据 $X=[x_1, x_2, \dots, x_n]$, 谱聚类算法首先根据样本点之间的相似度构造相似度矩阵 $S \in R^{n \times n}$, 其中 $S_{ij} = \exp(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2})$ 反映样本点 x_i 与 x_j 之间的相似度大小, 参数 σ 控制相似度随欧氏距离变化的衰减速度;然后将相似度矩阵转换为归一化的拉普拉斯矩阵:

$$L = I - D^{-1/2} S D^{-1/2} \quad (1)$$

其中, D 为对角矩阵: $D_{ij} = \sum_{j=1}^n S_{ij}$ 。假设样本数据被分为了 k 类, 由拉普拉斯矩阵的性质可知, S 中的非 0 元素会以对角矩阵的形式存在于 $L = \begin{bmatrix} L_1 & & \\ & \ddots & \\ & & L_k \end{bmatrix}$ 中, 而且 L 中有 k 个特征

值为 0。这些特征值对应的 k 个特征向量构成一个 $R^{n \times k}$ 的矩阵, 可以表示为:

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_k] = D^{1/2} E \quad (2)$$

其中, $v_i \in R^n$, $E = \begin{bmatrix} e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e_k \end{bmatrix}$, e_i 为单位向量, $i=1, 2, \dots$,

k 。令 $U_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sqrt{\sum_{r=1}^k V_{rj}^2}}$, $i=1, 2, \dots, k$, 将 V 归一化成矩阵 U , 再

采用简单的 K-Means 聚类算法就可以将矩阵 U 中的 n 行分为 k 类。谱聚类本质上是利用拉普拉斯矩阵对原始样本数据进行变换、降维, 提取样本数据的主要特征进行聚类。算法的流程如图 1 所示。

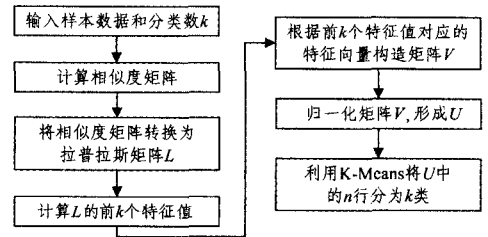


图 1 谱聚类算法的流程

3 基于非局部自相似性的谱聚类图像去噪算法

假设含噪图像模型为:

$$y = x + n \quad (3)$$

其中, y 为含噪图像, x 为无噪图像, n 是均值为 0、方差为 σ^2 的加性高斯白噪声。图像去噪的目的是从给定的含噪图像 y 中恢复出原始的 x 。

3.1 构建去噪模型

假设给定图像 x , 将 x 分块后形成的矩阵记为 $Rx = (R_1x, R_2x, \dots, R_nx)$, R_i 是块抽取因子, 表示从 x 中抽取第 i 个图像块。接着采用第 2 节中的谱聚类算法对 Rx 进行聚类, 并采用类标签来标示聚类结果, 记为 $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$, $c_i \in \{1, 2, \dots, K\}$ 。然后将聚类结果 C 用于含噪图像块的聚类, 令 $R_{c_i}y = (R_{k_1}y, R_{k_2}y, \dots, R_{k_{d(k)}}y)$ 为含噪图像聚类后第 c_i 类中向量化的图像块所构成的矩阵, $d(k)$ 表示第 c_i 类中相似块的数目。这些向量化的相似块所构成的矩阵可以表示为:

$$R_{c_i}y = Z_{c_i} + N_{c_i} \quad (4)$$

其中, Z_{c_i} 表示待恢复的原始图像数据, N_{c_i} 为其相应的高斯噪声。假设不同像素点处的噪声是相互独立的, 即

$$p(R_{c_i}y | Z_{c_i}) \propto \exp(-\frac{\|R_{c_i}y - Z_{c_i}\|_F^2}{\sigma^2}) \quad (5)$$

由于类别 c_i 中的图像块具有相似的结构, 相应的原始图像数据 Z_{c_i} 具有低秩的特性, 那么 $p(Z_{c_i}) = \exp(-\|Z_{c_i}\|_*)$, 然后通过最小化如下能量函数就可以估计出相应的 Z_{c_i} 。

$$E(Z_{c_i}) = \frac{1}{\sigma^2} \|R_{c_i}y - Z_{c_i}\|_F^2 + \tau \|Z_{c_i}\|_* \quad (6)$$

其中, τ 是一个正常数。式(6)是一个优化问题, 由文献^[15]可知其相应的解为:

$$\hat{Z}_{c_i} = U S_{\tau}(\Sigma) V^T \quad (7)$$

其中, $R_{c_i}y = U \Sigma V^T$ 是 $R_{c_i}y$ 的奇异值分解, $S_{\tau}(\Sigma)$ 是其相应的软阈值函数, Σ 表示对角矩阵。

给定含噪图像 y , 通过结合低秩逼近过程, 本文构建如下去噪模型用于恢复原始图像 x 。

$$(\hat{x}, \hat{C}, \hat{Z}_{c_i}) = \arg \min_{x, C, Z_{c_i}} \frac{\lambda}{\sigma^2} \|y - x\|_2^2 + \sum_{c_i=1}^K (\frac{1}{\sigma^2} \|R_{c_i}y - Z_{c_i}\|_F^2 + \tau \|Z_{c_i}\|_*) \quad (8)$$

其中, λ 是一个正常数。本文构建的去噪模型利用了无噪图像和含噪图像块的先验信息,对图像块在全局范围内依据相似性进行谱聚类,这相对于文献[8,13]在一个较大的局部窗口中进行块匹配来说可以更充分地利用图像中存在的冗余信息进行去噪。

3.2 算法实现

由式(8)所构造的全局目标函数可知,当给定含噪图像 y 时,还有两个未知量:类别信息 C 和待估计的原始图像 x ,本文采用交替最小化的策略求解这两个未知量。假设初始条件为 x^0 ,那么在第 ℓ 次迭代过程中,交替最小化的过程如下:

Step1 固定 $x^{\ell-1}$,采用谱聚类算法学习得到 C^ℓ 。

Step2 固定 C^ℓ ,根据式(7)求解低秩矩阵 $Z_{c_i}^\ell$, $c_i = 1, 2, \dots, K$,采用文献[15]中的加权奇异值二值化算法,令 $\sigma_j(Z_{c_i}^\ell)$ 是 $Z_{c_i}^\ell$ 的第 j 个奇异值,则相应的解为:

$$\hat{Z}_{c_i}^\ell = U(\Sigma - \tau \text{diag}(\alpha))_+ V^T \quad (9)$$

其中, $\alpha_j = 1/(\sigma_j(Z_{c_i}^\ell) + \epsilon)$, $(x)_+ = \max\{x, 0\}$ 。

Step3 固定 $Z_{c_i}^\ell$,根据目标函数 $\hat{x}^{\ell+1} = \arg \min_{x} \sum_{c_i=1}^K \|R_{c_i} y - Z_{c_i}^\ell x\|_F^2 + \lambda \|y - x\|_2^2$ 求解 $x^{\ell+1}$,这个优化问题相应的解为:

$$\hat{x}^{\ell+1} = (\lambda I + \sum_k R_{c_k}^T R_{c_k})^{-1} (\lambda y + \sum_k R_{c_k}^T Z_{c_k}^\ell) \quad (10)$$

得出 x 的进一步估计 $\hat{x}^{\ell+1}$ 后,再更新噪声强度 σ ,然后将更新的 σ 用于估计 $\hat{x}^{\ell+2}$ 。通过多次迭代使算法收敛后,就可以得到最终估计的 x 。本文提出的去噪算法的流程如下。

1. 输入:含噪图像 y ,噪声强度标准差 σ
2. 初始化:选择合适的噪声强度收缩因子 γ , $x^0 = y$, $\sigma^0 = \sigma$
3. 外部循环:for $\ell = 1 : L$
 - 3.1 根据 $x^{\ell-1}$ 使用谱聚类算法学习得到 C^ℓ
 - 3.2 内部循环:for $c_i = 1 : K$
 - 3.2.1 在含噪图像中抽取类标签为 c_i 的图像块,将其向量化并聚集形成矩阵 $R_{c_i} y$;
 - 3.2.2 根据式(9)求解 $Z_{c_i}^\ell$;
- End for
- 3.3 根据式(10)求得 x^ℓ
- 3.4 采用 $(\sigma^\ell)^2 = \gamma(\sigma^2 - \|y - x^\ell\|_2^2)$ 更新噪声强度,用于下一次迭代

End for

3.3 算法的收敛性

本文构建的去噪模型是一个非凸模型,因此设计的算法可能不能确保得到一个全局最优解。但是,大量的实验证明,本文设计的算法的收敛速度很快。在噪声强度 $\sigma = 50$ 、测试图像为 Cameraman 时的收敛曲线如图 2 所示。据此可知,本

文设计的算法在 15 次迭代内就可以收敛。

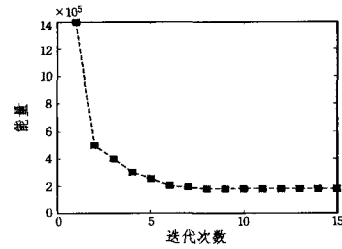


图 2 算法收敛曲线

4 实验结果及分析

为了验证本文提出的图像去噪算法的有效性,选取了 5 幅灰度级为 256 的测试图像 Peppers, Lena, Cameraman, Monarch 和 Akiyo 做了仿真实验,并将其与 LPG-PCA^[8] 和 RNL^[13] 图像去噪算法进行了对比。在仿真实验中,本文算法的相关参数设置如下:图像块的大小根据噪声强度自适应调整,分别设置为 $7 \times 7, 8 \times 8, 9 \times 9$ 和 10×10 ;对应的噪声强度分别为 $\sigma \leq 20, 20 < \sigma \leq 40, 40 < \sigma \leq 60$ 以及 $\sigma > 60$;噪声强度收缩因子 γ 以及参数 λ 分别固定为 0.67 和 0.18。以上这些参数的设置均为经验值。同时,用峰值信噪比(PSNR)、结构相似度(SSIM)和均方误差(MSE)作为客观评价指标衡量不同算法的去噪效果。3种客观评价指标的定义分别为:

$$\text{PSNR} = 10 \times \lg \left(\frac{255^2}{M \times N \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (y(i,j) - x(i,j))^2} \right) \quad (11)$$

$$\text{SSIM} = \frac{(2\mu_x \mu_y + c_1)(2\sigma_{xy} + c_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + c_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + c_2)} \quad (12)$$

$$\text{MSE} = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (y(i,j) - x(i,j))^2 \quad (13)$$

其中, y 为去噪后的图像, x 为原始无噪图像, M 与 N 表示图像的大小, μ_y 与 μ_x 分别为两幅图像的均值, σ_y^2 与 σ_x^2 分别为两幅图像的方差, σ_{xy} 为两幅图像的协方差, c_1 与 c_2 是用来维持稳定的常数。

本文算法和两种对比算法在不同测试条件下去噪后的客观评价指标对比结果如表 1—表 3 所列。其中,表 1 为 PSNR 对比结果,表 2 为 SSIM 对比结果,表 3 为 MSE 对比结果。由表 1 可知,相比于 LPG-PCA 和 RNL,本文算法去噪后的 PSNR 分别最高提高了 0.72dB 和 0.99dB;由表 2 可知,相比于两种对比算法,本文算法去噪后与原始图像具有更相似的结构,具有更好的结构保持度;由表 3 可知,本文算法去噪后的均方误差更小,估计的图像更接近原始图像。综合 3 种客观评价指标的对比结果可知,相比于对比算法,本文算法取得了更好的去噪效果。

表 1 去噪后 PSNR 的对比

Image	$\sigma = 10$			$\sigma = 20$			$\sigma = 30$		
	LPG-PCA	RNL	本文	LPG-PCA	RNL	本文	LPG-PCA	RNL	本文
Peppers	34.08	34.17	34.53	30.53	30.69	31.06	28.48	28.50	29.10
C. man	33.61	33.97	34.15	29.72	30.11	30.44	27.80	27.95	28.47
Lena	34.91	34.36	35.09	30.96	30.54	31.25	28.69	28.22	29.21
Monarch	34.07	33.72	34.62	30.04	30.01	30.57	27.72	27.64	28.35
Akiyo	38.10	37.12	38.43	33.92	33.16	34.37	31.41	31.00	31.89

表2 去噪后 SSIM 的对比

Image	$\sigma=10$			$\sigma=20$			$\sigma=30$		
	LPG-PCA	RNL	本文	LPG-PCA	RNL	本文	LPG-PCA	RNL	本文
Peppers	0.92	0.92	0.93	0.87	0.87	0.88	0.84	0.84	0.85
C. man	0.92	0.93	0.93	0.86	0.87	0.88	0.81	0.82	0.84
Lena	0.94	0.93	0.94	0.89	0.87	0.89	0.84	0.82	0.85
Monarch	0.95	0.94	0.96	0.91	0.91	0.92	0.87	0.87	0.88
Akiyo	0.96	0.95	0.97	0.93	0.92	0.94	0.89	0.88	0.90

表3 去噪后 MSE 的对比

Image	$\sigma=10$			$\sigma=20$			$\sigma=30$		
	LPG-PCA	RNL	本文	LPG-PCA	RNL	本文	LPG-PCA	RNL	本文
Peppers	25.36	24.92	18.26	57.48	55.38	43.54	92.23	92.12	79.19
C. man	28.28	25.93	20.47	69.25	63.39	58.43	107.33	104.28	91.83
Lena	21.06	24.09	20.23	52.17	57.50	51.97	87.96	97.95	78.07
Monarch	25.55	27.00	18.12	64.52	64.96	57.11	109.92	110.80	94.98
Akiyo	10.16	12.94	7.19	26.45	31.50	21.32	47.07	51.86	42.05

图3和图4展示了 $\sigma=30$ 、测试图像分别为Cameraman和Monarch时不同算法去噪后的主观效果对比。由图可知,本文算法在去噪的同时可以更好地保存图像的细节以及纹理结构,具有更好的可视化质量。在图3中,采用两种对比算法去噪后,人的面部、眼睛以及边缘处非常模糊;而采用本文算法去噪后,人脸的轮廓、边缘依旧清晰可见,保存了更多的细节信息。在图4中,采用两种对比算法去噪后,对比处的局部细节已经完全模糊,本文则相对较好。无论在客观指标还是主观效果上,与对比算法相比,本文算法的去噪效果都有了大幅度提升。



图3 Cameraman 去噪后局部细节的对比

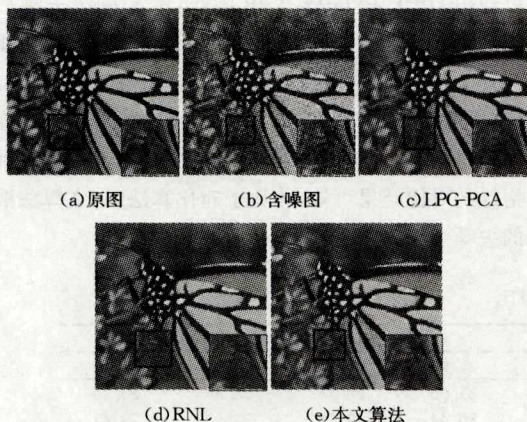


图4 Monarch 去噪后局部细节的对比

结束语 结合无噪图像的先验信息和含噪图像的非局部

自相似性,本文提出了基于非局部自相似性的谱聚类图像去噪算法。首先根据相似性将无噪图像块在全局范围内进行谱聚类并将得到的聚类信息用于含噪图像块的聚类,然后向量化同一类中的含噪图像块并聚集形成矩阵,再运用低秩逼近从相应的矩阵中恢复所包含的原始图像数据,最后通过聚集所有的图像数据重建原始图像。实验结果表明,由于充分利用了无噪图像和含噪图像的先验信息,相比于LPG-PCA和RNL,本文提出的图像去噪算法取得了更高的PSNR,能更好地保存图像的细节,具有更好的可视化质量。本方法在图像复原、增强等诸多领域都具有重要的应用价值。

参考文献

- [1] WANG Z P, ZHANG J S, CHEN G. Mixture noise image denoising using reweighted low-rank matrix recovery[J]. Computer Science, 2016, 43(1): 298-301. (in Chinese)
王圳萍, 张家树, 陈高. 加权低秩矩阵恢复的混合噪声图像去噪[J]. 计算机科学, 2016, 43(1): 298-301.
- [2] HUANG D A, KANG L W, WANG Y C, et al. Self-learning based image decomposition with applications to single image denoising[J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2014, 16(1): 83-93.
- [3] XIE K, ZHANG F. Overcomplete representation base image denoising algorithm[J]. Chinese Journal of Electronics, 2013, 41(10): 1911-1916. (in Chinese)
解凯, 张芬. 基于过完备表示的图像去噪算法[J]. 电子学报, 2013, 41(10): 1911-1916.
- [4] GUO Q, ZHANG C, ZHANG Y, et al. An efficient svd-based method for image denoising[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2016, 26(6): 868-880.
- [5] RUDIN L, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Phys. D, 1992, 60(1): 259-268.
- [6] GILBOA G, SOCHEN N, ZEEVI Y Y. Variational denoising of partly textured images by spatially varying constraints[J]. IEEE Trans. Image Process, 2006, 15(8): 2281-2289.
- [7] BUADES A, COLL B, MOREL J M. A non-local algorithm for image denoising[C]//Proc. CVPR, 2005.
- [8] SUTOUR C, DELEDALE C A, AUJOL J F. Adaptive regulari-

- zation of the NL-Means, application to image and video denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(8): 3506-3521.
- [9] MAHMOUDI M, SAPIRO G. Fast image and video denoising via non-local means of similar neighborhoods[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12(12): 839-842
- [10] ZHANG X D, FENG X C, Wang W W. Two-direction nonlocal model for image denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(1): 408-412.
- [11] XIAO J S, LI W H, JIANG H, et al. Three dimensional block-matching video denoising algorithm based on dual-domain filtering[J]. Journal on Communications, 2015, 36(9): 91-97. (in Chinese)
肖进胜,李文昊,姜红,等.基于双域滤波的三维块匹配视频去噪算法[J].通信学报,2015,36(9):91-97.
- [12] DABOV K, FOI A, KATKOVNIK V, et al. Image denoising by sparse 3-d transform-domain collaborative filtering[J]. IEEE Trans. on Image Process, 2007, 16(8): 2080-2095.
- [13] ZHANG L, DONG W S, ZHANG D, et al. Two-stage image denoising by principal component analysis with local pixel grouping[J]. Pattern Recognition, 2010, 43(4): 1531-1549.
- [14] HE Y M, GAN T, CHEN W F, et al. Adaptive denoising by singular value decomposition[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(4): 215-219.
- [15] GU S, ZHANG L, ZUO W, et al. Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising[C]// 2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Columbus, OH, 2014: 2862-2869.
- [16] JIN J G. Review of clustering method[J]. Computer Science, 2014, 41(11A): 288-293. (in Chinese)
金建国.聚类方法综述[J].计算机科学,2014,41(11A):288-293.
- [17] LUXBURG U V. A tutorial on spectral clustering[J]. Statistics & Computing, 2007, 17(17): 395-416.
- [18] CHUNG F. Spectral Graph Theory[M]. Am. Math. Soc, 1997.
- [19] ZHENG Q, LIU Z. Research on improved normalized cut spectral clustering algorithm[C]// 2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Yinchuan, 2016: 1981-1984.

(上接第 293 页)

理装载矩形时是基于不旋转的情况的,仍未对可以旋转的物品进行研究,后续研究工作将着眼于处理可以旋转的装载矩形。

参 考 文 献

- [1] HAR-PELED S, KAPLAN H, SHARIR M. Approximating the k-level in three-dimensional plane arrangements[C]// Acm-siam Symposium on Discrete Algorithms. 2016:1193-1212.
- [2] NADIRADZE G, WIESE A. On approximating strip packing with a better ratio than $3/2$ [C]// Acm-siam Symposium on Discrete Algorithms. 2016:1491-1510.
- [3] FERNAU H, LÓPEZ-ORTIZ A. Using Parametric Transformations Toward Polynomial Kernels for Packing Problems Allowing Overlaps[J]. ACM Transactions on Computation Theory, 2015, 7(3): 1-29.
- [4] LÓPEZ-CAMACHO E, TERASHIMA-MARIN H. A unified hyper-heuristic framework for solving bin packing problems[J]. Expert Systems with Applications, 2014, 41(15): 6876-6889.
- [5] ASTA S, OZCAN E. A Tensor Analysis Improved Genetic Algorithm for Online Bin Packing[C]// Genetic & Evolutionary Computation Conference. New York: ACM Press, 2015: 799-806.
- [6] ZHANG D F, PENG Y, ZHANG L L. A Multi-Layer Heuristic Search Algorithm for Three Dimensional Container Loading Problem[J]. Chinese Journal of Computers, 2012, 35(12): 2553-2561. (in Chinese)
张德富,彭煜,张丽丽.求解三维装箱问题的多层启发式搜索算法[J].计算机学报.2012,35(12):2553-2561.
- [7] LIU S, ZHU F H, LV Y S, et al. A Heuristic Orthogonal Binary Tree Search Algorithm for Three Dimensional Container Loading Problem[J]. Chinese Journal of Computers, 2015, 38(8): 1530-1543. (in Chinese)
刘胜,朱凤华,吕宜生,等.求解三维装箱问题的启发式正交二叉树搜索算法[J].计算机学报,2015,38(8):1530-1543.
- [8] SOSA-ASCENCIO A, TERASHIMA H. Conant-Pablos Grammar-based Selection Hyper-heuristics for Solving Irregular Bin Packing Problems[C]// Genetic and Evolutionary Computation Conference. New York: ACM Press, 2016: 111-112.
- [9] JANSEN K, ZHANG G. Maximizing the number of packed rectangles[M]// Scandinavian Workshop on Algorithm Theory (SWAT). 2004: 362-371.
- [10] HARREN R. Approximating the orthogonal knapsack problem for hypercubes[C]// International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP). 2006: 238-249.
- [11] FISHKIN A V, GERBER O, JANSEN K, et al. Packing weighted rectangles into a square[C]// Symposium on Mathematical Foundation of Computer Science (MFCS). 2005: 352-363.
- [12] LAWLER E. Fast approximation algorithms for knapsack problems[J]. Mathematics of Operations Research, 1977, 4(4): 339-356.
- [13] FISHKIN A V, GERBER O, JANSEN K. On weighted rectangle packing with large resources[C]// Theoretical Computer Science Conference (TCS). 2004: 237-250.
- [14] COFFMAN E G. Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms[J]. SIAM Journal on Computing, 1980, 9(4): 808-826.
- [15] HOPPER E, TRUTON B C H. An empirical investigation of meta-heuristic and heuristic algorithms for a 2D packing problem[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 128(1): 34-57.