粗糙集的拓扑结构*)

秦克云[1] 乔全喜[1,2]

(西南交通大学数学系 成都 610031)[1] (河南理工大学数学与信息科学学院 焦作 454000)[2]

摘 要 本文在Pawlak近似空间意义下研究粗糙集构成的拓扑空间。借助粗糙集的表示构造了粗糙拓扑空间,其中的开集为粗糙相等关系下的等价类;讨论了粗糙拓扑空间中的内部、闭包算子与近似空间中粗糙近似算子的关系,并给出了粗糙拓扑空间的拓扑基。

关键词 粗糙集,拓扑,内部算子,闭包算子

On Topological Structure of Rough Sets

QIN Ke-Yun[1] QAIO Quan-Xi[1,2]

(Department of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)[1]

(School of Mathematics & Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000)[2]

Abstract This paper is devoted to the discussion of topological structure of rough sets in Pawlak approximation space. The rough topological space is constructed based on the representation of rough sets. The relationship among interior operator, closure operator and rough approximation operators is investigated and the base of rough topological space is given.

Keywords Rough set, Topology, Interior operator, Closure operator

粗糙集理论是一种新的处理模糊性和不确定性知识的数学工具[1,2]。自1982年由波兰数学家Pawlak[1]首次提出以来,经过二十几年的研究与发展,已经在理论和实际应用上取得了长足的发展,特别是由于20世纪80年代末和90年代初在知识发现等领域的成功应用而受到了国际上广泛关注。

关于粗糙集模型数学特性研究是粗糙集理论研究的一个重要方向。为拓广粗糙集理论的应用范围,人们提出了多种形式的广义粗糙集模型,如一般二元关系下的粗糙集模型、模糊粗糙集模型、变精度粗糙集模型等,其中构造性方法和公理化方法是粗糙集基础理论研究的主流方法。

粗糙集的拓扑结构是粗糙集理论研究的核心问题之一[3~5]。Yao[3]研究了自反、传递关系下的粗糙集模型,证明了其中的上、下近似算子恰为一个拓扑空间的闭包与内部算子。对于Pawlak近似空间来说,所有的下近似集构成一个拓扑空间。需要指出的是,文[3~5]本质上刻画的是近似空间下精确集的拓扑结构。对于模糊粗糙集以及模糊粗糙集构成的模糊拓扑空间也有大量文献论及[6~12]。本文在Pawlak近似空间意义下研究粗糙集构成的拓扑空间,讨论了粗糙集的表示问题,借助粗糙集的表示构造了粗糙拓扑空间M。其中的开集为粗糙相等关系下的等价类,因而既可以刻画精确集,也可以刻画近似集。本文给出了拓扑空间M中内部与闭包算子的解析表达式,并给出了它的拓扑基。

1 预备知识

本节介绍粗糙集的有关概念及结论。

定义 1.1[1] 设U是一个非空有限集合,称为论域,R为U上的一个等价关系,称二元组(U,R)为一个Pawlak近似空间。对于任意$X\subseteq U$,X关于近似空间(U,R)的下近似$\underline{R}(X)$与上近似$\overline{R}(X)$分别定义为:

$$\underline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\subseteq X\}=\bigcup\{Y\in U/R\mid Y\subseteq X\} \quad (1)$$

$$\overline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\cap X\neq\phi\}=\bigcup\{Y\in U/R\mid Y\cap X\neq\phi\} \quad (2)$$

其中$[x]_R=\{y\mid(x,y)\in R\}$是$x$关于$R$的等价类,$U/R=\{[x]_R\mid x\in U\}$是所有$R$等价类的集合。

对于$X\subseteq U$,称二元组$(\underline{R}(X),\overline{R}(X))$为$R$粗糙集。若$\underline{R}(X)=\overline{R}(X)$,则称$(\underline{R}(X),\overline{R}(X))$为$R$精确集;否则,称$(\underline{R}(X),\overline{R}(X))$为$R$近似集。

定理 1.1[3] 设(U,R)为一近似空间,对于任意$X,Y\subseteq U$,

(1)$\underline{R}(X)\subseteq X\subseteq\overline{R}(X)$.

(2)$\underline{R}(\emptyset)=\overline{R}(\emptyset)$,$\underline{R}(U)=\overline{R}(U)=U$.

(3)$\overline{R}(X\cup Y)=\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y)$,$\underline{R}(X\cap Y)=\underline{R}(X)\cap\underline{R}(Y)$.

(4)若$X\subseteq Y$,则$\underline{R}(X)\subseteq\underline{R}(Y)$,$\overline{R}(X)\subseteq\overline{R}(Y)$.

(5)$\underline{R}(\underline{R}(X))=\underline{R}(X)$,$\overline{R}(\overline{R}(X))=\overline{R}(X)$.

(6)$\underline{R}(X)=\sim\overline{R}(\sim X)$,$\overline{R}(X)=\sim\underline{R}(\sim X)$.

(7)$\underline{R}(\sim\underline{R}(X))=\sim\underline{R}(X)$,$\overline{R}(\sim\overline{R}(X))=\sim\overline{R}(X)$.

(8)$\overline{R}(\underline{R}(X))\subseteq X\subseteq\underline{R}(\overline{R}(X))$.

其中,(1)、(3)、(7)是近似算子的本质属性[2]。

2 粗糙集构成的拓扑空间

设(U,R)是一个近似空间,在$P(U)$上定义二元关系"$\approx$"为

*)国家自然科学基金资助项目(批准号:60474022)。**秦克云** 教授,博士,研究领域为代数逻辑与智能信息处理;**乔全喜** 博士研究生,研究方向为智能控制及应用。

$X\approx Y$ 当且仅当 $\underline{R}(X)=\underline{R}(Y),\overline{R}(X)=\overline{R}(Y)$

显然，$\approx$是 $P(U)$上的等价关系，称为 R－相等关系。按此等价关系将 $P(U)$分成等价类，所有等价类的集合记为

$P(U)/\approx=\{[X]_{\approx};X\in P(U)\}$

其中$[X]_{\approx}=\{Y\in P(U);X\approx Y\}$是包含 X 的等价类。因为粗糙集是形如$(\underline{R}(X),\overline{R}(X))$的二元组，故 $P(U)/\approx$与所有粗糙集构成的集合$\{(\underline{R}(X),\overline{R}(X));X\subseteq U\}$存在一一对应关系。以下也称 $P(U)/\approx$中的元素为粗糙集。以下令 Z_0 是从每一 R 等价类中选取一个元素构成的集合，且 $S=\{x\in U;|[x]_R|=1\}$。

定理 2.1 设(U,R)是一个近似空间，$X,Y\subseteq R$ 是 R 可定义集(即为若干 R 等价类之并)。(X,Y)为 R 粗糙集当且仅当 $X\subseteq Y$ 且$(Y-X)\cap S=\emptyset$。

证明：若(X,Y)为 R 粗糙集，则存在 $Z\subseteq U$ 使得$\underline{R}(Z)=X,\overline{R}(Z)=Y$，从而有

$X=\underline{R}(Z)\subseteq Z\subseteq\overline{R}(Z)=Y$。

若 $x\in S$，则$|[x]_R|=1$，从而$[x]_R=\{x\}$。当 $x\in Y=\overline{R}(Z)$时，有$[x]_R\subseteq Z$，即 $x\in X$，故$(Y-X)\cap S=\emptyset$。

反之，设 $X\subseteq Y$ 且$(Y-X)\cap S=\emptyset$，令 $Z=X\cup((Y-X)\cap Z_0)$。

(1)$\underline{R}(Z)=X$。事实上，因 X 是可定义集，故

$\underline{R}(Z)=\underline{R}(X\cup((Y-X)\cap Z_0))\supseteq\underline{R}(X)=X$。

下证$\underline{R}(Z)\subseteq X$。若 $x\in\underline{R}(Z)$，则$[x]_R\subseteq Z$。以下分两种情况讨论：① 若$|[x]_R|=1$，则 $x\in S$，由$(Y-X)\cap S=\emptyset$，故 $x\notin Y-X$，从而 $x\notin(Y-X)\cap Z_0$。由 $x\in Z$ 即得 $x\in X$。② 若$|[x]_R|>1$，因$(Y-X)\cap Z_0$ 中至多包含$[x]_R$ 中一个元素，故存在 $u\in[x]_R$ 使得 $u\in X$，从而$[x]_R=[u]_R\subseteq\overline{R}(X)=X$，即 $x\in X$。

(2)$\overline{R}(Z)=Y$。事实上，因 Y 是可定义集，故

$\overline{R}(Z)=\overline{R}(X\cup((Y-X)\cap Z_0))=\overline{R}(Y\cap(X\cup Z_0))\subseteq\overline{R}(Y)=Y$。

下证$\overline{R}(Z)\subseteq Y$。若 $x\in Y$，则① $x\in X$ 时，由 $x\in Z$ 可得 $x\in\overline{R}(Z)$。②$x\notin X$ 时，有 $x\in Y-X$，因 $Y-X$ 是可定义的，故$[x]_R\subseteq Y-X$，从而存在 $u\in[x]_R$ 使得 $u\in(Y-X)\cap Z_0\subseteq Z$，故$[x]_R=[u]_R\subseteq\overline{R}(Z)$，即 $x\in\overline{R}(Z)$

由(1)与(2)，(X,Y)为 R 粗糙集。

对于任意 $X\in P(U)$，定义

$$X_A=\underline{R}(X)\cup((\overline{R}(X)-\underline{R}(X))\cap Z_0)=\overline{R}(X)\cap(\underline{R}(X)\cup Z_0)\tag{3}$$

引理 2.1 $X_A\in[X]_{\approx}$，即 $\underline{R}(X_A)=\underline{R}(X),\overline{R}(X_A)=\overline{R}(X)$。

证明：对于任意 $X\in P(U)$，因$\underline{R}(X)$与$\overline{R}(X)$是可定义集，$\underline{R}(X)\subseteq\overline{R}(X)$且$(\overline{R}(X)-\underline{R}(X))\cap S=\emptyset$，类似于定理 2.1，可以证明$\underline{R}(X_A)=\underline{R}(X),\overline{R}(X_A)=\overline{R}(X)$，即 $X_A\in[X]_{\approx}$。

引理 2.2 令 $M=\{X_A;X\in P(U)\}$，则

(1)对于任意 $X_A,Y_A\in M,X_A\cup Y_A\in M$。

(2)对于任意 $X_A,Y_A\in M,X_A\cap Y_A\in M$。

证明：(1)由$\underline{R}(X)\cup\underline{R}(Y)\subseteq\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y)$及

$((\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y))-(\underline{R}(X)\cup\underline{R}(Y)))\cap S\subseteq((\overline{R}(X)-\underline{R}(X))\cup(\overline{R}(Y)-\underline{R}(Y)))\cap S$

$=((\overline{R}(X)-\underline{R}(X))\cap S)\cup((\overline{R}(Y)-\underline{R}(Y))\cap S)=\emptyset$，

故存在 $Z\subseteq U$ 使得$\underline{R}(Z)=\underline{R}(X)\cup\underline{R}(Y),\overline{R}(Z)=\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y)$，于是

$Z_A=\underline{R}(Z)\cup((\overline{R}(Z)-\underline{R}(Z))\cap Z_0)=\overline{R}(Z)\cap(\underline{R}(Z)\cup Z_0)$

$=(\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y))\cap(\underline{R}(X)\cup\underline{R}(Y)\cup Z_0)$，

$X_A\cup Y_A=(\overline{R}(X)\cap(\underline{R}(X)\cup Z_0))\cup(\overline{R}(Y)\cap(\underline{R}(Y)\cup Z_0))$

$=((\overline{R}(X)\cap(\underline{R}(X)\cup Z_0))\cup\overline{R}(Y))\cap((\overline{R}(X)\cap(\underline{R}(X)\cup Z_0))\cup(\underline{R}(Y)\cup Z_0))$

$=(\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y))\cap(\underline{R}(X)\cup Z_0\cup\overline{R}(Y))\cap(\overline{R}(X)\cup\underline{R}(Y)\cup Z_0)\cap(\underline{R}(X)\cup\underline{R}(Y)\cup Z_0)$

$=(\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y))\cap\underline{R}(X)\cup\underline{R}(Y)\cup Z_0)$，

故 $X_A\cup Y_A=Z_A\in M$。

(2)由$\underline{R}(X)\cap\underline{R}(Y)\subseteq\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)$及

$((\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y))-(\underline{R}(X)\cap\underline{R}(Y)))\cap S$

$\subseteq((\overline{R}(X)-\underline{R}(X))\cup(\overline{R}(Y)-\underline{R}(Y)))\cap S=\emptyset$，

故存在 $Z\in P(U)$ 使得 $\underline{R}(Z)=\underline{R}(X)\cap\underline{R}(Y),\overline{R}(Z)=\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)$，于是

$Z_A=\overline{R}(Z)\cap(\underline{R}(Z)\cup Z_0)=\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)\cap((\underline{R}(X)\cap\underline{R}(Y))\cup Z_0)$

$=\overline{R}(X)\cap(\overline{R}(Y)\cap(\underline{R}(X)\cup Z_0)\cap(\underline{R}(Y)\cup Z_0)=X_A\cap X_A$。

从而 $X_A\cap Y_A\in M$。

引理 2.3 若 X 是 R 可定义集合，则 $X_A=X$。

定理 2.2 设(U,R)是近似空间，则 M 是 U 上的一个拓扑空间。

证明：由引理 2.1 及引理 2.2，M 对于并、交运算封闭。由引理 2.3，$\emptyset,U\in M$。注意到集合 U 的有限性，故 M 是 U 上的一个拓扑空间。

3 拓扑空间 M 的结构

本节讨论拓扑空间 M 的结构。

定理 3.1 对于任意 $x\in Z_0,\{x\}_A=\{x\}$。

证明：事实上，若$|[x]_R|=1$，则$[x]_R=\{x\}$，此时

$\{x\}_A=\underline{R}(\{x\})\cup((\overline{R}(\{x\})-\underline{R}(\{x\}))\cap Z_0)=\underline{R}(\{x\})=\{x\}$。

若 $|[x]_R|>1$，则$\underline{R}(\{x\})=\emptyset,\overline{R}(\{x\})=[x]_R$，此时

$\{x\}_A=\underline{R}(\{x\})\cup((\overline{R}(\{x\})-\underline{R}(\{x\}))\cap Z_0)=[x]_R\cap Z_0$，

因 $x\in Z_0$，故$\{x\}_A=[x]_R\cap Z_0=\{x\}$。

由此定理，若 $x\in Z_0$，则$\{x\}$是拓扑空间 M 中的开集，即$\{x\}\in M$。

定理 3.2 对于任意 $X\subseteq U,i(X)=\underline{R}(X)\cup(X\cap Z_0)$，其中 i 是拓扑空间 M 中的内部算子。

证明：(1)$\underline{R}(X)\cup(X\cap Z_0)\subseteq X$ 是显然成立的。

(2)$\underline{R}(X)\cup(X\cap Z_0)$为若干开集之并，因而也是开集，即$\underline{R}(X)\cup(X\cap Z_0)\in M$。

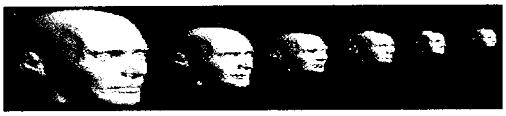
(3)若 $Y\in M$ 是开集，且 $Y\subseteq X$，则 $Y\subseteq\underline{R}(X)\cup(X\cap Z_0)$。事实上，因 Y 是开集，故存在 $Z\in P(U)$，使得 $Y=Z_A=\underline{R}(Z)\cup((\overline{R}(Z)-\underline{R}(Z))\cap Z_0)$。由 $Y\subseteq X$ 可得$\underline{R}(Z)\subseteq X$，从而$\underline{R}(Z)=\underline{R}(\underline{R}(Z))\subseteq\underline{R}(X)\subseteq\underline{R}(X)\cup Z_0$，又$(\overline{R}(Z)-\underline{R}(Z))\cap Z_0\subseteq\underline{R}(X)\cup Z_0$ 显然成立，故 $Y=\underline{R}(Z)\cup((\overline{R}(Z)-\underline{R}(Z))\cap Z_0)\subseteq\underline{R}(X)\cup Z_0$。再由 $Y\subseteq X$，即得

$Y\subseteq X\cap(\underline{R}(X)\cup Z_0)=\underline{R}(X)\cup(X\cap Z_0)$

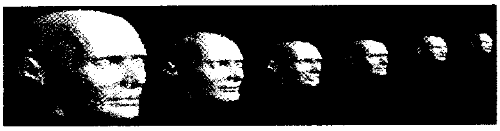
于是，我们证明了$\underline{R}(X)\cup(X\cap Z_0)$是含于 X 的最大开集。即

(下转第 241 页)

图 4 是无简化绘制和近似模型从近向远移动的比较结果，能够看出两者的视觉差异并不明显。



(a) 不同视距的无简化绘制



(b) 不同视距的 FC-SDM 方法绘制

图 4　两种人脸模型绘制方法的视觉效果比较

在时间方面，对比了基于特征点逼近的三维人脸模型绘制方法。本文提出的绘制方法在时间效率上有一定优势，基本能够满足 3D 游戏、虚拟主持人等通常在 PC 机上的应用中绘制帧速要求。表 1 是实验对比数据，三种绘制方法在同一配置机器下不同视距三维人脸模型以及固定场景的平均绘制帧速率的统计。PC 机的配置为 P4 2.0G CPU，GeForce FX 显卡，64M 显存；人脸模型三角面数为 8176 个。

表 1　三种绘制方法的绘制帧速率

绘制方法	漫游帧数	预处理时间	绘制帧速
无简化绘制	600	0	28.20 fps
基于特征点逼近的绘制	600	3.10s	46.62 fps
本文提出的绘制方法	600	3.93s	58.35 fps

本文提出的特征约束的有序递减网格多分辨率绘制方法的平均绘制帧速较高，表现出由 FHFM 模型支持的绘制方法具有一定的应用价值。

结束语　我们所设计的模型为三维中性人脸个性化变形提供了较为简单、方便的结构框架。实验证明，基于此结构的特征约束的有序递减网格多分辨率绘制方法能够使模型在随视距变化的简化过程中很好地保留人脸的拓扑结构和主体特征，对模型表面的视觉逼真度无明显影响，基本实现了一种以距离为驱动的、实时且连续的多分辨率绘制。进一步的研究工作包括研究同一场景中不同分辨率区域间如何保持网格的连续性而不出现裂缝以及面向人脸表情的模型形变处理等。

参考文献

1　Ansari A-N, Abdel-Mottaleb M. 3-D Face Modeling Using Two Views and a Generic Face Model with Application to 3-D Face Recognition [C]. In: IEEE Conference on Advanced Video and Signal Based Surveillance (AVSS'03), Miami, Florida, 2003, 7 (21-22): 37～44

2　Min Kyongpil, Chun Junchul. A Realistic Human Face Modeling from Photographs by Use of Skin Color and Model Deformation [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005 (3480): 1135～1148

3　Liu Yong-Jin, Yuen Ming-Fai M, Xiong S. A feature-based approach for individualized human head modeling [J]. Visual Computer, 2002, 18(5-6): 368～381

4　Hilton A, Beresford D, Gentils T, et al. Whole-body modelling of people from multiview images to populate virtual worlds [J]. Visual Computer, 2000, 16(7): 411～436

5　Watt A, Policarpo F. 3D Games, Vol 2: Animation and Advanced Real-Time Rendering [M]. Boston: Addison-Wesley Published, 2003

6　徐成华，王蕴红，谭铁牛. 三维人脸建模与应用[J]. 中国图象图形学报，2004，9(8)：893～901

7　ISO / IEC 1 4496-1-1999 Coding of audio-visual objects: systems, amendment 1 [S]

8　Reinhard K. Multiresolution representations for surfaces meshes based on the vertex decimation method [J]. Computers and Graphics, 1998, 22(1): 13～26

9　高山，卢汉清，周万宁. 基于细节的自适应网格简化[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2003，15(9)：1122～1127

10　Clarenz U, Griebel M, Rumpf M, et al. Feature sensitive multiscale editing on surfaces [J]. The Visual Computer, 2004, 20 (5): 329～343

(上接第 162 页)

$i(X)=\underline{R}(X)\cup(X\cap Z_0)$

定理 3.3　对于任意 $X\subseteq U$，$c(X)=X\cup(\overline{R}(X)-Z_0)$，其中 c 是拓扑空间 M 中的闭包算子。

证明：
$$\begin{aligned}c(X)&=\sim i(\sim X)=\sim((\sim X)\cap(\underline{R}(\sim X)\cup Z_0))\\&=X\cup(\sim\underline{R}(\sim X)\cap(\sim Z_0))\\&=X\cup(\overline{R}(X)\cap(\sim Z_0))\\&=X\cup(\overline{R}(X)-Z_0)\end{aligned}$$

由定理 3.2，拓扑 M 中的任意开集都具有形式 $\underline{R}(X)\cup(X\cap Z_0)$，而 $\underline{R}(X)$ 为若干 R 等价类之并，因此有下面的推论。

推论 3.1　$U/R\cup\{\{x\},x\in Z_0\}$ 是拓扑 M 的一个基。

结论　本文建立了粗糙集构成的拓扑空间 M，研究了它的结构问题，给出了该拓扑空间中内部与闭包算子的表达式以及拓扑基，推广了已有的相关研究工作。关于 M 的其它拓扑性质，我们将另文讨论。

参考文献

1　Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer and Information Science, 1982, 11: 341～356

2　Pawlak Z. Rough sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991

3　Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15: 291～317

4　Yao Y Y. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators [J]. Information Sciences, 1998, 101: 239～259

5　Kortelainen J. On the relationship between modified sets, topological spaces and rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61: 91～95

6　Lashin E F, Kozae A M, Abo Khadra A A, et al. Rough set theory for topological spaces [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2005, 40: 35～43

7　Kuncheva L I. Fuzzy rough sets: Application to feature selection [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 51: 147～153

8　Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and rough fuzzy sets [J]. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191～209

9　Thiele H. Fuzzy rough sets versus rough fuzzy sets-An interpretation and a comparative study using concepts of modal logics [C]. In: Proc. of 5th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing, Aachen, Germany, 1997, 9: 159～167

10　Morsi N N, Yakout M M. Axiomatics for fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 100: 327～342

11　Qin K, Pei Z. On the topological properties of fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 151: 601～613

12　秦克云，裴峥，杜卫锋. 粗糙近似算子的拓扑性质[J]. 系统工程学报，2006，1：81～85

13　张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 科学出版社，2001