

# 一种具有随机邻居元胞自动机的混沌特性<sup>\*</sup>

刘向东<sup>1,2</sup> 张俊星<sup>1</sup> 焉德军<sup>1</sup> 何希勤<sup>2</sup>

(大连民族学院非线性信息技术研究所 大连 116600)<sup>1</sup> (辽宁科技大学理学院 鞍山 114004)<sup>2</sup>

**摘要** 研究了一种具有随机邻居的 2 值元胞自动机模型的动力学性质,给出了其理想状态的动力学模型,分析了该模型的混沌特性,并通过分叉图、Lyapunov 指数和 Schwarzian 导数解释了模型由倍分叉通向混沌的过程。最后,通过计算对比,分析了非理想状态与理想状态下模型动力学性质的差异。

**关键词** 元胞自动机,混沌,分叉图, Lyapunov 指数

## Chaos of a Kind of Cellular Automaton with Random Neighborhoods

LIU Xiang-Dong<sup>1,2</sup> ZHANG Jun-Xing<sup>2</sup> YAN De-Jun<sup>1</sup> HE Xi-Qin<sup>2</sup>

(The Research Institute of Nonlinear Information Technology, Dalian Nationalities University, Dalian 116600)<sup>1</sup>

(Faculty of Science, Liaoning University of Science and Technology, Anshan 114044)<sup>2</sup>

**Abstract** The dynamical characters of a kind of two value cellular automaton with random neighborhoods are studied. The dynamical model of the automaton in the ideal condition is given out, and the chaotic properties of the model are analyzed. The bifurcation plot, the Lyapunov exponents, and the Schwarzian derivative of the model are calculated to explain that the route to chaos the model takes is period-doubling bifurcations. Finally, the different behaviors between the ideal model and non-ideal model are pointed out.

**Keywords** Cellular automaton, Chaos, Bifurcation diagram, Lyapunov exponent

## 1 引言

元胞自动机构建简单,物理意义直观,构成方式繁杂,变种多样,行为复杂,因此成为模拟复杂现象、解决复杂问题的有力工具<sup>[1,2]</sup>。元胞自动机尤其适合简单机制引发的复杂现象的原理层次的研究。正是基于对这些机制的探讨,对于元胞自动机行为分类的研究成为元胞自动机的一个重要的研究课题和核心理论,其中最具影响力的当属 S. Wolfram 在上世纪 80 年代初做的基于动力学行为的元胞自动机分类<sup>[3]</sup>。S. Wolfram 在详细研究一维元胞自动机的演化行为及大量的计算机实验的基础上,将所有元胞自动机的动力学行为归纳为四大类。

(1) 平稳型:自任何初始状态开始,经过一定时间演化后,元胞空间趋于一个空间平稳的构形。

(2) 周期型:经过一定时间演化后,元胞空间趋于一系列简单的固定结构。

(3) 混沌型:自任何初始状态开始,经过一定时间演化后,元胞自动机表现出混沌的非周期行为,所生成的结构的统计特征不再变化,通常表现出分形特征。

(4) 复杂型:出现复杂的局部结构,或者说是局部的混沌,其中有些结构会不断地传播。

从研究元胞自动机的角度讲,最具研究价值的是具有第 3、4 类行为的元胞自动机。因为第 3 类元胞自动机可以仿真很多混沌系统,而第 4 类元胞自动机具有“突现计算”功能,可以用作广义计算机以仿真任意复杂的计算过程。

S. Wolfram 还通过计算机实验近似地给出了一维元胞自动机中上述四种吸引子或模式所占的比例,见表 1。可以看出,具有一定局部结构的复杂模式出现的概率相对要小一

<sup>\*</sup>国家自然科学基金资助项目(60573124);辽宁省自然科学基金资助项目(20040948)。刘向东 教授,博士,主要研究方向为非线性信息处理和计算机网络;张俊星 副教授,博士,主要研究方向为信号处理和网络技术;焉德军 副教授,博士,主要研究方向为非线性信息处理;何希勤 教授,博士,主要研究方向为人工智能。

- 2 南加州破获保险诈骗案 逮捕逾百位华人. <http://www.chineseinla.com/t/page-viewtopic/t-4616.html>
- 3 Tang Y. Online Reputation Scoring from Historical Feedbacks Based on Partially-ordered Similarity. In: Electronic Commerce Research and Application. Elsevier, second revision. Jan. 2007
- 4 陈健. 税务稽查选案中的 KDD 应用. 系统工程, 1999, 17(5): 62~66
- 5 Chiu C, Tsai C. A web services-based collaborative scheme for credit card fraud detection. In: Proc. of 2004 IEEE International Conference on e-Technology, e-Commerce and e-Service, 2004
- 6 Xu J, Sung A H, Liu Q. Tree based behavior monitoring for adaptive fraud detection. In: 18<sup>th</sup> International Conference on Pattern Recognition, Vol. 1. Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society, 2006. 1208~1211
- 7 Kumar S, Spaford E H. A pattern matching model for misuse intrusion detection. In: Proceedings of the 17th National Computer Security Conference, 1994. 11~21
- 8 Wheeler R, Aitken S. Multiple algorithms for fraud detection. Knowledge Based Systems, 2000, 13(3): 93~99
- 9 Weatherford M. Mining for fraud. IEEE Intelligent Systems, 2002, 17(4): 4~6
- 10 Phua C, Gayler R, Lee V. On the Approximate Communal Fraud Scoring of Credit Applications
- 11 Phua C, Lee V, Smith K, et al. A comprehensive survey of data mining-based fraud detection research. Artificial Intelligence Review.
- 12 Tang Y. Partially ordered template-based matching algorithm for financial time series. In: Proc. IEA-AIE2006. Lecture Notes in Computer Science, Vol 4031. France: Springer Berlin/Heidelberg, 2006. 1059~1070

些,而第三种混沌型出现的概率最大,并且其出现概率随状态数和邻居半径的增大呈现增大的趋势。

表1 一维元胞自动机中各类吸引子所占比例

动力学行为	$k=2, r=1$	$k=2, r=2$	$k=2, r=3$	$k=3, r=4$
1) 平稳型	0.50	0.25	0.09	0.12
2) 周期型	0.25	0.16	0.11	0.19
3) 混沌型	0.25	0.53	0.73	0.60
4) 复杂型	0.00	0.06	0.06	0.07

表中  $k$  代表状态数,  $r$  代表邻居半径。

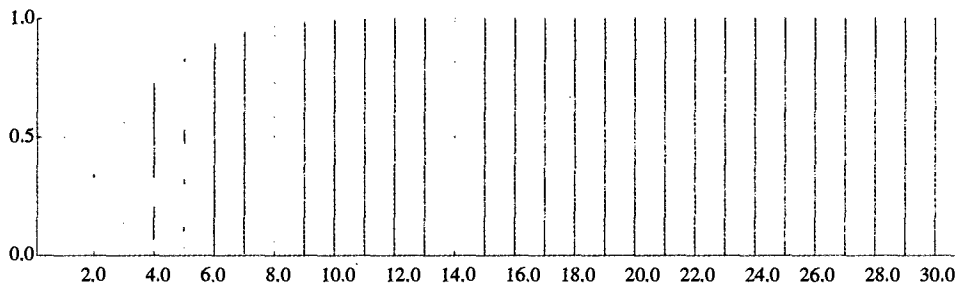
由于模拟不同实际问题的需要,人们开始大量尝试将随机性引入元胞自动机模型。尽管这一方法部分违背了元胞自动机演化的确定性要求,但仿真实际物理过程的方便性还是促进了这一问题的研究<sup>[4]</sup>。正是基于这一想法,本文研究了一种简单的带有随机邻居的2值元胞自动机的动力学性质,展示了其混沌特性,利用分叉图、Lyapunov 指数和 Schwarzian 导数解释了其由倍分叉通向混沌的过程。与传统元胞自动机类似,随邻居半径增大,这种随机邻居的元胞自动机混沌特性也在增强。

## 2 具有随机邻居的元胞自动机模型

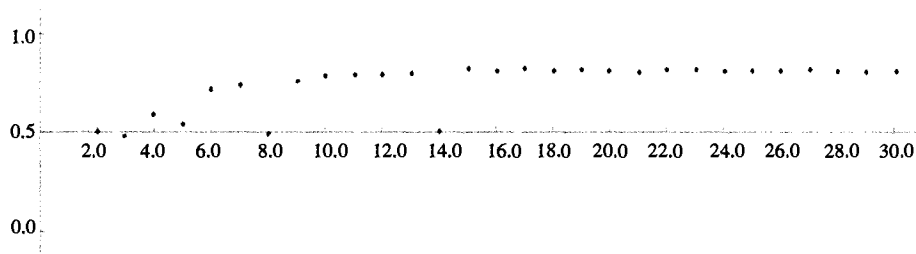
考虑具有  $M$  个元胞  $c_1, c_2, \dots, c_M$  的随机元胞自动机模型,其中每个元胞  $c_i (i = 1, 2, \dots, M)$  只取 0、1 两个状态中的一个。在演化过程中,所有元胞同步演化。每次演化每个元胞都随机选取  $n$  个 ( $n$  是正整数,且  $n \ll M$ ) 元胞作为其邻居单元。演化采用如下规则:

$$c_i(t+1) = \begin{cases} 1 & c_i(t)=0, \text{且随机选取的 } n \text{ 个邻居都是 } 0 \\ & \text{或 } c_i(t)=1, \text{且随机选取的 } n \text{ 个邻居都是 } 1 \\ 0 & c_i(t)=0, \text{且随机选取的 } n \text{ 个邻居不全为 } 0 \\ & \text{或 } c_i(t)=1, \text{且随机选取的 } n \text{ 个邻居不全为 } 1 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq M \quad (1)$$

由于该模型是一个随机模型,我们只能在概率意义下讨



(a)  $f(p, n)$  关于不同参数  $n$  对应的分叉图



(b)  $f(p, n)$  关于不同参数  $n$  对应的 Lyapunov 指数

图1 理想状况下系统对邻居个数的分叉图与 Lyapunov 指数

论其动力学特性。我们选取  $t$  时刻每个元胞取状态 1 的概率  $p(t)$  为指标。记  $t$  时刻状态值为 1 的元胞的个数为  $M_1(t)$ , 状态值为 0 的元胞的个数为  $M_0(t)$ ,  $M_1(t) + M_0(t) = M$ 。当  $M \rightarrow +\infty$  时,有

$$p(t) = \frac{M_1(t)}{M}$$

该随机元胞自动机经过时间从  $t$  到  $t+1$  的演化。对照演化规则(1)可知,在  $t+1$  时刻,  $M_1(t)$  中有  $M_1(t) p^n(t)$  个元胞状态是 1,  $M_1(t) [1 - p^n(t)]$  个元胞状态是 0;  $M_0(t)$  中有  $M_0(t) [1 - p(t)]^n$  个元胞状态是 1,  $M_0(t) \{1 - [1 - p(t)]^n\}$  个元胞状态是 0。这样,在  $t+1$  时刻,状态值为 1 的元胞的个数  $M_1(t+1) = M_1(t) p^n(t) + M_0(t) [1 - p(t)]^n$ ; 状态值为 0 的元胞的个数  $M_0(t+1) = M_1(t) [1 - p^n(t)] + M_0(t) \{1 - [1 - p(t)]^n\}$ ; 显然,  $M_1(t+1) + M_0(t+1) = M$ 。进一步可以得到:

$$p(t+1) = \frac{M_1(t) p^n(t) + M_0(t) [1 - p(t)]^n}{M} = p^{n+1}(t) + [1 - p(t)]^{n+1} \quad (2)$$

其中  $n$  是正整数,且  $n \ll M$ , 代表了随机邻居的个数。式(2)对应了理想状态下该元胞自动机模型随邻居个数演化的离散动力学模型。

## 3 系统随邻居个数演化的混沌性

### 3.1 理论模型的动力学性质

我们首先分析理想状态下得到的理论模型(2)的动力学性质。(2)对应的迭代映射为

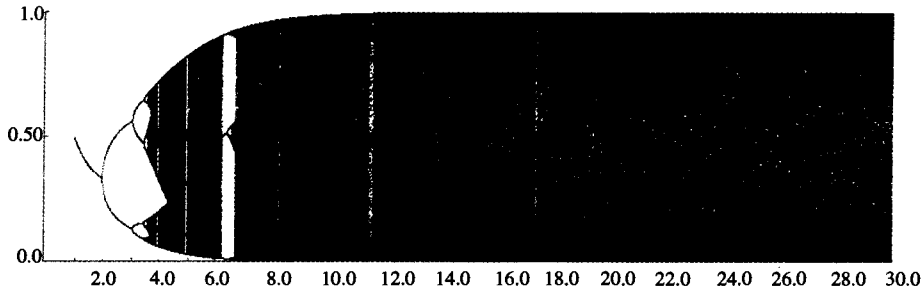
$$f(p, n) = p^{n+1} + (1-p)^{n+1} \quad (3)$$

图1是  $f(p, n)$  对应参数  $n$  从 1 到 30 的取整数点的分叉图和 Lyapunov 指数,其中 Lyapunov 指数利用  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln |$

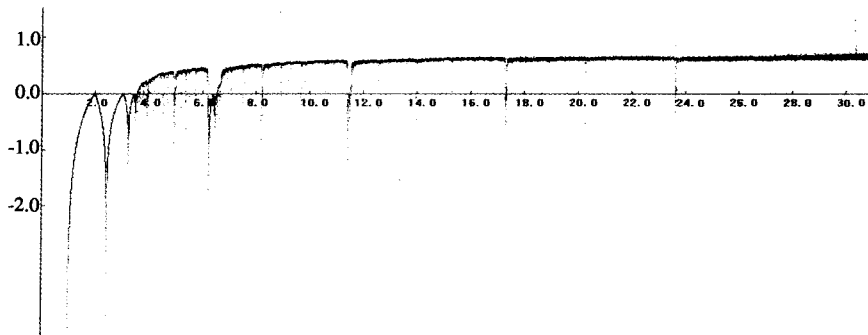
$\frac{df}{dp} |_{p_i}$  来计算<sup>[5]</sup>。

正整数参数  $n$  对应的分叉图和 Lyapunov 指数显示模型在  $n = 1, 2, 3, 8, 14$  时具有吸引周期窗口, 周期分别为 1、2、2、8、6, 其它参数值则对应了混沌吸引子。  $n = 1$  时系统的 Lyapunov 指数为  $-\infty$ , 图中没有表示。在  $n = 5$  时, 系统是混沌的, 对应了正的 Lyapunov 指数, 但吸引子是由 5 段小区

间构成的, 并没有形成一个连续的区域。由于离散参数分辨率低, 很难发现系统随参数演化的规律。为了更清楚地了解模型随参数  $n$  演化的动力学性质, 考虑参数连续变化时模型的动力学特性, 其对应的分叉图与 Lyapunov 指数如图 2 所示。



(a)  $f(p, n)$  关于实参数  $n$  对应的分叉图



(b)  $f(p, n)$  关于实参数  $n$  对应的 Lyapunov 指数

图 2 理想状况下系统对连续参数的分叉图与 Lyapunov 指数

图 2 中可以清楚地看到模型随参数变化由倍分叉通往混沌的过程。再次关注  $n = 14$ , 可以发现, Lyapunov 指数对应了一个很窄的、向下的尖峰, 但在连续参数对应的分叉图中却

看不到对应周期窗口的出现。事实上, 这个周期窗口确实存在, 只是在图 2(a) 的分辨率下太窄了, 看不到。通过提高图 2(a) 的分辨率就可以看到该 6 周期窗口。

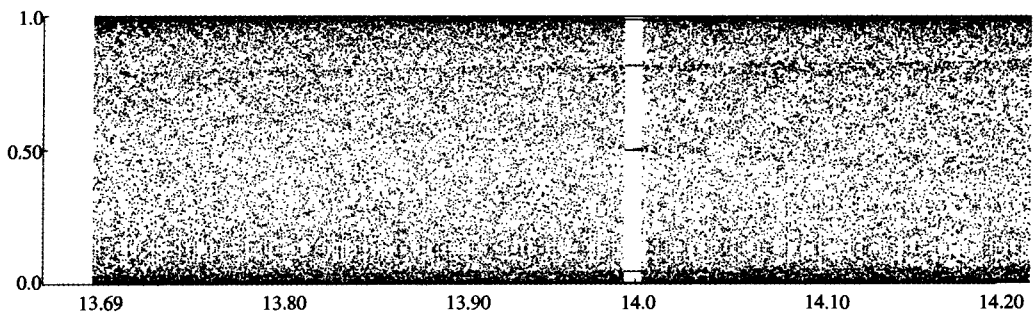


图 3 理想状况下系统对连续参数的分叉图的局部

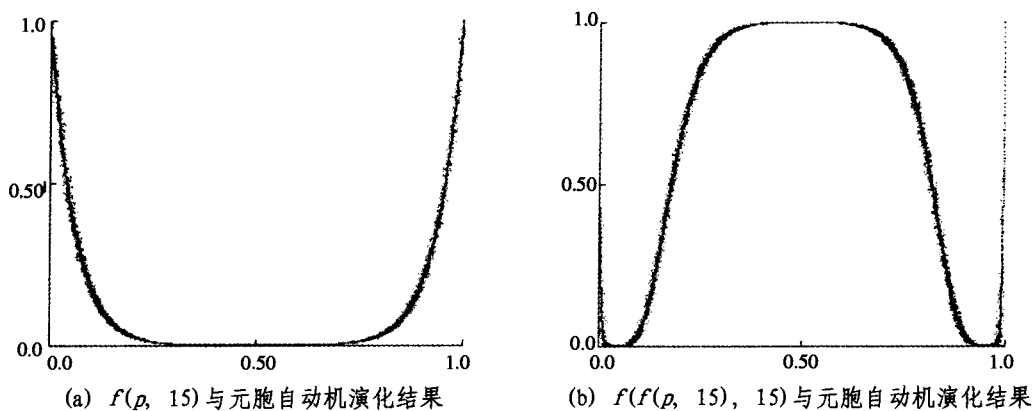


图 4 元胞自动机演化结果与理想状况模型对比偏差

为进一步从理论上对这一过程进行解释,可以计算  $f(p, n)$  的 Schwarzian 导数。根据  $S(f) = \frac{f'''(p)}{f'(p)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(p)}{f'(p)} \right]^2$  及式(3),对所有  $n > 2$ ,可得

$$S(f) = \frac{p^n - (1-p)^n}{n(n-1)[p^{n-2} - (1-p)^{n-2}]} - \frac{3}{2} \left\{ \frac{p^{n-1} + (1-p)^{n-1}}{(n-1)a[p^{n-2} - (1-p)^{n-2}]} \right\}^2$$

对一切  $0 < p < 1, S(f) < 0$  成立。容易验证映射  $f(p, n)$  有唯一的临界点  $p = \frac{1}{2}$ 。利用符号动力系统相关理论<sup>[5,6]</sup>可以得到,对每个  $n, f(p, n)$  至多有一条吸引周期轨道。如果有,则  $(0, 1)$  中除一个测度为 0 的点集都将被该周期轨道所吸引,这对应了分叉图中周期窗口的出现。

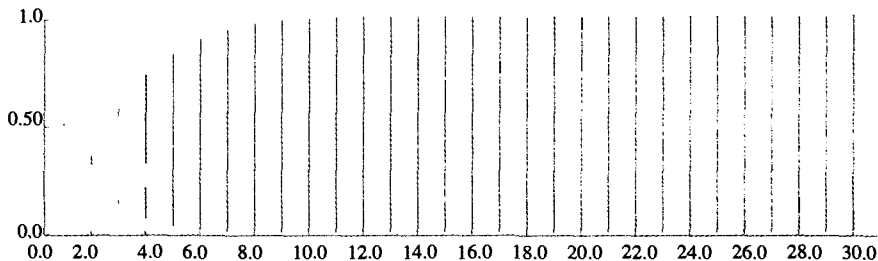


图5 元胞自动机对不同参数的分叉图( $M = 10000$ )

对比图5与图1(a)可以发现,随机元胞自动机由于其自身的随机性,导致系统在理想系统出现周期窗口的位置  $n = 8, 14$  处不再出现周期窗口,系统会更快地进入混沌状态。为

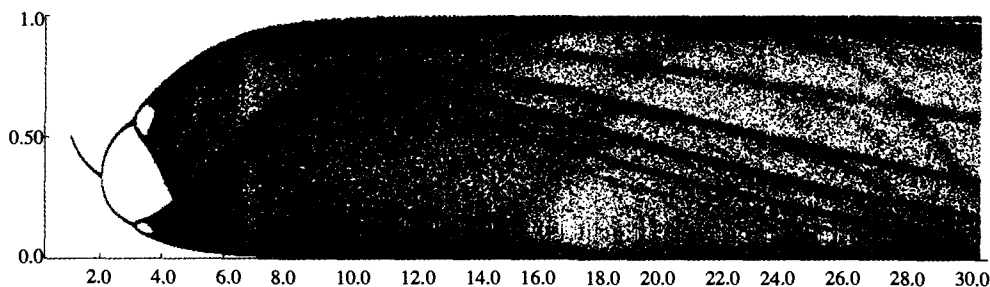


图6 理想模型带随机扰动的分叉图

利用图6的特征可以说明,带随机扰动后,分叉图依然保持了理想状态分叉图的结构特征,只是周期窗口对应的线条会稍微变粗,类似于准周期轨道,且原来混沌区域中多数周期窗口会消失,并会出现一些新的轨道分布特征。

**总结** 本文剖析了一种简单的、带有随机邻居的2值元胞自动机的动力学性质,展示了其具有的混沌特性。这种混沌特性可以为以后利用随机元胞自动机模拟某些具有混沌特性的系统提供指导。

### 参考文献

1 Wolfram S. Theory and Application of Cellular Automata [M].

另外一个有趣的现象是在  $n$  较大后会出现大片的混沌区域,在这一区域中系统混沌特性将不再对参数  $n$  具有敏感性,任何对参数的扰动系统仍将是混沌的。

### 3.2 带随机邻居的元胞自动机的动力学性质

在3.1节中分析了理想状态下模型的动力学性质。实际中由于元胞个数  $M$  只能是有限的,其动力学模型与理想状态模型会出现一些偏差。我们考察了元胞个数  $M = 10000, n = 15$  时随机元胞自动机演化过程与理想状态模型(3)的偏差。

图4中黑色线为理想状态系统模型  $f(p, 15)$  和  $f(f(p, 15), 15)$  对应的曲线,其周围绿色点为元胞自动机演化结果。图4显示它们之间的偏差不大,符合得非常好。利用随机元胞自动机对不同参数  $n$  演化得到的分叉图如图5所示。

了更方便地说明问题,图6模拟了理想状态下映射(3)带微小加性高斯噪声扰动的分叉图。

World Scientific, Singapore, 1986

2 Gutowitz H. Cellular Automata; Theory and Experiment[M]. North-Holland, 1990  
 3 Wolfram S. Statistical Mechanics of Cellular Automata [J]. Reviews of Modern Physics, 1983, 55(3): 601~644  
 4 Rujan P. Cellular Automata and Statistical Mechanical Models [J]. Journal of Statistical Physics, 1987, 49(1-2): 139~222  
 5 卢侃,孙建华. 混沌动力学[M]. 上海:上海翻译出版公司,1990  
 6 Feigenbaum M J. Quantitative Universality for A Class of Non-linear Transformations [J]. J Statistic Phys, 1978, 19(6): 25~52