

分数阶 Lü 系统中的混沌及其控制^{*})

武相军¹ 王兴元²

(河南大学计算中心 开封 475004)¹ (大连理工大学电信学院计算机系 大连 116024)²

摘要 研究了分数阶 Lü 系统的混沌动力学行为,数值模拟证明分数阶 Lü 系统存在混沌,并且得出分数阶 Lü 系统能产生混沌吸引子的最低阶数为 2.5 阶。利用线性反馈控制法研究了分数阶 Lü 混沌系统的混沌控制问题,得出了受控分数阶 Lü 混沌系统的混沌轨道达到不稳定平衡点时的条件,数值模拟进一步验证了该方法的有效性。

关键词 分数阶 Lü 系统,线性反馈控制法,混沌控制

Chaos in the Fractional Order Lü System and its Control

WU Xiang-Jun¹ WANG Xing-Yuan²

(Computing Center, Henan University, Kaifeng 475001)¹

(School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024)²

Abstract The chaotic behaviors in the fractional order Lü system is studied in this paper. Chaos exists in the fractional order Lü system with order less than 3 verified by numerical simulations. The lowest order we found to have chaos in this system is 2.5. The problem of control chaotic behavior of the fractional order Lü chaotic system using the linear feedback control method is addressed. The conditions suppressing chaos to unstable equilibrium point are derived. Numerical simulations show the effectiveness of the linear feedback method.

Keywords Fractional order Lü system, Linear feedback control method, Chaos control

分数阶微积分的理论研究已有 300 多年的历史,但是分数阶微积分理论由于长期没有实际应用背景而发展缓慢。近年来,国内外学者研究发现,在黏弹性系统、电介质偏振现象、电极-电解偏振现象、电磁波中存在分数阶动力系统,从而使分数阶微积分理论应用到物理和工程领域成为一个热点研究课题^[1,2]。最近,分数阶混沌系统引起人们广泛的兴趣和深入的研究。在 Lorenz 混沌系统、Duffing 混沌系统、Chua's 混沌电路、Rössler 混沌和超混沌系统以及临界混沌系统^[7]中,通过数值仿真,发现当系统的阶数为分数时仍出现混沌状态^[3-7],且更能反映系统呈现的工程物理现象,从而促进了分数阶混沌的研究以及分数阶微积分理论的发展。近来,人们尝试研究分数阶混沌系统的控制与同步问题。文[8]研究了分数阶 Chen 系统的混沌特性和分数阶 Chen 系统的混沌控制;文[9]讨论了分数阶混沌系统的混沌同步问题。

分数阶微分有多种定义^[1,2,10],在以上文献的分数阶微分研究中,应用的都是 Riemann-Liouville 定义的分数阶微分,其数学表达式如下:

$$\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n f(t)}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1)$$

式中, $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数, $n-1 \leq \alpha < n$, α 为分数, n 为正整数。如果函数 $f(t)$ 的初始值均为零,则(1)式的拉普拉斯变换表达式可表示为

$$L\left\{\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}}\right\} = s^{\alpha} L\{f(t)\} \quad (2)$$

使用 Riemann-Liouville 定义的分数阶微分,必须精确知道分数阶微分的未知函数在初始时间 $t=0$ 时的初始值^[10]。在实际应用中,函数 $f(t)$ 可能有某种特定的物理意义,但是

它的分数阶微分就不一定具有这样的意义了,因此函数 $f(t)$ 的初始值常常难以测度和给定。

下面我们看另一种分数阶微分定义——Caputo 定义的分数阶微分^[2,11],其数学表达式如下:

$$\frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}} = J^{n-\alpha} \frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad (3)$$

式中, $n-1 \leq \alpha < n$, α 为分数, n 为正整数, J^{β} 是 $\beta(\beta > 0)$ 阶 Riemann-Liouville 积分算子,定义如下

$$J^{\beta} \psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \quad (4)$$

使用 Caputo 定义的分数阶微分,对于初始值 $f(0)$, $f'(0)$, \dots , $f^{(n-1)}(0)$,由于它们具有各自的含义,因此这些初始值容易测度和确定。

如果使用 Riemann-Liouville 定义的分数阶微分,需要预先给定初始条件,并且要求这些初始条件具有相同的意义或性质;而 Caputo 定义的分数阶微分允许非同质的初始条件;在初始条件完全相同的情况下, Riemann-Liouville 定义的分数阶微分和 Caputo 定义的分数阶微分是等价的^[1,2]。基于以上的分析,作者使用 Caputo 定义的分数阶微分研究了分数阶 Lü 系统的混沌动力学行为,给出了数值仿真结果,并且利用线性反馈控制法研究了分数阶 Lü 系统的混沌控制,数值模拟进一步验证了该控制方法的有效性。

1 分数阶微分及其近似计算

2002 年,吕金虎等人发现了介于 Lorenz 系统^[12]和 Chen 系统^[13]之间的一个新系统,即 Lü 系统^[14],它由如下的三维自治方程组来描述

^{*}) 本文得到国家自然科学基金(编号:60573172)和河南省自然科学基金(编号:0511011400 和 0611054700)资助。

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = -xz+cy, \\ \dot{z} = xy-bz \end{cases} \quad (5)$$

其中 x, y, z 为系统的状态变量, a, b 和 c 为系统的控制参数。当参数 $a=36, b=3$ 和 $c=20$ 时, 系统(5)进入混沌状态, 图1所示为 Lü 系统的混沌吸引子。

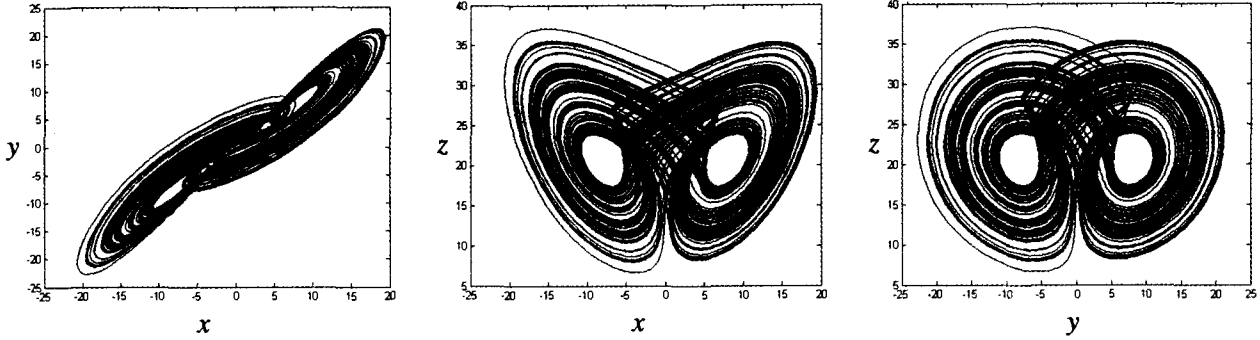


图1 Lü系统的混沌吸引子

分数阶 Lü 系统可用如下的三维自治微分方程组来描述

$$\begin{cases} \frac{d^{\theta_1} x}{dt^{\theta_1}} = a(y-x) \\ \frac{d^{\theta_2} y}{dt^{\theta_2}} = -xz+cy \\ \frac{d^{\theta_3} z}{dt^{\theta_3}} = xy-bz \end{cases} \quad (6)$$

这里 $0 < \theta_i \leq 1 (i=1, 2, 3)$ 。

根据文[15~17], 我们可以得到系统(6)的预测-修正算法, 该方法是 Adams-Bashforth-Moulton 方法的一般化。微分方程

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), 0 \leq t \leq T \\ x^{(k)}(0) &= x_0^{(k)}, k=0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

等价于如下的 Volterra 积分方程^[16]

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau, x)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (7)$$

假设 $h=T/N, t_n=nh (n=0, 1, 2, \dots, N)$, 则式(7)可用如下式子表示:

$$\begin{aligned} x_h(t_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, x_h^*(t_{n+1})) \\ &\quad + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, x_h(t_j)) \end{aligned}$$

式中,

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^{\alpha+1}, & j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j=n+1 \end{cases}$$

$$x_h^*(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, x_h(t_j)),$$

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha).$$

误差估计为 $e = \max |x(t_j) - x_h(t_j)| = O(h^\rho) (j=0, 1, \dots, N)$, 其中 $\rho = \min(2, 1+\alpha)$ 。

使用上述方法, 可将分数阶系统(6)离散化为如下表达式:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_0 + \frac{h^{\theta_1}}{\Gamma(\theta_1+2)} a(y_{n+1}^* - x_{n+1}^*) + \frac{h^{\theta_1}}{\Gamma(\theta_1+2)} \sum_{j=0}^n a_{1,j,n+1} a(y_j - x_j) \\ y_{n+1} = y_0 + \frac{h^{\theta_2}}{\Gamma(\theta_2+2)} (-x_{n+1}^* z_{n+1}^* + cy_{n+1}^*) + \frac{h^{\theta_2}}{\Gamma(\theta_2+2)} \sum_{j=0}^n a_{2,j,n+1} (-x_j z_j + cy_j) \\ z_{n+1} = z_0 + \frac{h^{\theta_3}}{\Gamma(\theta_3+2)} (x_{n+1}^* y_{n+1}^* - bz_{n+1}^*) + \frac{h^{\theta_3}}{\Gamma(\theta_3+2)} \sum_{j=0}^n a_{3,j,n+1} (x_j y_j - bz_j) \end{cases} \quad (8)$$

式中,

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\theta_1)} \sum_{j=0}^n \beta_{1,j,n+1} a(y_j - x_j) \\ y_{n+1}^* = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\theta_2)} \sum_{j=0}^n \beta_{2,j,n+1} (-x_j z_j + cy_j), \\ z_{n+1}^* = z_0 + \frac{1}{\Gamma(\theta_3)} \sum_{j=0}^n \beta_{3,j,n+1} (x_j y_j - bz_j) \end{cases}$$

这里

$$a_{i,j,n+1} = \begin{cases} n^{\theta_i+1} - (n-\theta_i)(n+1)^{\theta_i+1}, & j=0 \\ (n-j+2)^{\theta_i+1} + (n-j)^{\theta_i+1} - 2(n-j+1)^{\theta_i+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j=n+1 \end{cases}$$

$$\beta_{i,j,n+1} = \frac{h^{\theta_i}}{\theta_i} ((n-j+1)^{\theta_i} - (n-j)^{\theta_i}), \quad 0 \leq j \leq n, i=1, 2, 3.$$

2 分数阶 Lü 混沌系统的数值模拟

在以下的数值模拟中, 分数阶系统(6)的参数仍然取 $a=36, b=3$ 和 $c=20$ 。作者分别利用第2节分数阶系统的离散化方法和 Wolf 求系统最大 Lyapunov 指数的方法^[18], 研究了当初始值分别取 $x(0)=1, y(0)=2$ 和 $z(0)=3, \theta_i (0 < \theta_i \leq 1, i=1, 2, 3)$ 取不同值时, 分数阶 Lü 系统的动力学特性。

$$(1) \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \geq 2.5$$

当 $\theta_1=0.9, \theta_2=0.94$ 和 $\theta_3=0.96$ 时, 分数阶系统(6)的相图如图2所示, 其最大 Lyapunov 指数为 0.5468, 可见分数阶系统(6)确实处于混沌状态。当 $\theta_1=0.9, \theta_2=0.8$ 和 $\theta_3=0.8$ 时, 分数阶系统(6)的相图如图3所示, 其最大 Lyapunov 指数为 0.3954, 可见分数阶系统(6)是混沌系统。当 $\theta_1=0.9, \theta_2=0.7$ 和 $\theta_3=0.9$ 时, 分数阶系统(6)的相图如图4所示,

其最大 Lyapunov 指数为 0.3216, 可见系统(6)是混沌系统。 样处于混沌状态。
 同理, 当 $0 < \theta_i \leq 1 (i=1, 2, 3)$ 且 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \geq 2.5$ 时, 系统同

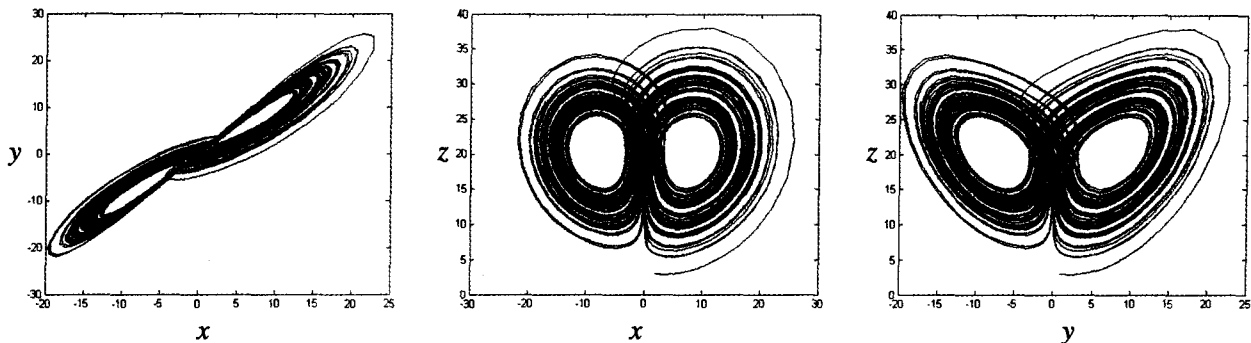


图 2 $\theta_1=0.9, \theta_2=0.94$ 和 $\theta_3=0.96$ 时分数阶 Lü 系统的相图

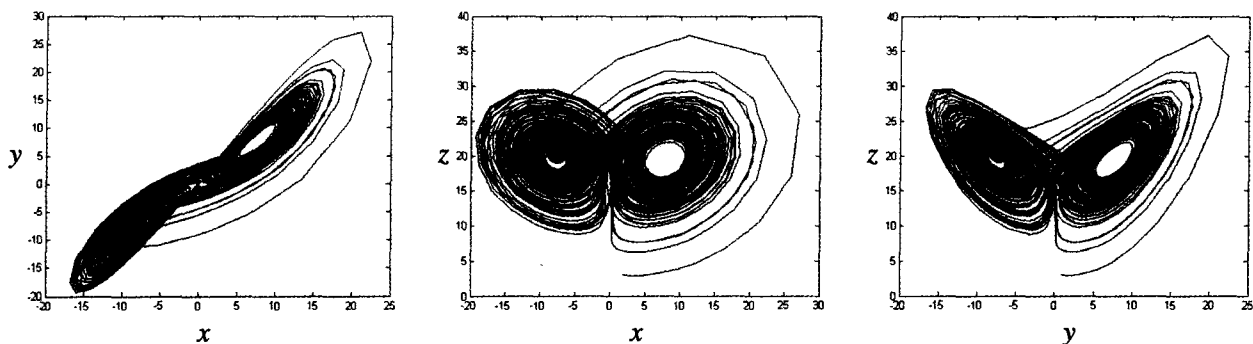


图 3 $\theta_1=0.9, \theta_2=0.8$ 和 $\theta_3=0.8$ 时分数阶 Lü 系统的相图

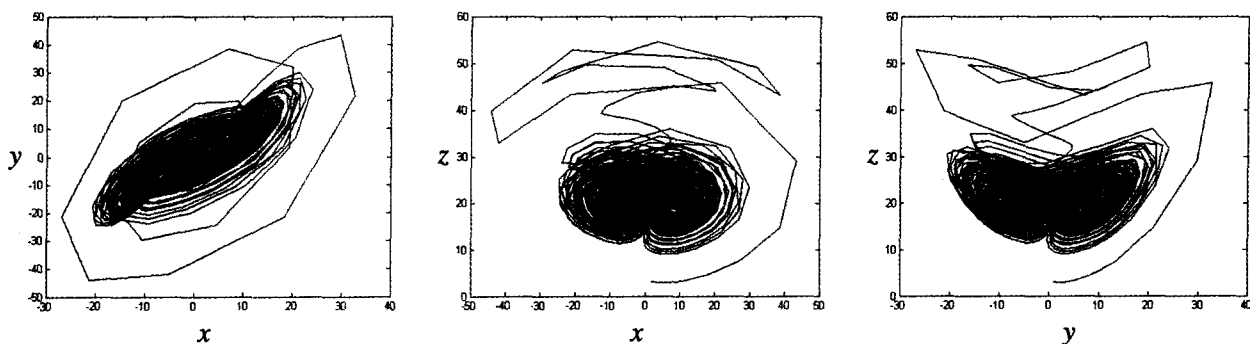


图 4 $\theta_1=0.9, \theta_2=0.7$ 和 $\theta_3=0.9$ 时分数阶 Lü 系统的相图

(2) $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 2.5$

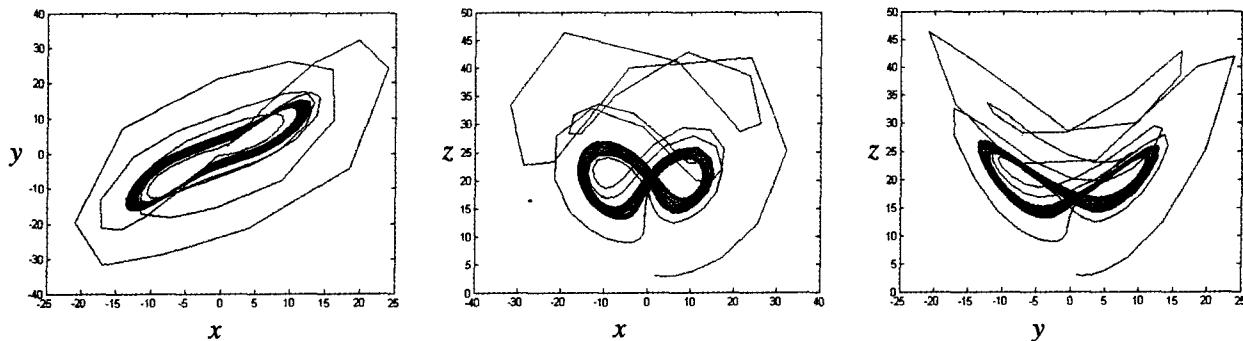


图 5 $\theta_1=0.9, \theta_2=0.7$ 和 $\theta_3=0.7$ 时分数阶 Lü 系统的相图

当 $\theta_1=0.9, \theta_2=0.7$ 和 $\theta_3=0.7$ 时, 系统(6)的相图如图 5 所示, 系统的运动轨道趋向于一个极限环(不稳定周期轨道), 可见系统(6)不是混沌的。 同理, 当 $0 < \theta_i \leq 1 (i=1, 2, 3)$ 且 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 2.5$ 时, 系统同 (下转第 210 页)

VM 更为显著的识别效果。

参 考 文 献

- 1 Taylor J S, Cristianini N. Further results on the margin distribution. In: Proceedings of the 12th Conference on Computational Learning Theory, 1999
- 2 Karakoulas G J, Taylor J S. Optimizing classifiers for imbalanced training sets. NIPS, 1999, 11: 253~259
- 3 Schlapbach A, Bunke H. Using HMM based Recognizers for writ-

- er identification and verification. *Frontiers in Handwriting Recognition*, 2004, 167~172
- 4 Gough J, Chothia C. SUPERFAMILY: HMMS representing all proteins of known structure. SCOP sequence searches, alignments and genome assignments. *Nucleic Acids Research*, 2002, 30(1): 268~272
- 5 Baum L E, Sell G R. Growth functions for transformations on manifolds. *Pac J Math*, 1968, (27)2: 211~227
- 6 Baker J K. The dragon system-An overview. *IEEE Acoust Speech Signal Processing*, 1975, A ASSP-23(1): 24~29

(上接第 206 页)

$+\theta_2 + \theta_3 < 2.5$ 时, 系统同样也不是混沌的。

综合(1)、(2), 可知分数阶 Lü 系统能产生混沌吸引子的最低阶数为 2.5 阶。

3 分数阶 Lü 混沌系统的控制

在本节中, 我们研究将分数阶 Lü 混沌系统镇定到它的不稳定平衡点。取 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0.9$, 显然, 分数阶 Lü 系统处于混沌状态, 并且 $E(0, 0, 0)$ 是它的一个不稳定平衡点。下面我们利用线性反馈控制法将分数阶 Lü 混沌系统的运动轨道镇定到不稳定平衡点。

受控分数阶 Lü 系统为

$$\begin{cases} \frac{d^\theta x}{dt^\theta} = a(y-x) - u_1 \\ \frac{d^\theta y}{dt^\theta} = -xz + cy - u_2 \\ \frac{d^\theta z}{dt^\theta} = xy - bz - u_3 \end{cases} \quad (9)$$

这里 $\theta = 2.9$, $u_i (i = 1, 2, 3)$, 是反馈外部输入控制, 可使系统

(6) 的混沌运动轨道镇定到不稳定平衡点 E 上。设计线性反馈控制器为

$$\begin{cases} u_1 = k_1(x - \bar{x}) \\ u_2 = k_2(y - \bar{y}), \\ u_3 = k_3(z - \bar{z}) \end{cases} \quad (10)$$

式(10)中 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 代表系统(6)的不稳定平衡点 E , k_1, k_2 和 k_3 是反馈增益。

受控系统(9)在平衡点处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a-k_1 & a & 0 \\ 0 & c-k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -b-k_3 \end{bmatrix},$$

其特征方程为

$$(\lambda + a + k_1)(\lambda - c + k_2)(\lambda + b + k_3) = 0$$

显然, 特征方程的特征根为

$$\lambda_1 = -a - k_1, \lambda_2 = c - k_2, \lambda_3 = -b - k_3$$

当特征方程的实特征根均为负值时, 受控系统(9)渐近稳定地趋于平衡点 E , 可求得 $k_1 > -36, k_2 > 20$ 和 $k_3 > -3$ 。

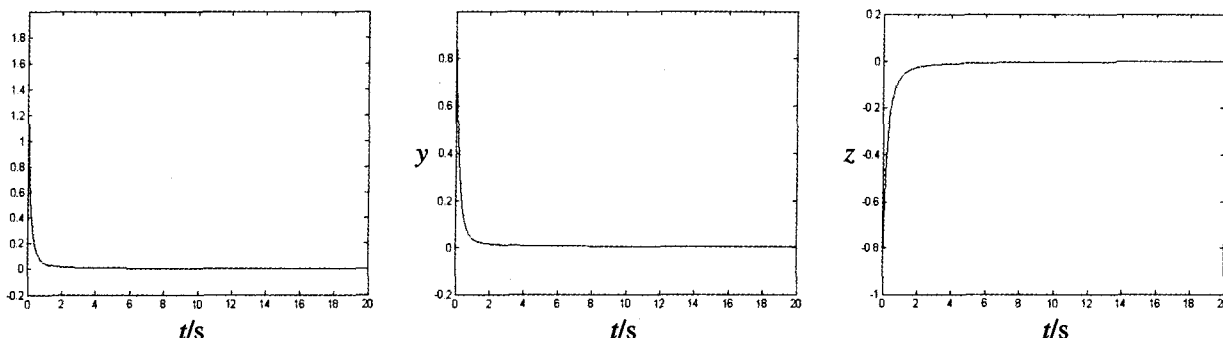


图 6 利用线性反馈法镇定分数阶 Lü 系统到平衡点时 $x(t)$ 、 $y(t)$ 和 $z(t)$ 的变化曲线

图 6 给出了当选取受控系统(9)的初始点为: $x(0) = 2, y(0) = 1$ 和 $z(0) = -1$, 取 $k_1 = 0, k_2 = 25$ 和 $k_3 = 0$ 时, 受控系统(9)镇定到平衡点 $E(0, 0, 0)$ 上的结果。由图 6 可见: 当 t 分别接近 5.8s, 7.8s 和 13.8s 时, $x(t)$ 、 $y(t)$ 和 $z(t)$ 分别稳定到了零点, 即受控系统(9)被镇定到平衡点 $E(0, 0, 0)$ 上。

结论 本文研究了分数阶 Lü 系统的混沌动力学特性, 数值模拟证明分数阶 Lü 系统确实存在混沌, 并且得出分数阶 Lü 系统能产生混沌吸引子的最低阶数为 2.5 阶。作者利用线性反馈控制器成功地将分数阶 Lü 混沌系统镇定到平衡点。

参 考 文 献

- 1 Podlubny I. *Fractional differential equations* (New York: Academic Press), 1999
- 2 Hifer R. *Applications of fractional calculus in physics* (New Jersey: World Scientific), 2001

- 3 Grigorenko I, Grigorenko E. *Phys. Rev. Lett.* 91 34101, 2003
- 4 Gao X, Yu J B. *Chaos Solitons Fract.*, 24 1097, 2005
- 5 Hartly T T, Lorenzo C F, Qammer H K. *IEEE Trans. CAS I*, 42 485, 1995
- 6 Li C G, Chen G R. *Physica A*, 341 55, 2004
- 7 王发强, 刘崇新. *物理学报*, 55 3922, 2006
- 8 Li C G, Chen G R. *Chaos Solitons Fract.*, 22 549, 2004
- 9 Li C G, Liao X F, Yu J B. *Phys. Rev.*, E 68 67203, 2003
- 10 Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. *Fractional integrals and derivatives: theory and applications* (Amsterdam: Gordon and Breach), 1993
- 11 Caputo M. *Il Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 13 529, 1967
- 12 Lorenz E N. *J. Atmos. Sci.* 20 130, 1993
- 13 Chen G R, Ueta T. *Int. J. Bifur. Chaos*, 9 1465, 1993
- 14 Lü J, Chen G R. *Int. J. Bifur. Chaos*, 12 659, 2002
- 15 Diethelm K. *Elec. Trans. Numer. Anal.*, 5 1, 1997
- 16 Diethelm K, Ford N J. *J. Math. Anal. Appl.*, 265 229, 2002
- 17 Diethelm K, Ford N J. *Nonlinear Dyn.*, 29 3, 2002
- 18 Wolf A, Swinney J B, Swinney H L. *Physica D*, 16 285, 1985