

# 基于物理模型的水波动画<sup>\*</sup>)

秦培煜<sup>1</sup> 陈传波<sup>1</sup> 解洪涛<sup>2</sup> 夏晖<sup>1</sup> 吕泽华<sup>1</sup>

(华中科技大学计算机学院 武汉 430074)<sup>1</sup> (华中科技大学经济学院 武汉 430074)<sup>2</sup>

**摘要** 近年来,自然景物的模拟一直是计算机图形学中最具挑战性的问题之一。关于山、水、云、烟、火焰等自然景物的模拟,在计算机游戏、影视、广告等各种领域中有着广泛的用途。作为自然景物模拟的重要内容,对流水、波浪的模拟正日益引起人们的关注。本文基于二维浅水波方程模型,给出了一种实现水波动画的数值模拟方法。和以往的方法不同的是,本文既没有去特意构造具体的波形函数,也没有去求解复杂的 Navier-Stokes 方程,而是基于二维浅水波方程模型,采用隐式半拉格朗日积分方法进行求解,在保证稳定性的同时,可以允许大时间步长。实践证明,用该算法模拟水波,效果比较真实,而且在普通的 PC 平台上即可满足一般动画的实时需求。

**关键词** 水波动画,浅水波方程,半拉格朗日方法,隐式积分

## Water Wave Animation Based on the Physical Model

QIN Pei-Yu<sup>1</sup> CHEN Chuan-Bo<sup>1</sup> XIE Hong-Tao<sup>2</sup> XIA Hui<sup>1</sup> LV Ze-Hua<sup>1</sup>

(Institute of Computer, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)<sup>1</sup>

(Institute of Economics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)<sup>2</sup>

**Abstract** In recent years, simulating natural phenomena has always been one of the most challenging tasks in computer graphics. Simulating natural phenomena, such as hills, water, cloud, smoke, fire and so on, has been widely used in computer game, movie production, and advertisement, etc. As one of its most important parts, simulating water wave has been given more and more attention. This paper presents a new method for water wave animation based on the two-dimensional shallow water equations. Unlike traditional methods, the paper neither constructs special functions to model the shape of water wave individually, nor solves the complex Navier-Stokes equations. Instead, the two-dimensional shallow water equations are integrated by a novel numerical method—the implicit semi-Lagrangian integration scheme—which allows large timesteps while maintaining stability. Our results show that our models and methods are effective and efficient. They can even satisfy the requirements of real time animation under generic PC.

**Keywords** Water wave animation, Shallow water equations, Semi-Lagrangian method, Implicit integration

## 1 引言

自然景物的模拟一直是计算机图形学中最具挑战性的问题之一。这主要是因为自然景物远比大多数人造物体复杂,造型相对比较困难。关于山、水、云、烟、火焰等自然景物的模拟,在计算机游戏、影视、广告等各种领域中有着广泛的用途。与山、树、云等相比,关于水的模拟又更为困难,这是因为水在不同情况下形态各异,而且显示也有其特殊的要求<sup>[1]</sup>。

实现水波动画,通常采用的方法大致可以分为两类:一类是用数学函数构造出水波的外形,然后变换时间参数  $t$ ,这类方法可以称之为基于构造的方法,如童若锋<sup>[1]</sup>、Peachey<sup>[2]</sup>、Fournier<sup>[3]</sup>、于金辉<sup>[4]</sup>、鄢来斌<sup>[5]</sup>等人的方法。另外一类方法是从水波的物理原理出发,一般是通过求解一组流体力学方程,通常是 Navier-Stokes 方程,得到流体质点在各个时刻的状态,这类方法可以称之为基于物理的方法,如 Kass<sup>[6]</sup>、Chen<sup>[7]</sup>、Foster<sup>[8]</sup>、徐迎庆<sup>[9]</sup>、陈前华<sup>[10]</sup>等人的方法。比较而言,构造法较为简单,计算效率较高,但效果比较单调,适用范围较为狭窄,对于不同的流态(如海浪、溪流、瀑布等)必须用

不同的造型方法来模拟;物理法的效果比较真实,适用范围广泛,但计算起来非常复杂,效率很低。

本文提出了基于另一种物理模型实现水波动画的数值模拟新方法,在二维浅水波方程模型表示基础上,采用隐式半拉格朗日积分方法进行求解。这样在保证稳定性的同时,可以允许大时间步长,从而满足水波动画实时性要求。

## 2 模型

在计算流体力学领域中, Navier-Stokes 方程是最常用的物理模型。直接求解 Navier-Stokes 方程非常困难,效率较低,很难达到计算机动画的实时性要求。本文只研究水波的二维运动,可以忽略掉运动粘性系数项并简化到二维空间,因此这里采用了较为简单的二维浅水波方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[u(h-b)] + \frac{\partial}{\partial y}[v(h-b)] = 0 \quad (3)$$

<sup>\*</sup> 本文研究得到国家 863 项目(编号:2004AA420100)资助。秦培煜 博士研究生,主要研究方向为计算机图形学和计算机动画;陈传波 教授、博士生导师,主要研究方向为图像处理与机器智能及计算机应用;解洪涛 博士研究生,主要研究方向为计量经济与数理金融;夏晖 博士研究生,主要研究方向为图像处理;吕泽华 博士研究生,主要研究方向为计算机模式识别。

这里,  $h$  是水位高度,  $b$  是河底高程,  $h-b$  就是水深。方程(1)和(2)由牛顿第二运动定律推导得到, 方程(3)是连续方程。

### 3 隐式半拉格朗日方法

半拉格朗日方法可以看作是欧拉法和拉格朗日方法的结合。欧拉法是基于网格的方法, 它保持了网格的规则性, 但为获得稳定性只能采用小时间步长。相反, 拉格朗日法是基于粒子的方法, 它对稳定性限制较少, 能够采用大时间步长, 但随着粒子的不断移动会变得不规则。半拉格朗日方法结合了欧拉法的规则性和拉格朗日法的稳定性, 保证了计算的简单有效和大时间步长稳定。

为简单起见, 首先考虑一维浅水波方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[u(h-b)] = 0 \quad (5)$$

整理成拉格朗日形式, 得到

$$\frac{du}{dt} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dh}{dt} - u \frac{\partial b}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

这里  $d=h-b$  为水深, 拉格朗日导数定义为

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \text{ 其中}$$

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad (8)$$

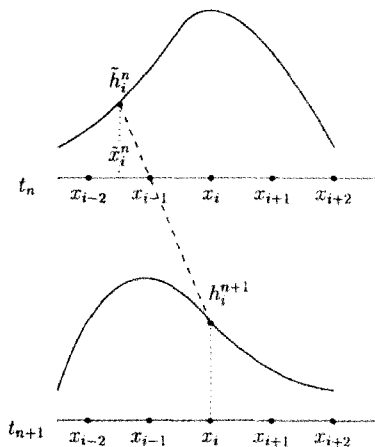


图1 拉格朗日导数近似

如图1所示, 用半拉格朗日方法, 拉格朗日导数可以沿粒子的迹线近似得到。设想一个流体粒子沿迹线移动, 在时刻  $t_{n+1}$  到达位置  $x_i$ 。根据半拉格朗日方法, 拉格朗日导数由  $t_{n+1}$  时位置  $x_i$  和  $t_n$  时出发点位置  $\tilde{x}_i^n$  计算得到。设  $a_i^n$  为时间段  $t_n$  到  $t_{n+1}$  流体粒子的位移, 即  $a_i^n = x_i - \tilde{x}_i^n$ 。设  $a_i^n = \Delta t u^n(x_i)$ , 则出发点位置

$$\tilde{x}_i^n = x_i - a_i^n = x_i - \Delta t u^n(x_i) \quad (9)$$

对任意函数  $\psi(x, t)$ , 设  $\tilde{\psi}^n$  为时间段  $t_n$  到  $t_{n+1}$  相应的上游函数, 即  $\tilde{\psi}^n(x_i) \equiv \psi(\tilde{x}_i^n, t_n)$ 。但出发点  $\tilde{x}_i^n$  不一定恰好在网格点上, 此时我们用线性插值来求得出发点速度  $\tilde{u}^n$  和水位  $\tilde{h}^n$ 。设  $x_m$  表示第  $m$  个网格点位置, 即  $x_m \equiv m\Delta x$ 。假设  $x_{m-1} < \tilde{x}_i^n < x_m$ , 则

$$\tilde{u}^n(x_i) \equiv u^n(\tilde{x}_i^n) = \frac{(\tilde{x}_i^n - x_{m-1})u^n(x_m) + (x_m - \tilde{x}_i^n)u^n(x_{m-1})}{\Delta x} \quad (10)$$

同理可得相似的出发点水位公式。

这样, 拉格朗日导数可以近似为

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^{n+1} - \tilde{u}^n}{\Delta t}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{h^{n+1} - \tilde{h}^n}{\Delta t} \quad (11)$$

上面的方程中,  $u^{n+1}$  和  $h^{n+1}$  分别是  $t_{n+1}$  时刻的速度和水位,  $\tilde{u}^n$  和  $\tilde{h}^n$  分别是  $t_n$  在出发点的速度和水位。

我们假设水深  $d$  在时间段  $(t_n, t_{n+1})$  变化很小, 近似常数。利用式(11), 我们将式(6)和(7)时间离散成:

$$\frac{u^{n+1} - \tilde{u}^n}{\Delta t} + g \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{h^{n+1} - \tilde{h}^n}{\Delta t} - u^{n+1} \frac{\partial b}{\partial x} + d^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

假设河底高程  $b$  与时间无关, 所以这里  $b$  没有时间上标。

上面的方法在时间和空间都是一阶精度的, 并且是隐式的。隐式方法表示此方法可以在保持稳定性的同时采用大时间步长。

整理方程(12), 得

$$u^{n+1} = \tilde{u}^n - \Delta t g \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} \quad (14)$$

对方程(14)取空间偏导, 得

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial x} - \Delta t g \frac{\partial^2 h^{n+1}}{\partial x^2} \quad (15)$$

将式(14)和(15)代入式(13), 并整理, 得

$$h^{n+1} + \Delta t^2 g \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} - \Delta t^2 g d^n \frac{\partial^2 h^{n+1}}{\partial x^2} = \tilde{h}^n + \Delta t \tilde{u}^n \frac{\partial b}{\partial x} - \Delta t d^n \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial x} \quad (16)$$

将上式用中心差分空间离散成:

$$h_i^{n+1} + \Delta t^2 g \left( \frac{b_{i+1} - b_{i-1}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - \Delta t^2 g d_i^n \left( \frac{h_{i+1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) = \tilde{h}_i^n + \Delta t \tilde{u}_i^n \left( \frac{b_{i+1} - b_{i-1}}{2\Delta x} \right) - \Delta t d_i^n \left( \frac{\tilde{u}_{i+1}^n - \tilde{u}_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \quad (17)$$

上面讨论的是一维情况, 下面讨论二维情况。

二维时间离散浅水波方程可以写成:

$$\frac{u^{n+1} - \tilde{u}^n}{\Delta t} + g \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{v^{n+1} - \tilde{v}^n}{\Delta t} + g \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{h^{n+1} - \tilde{h}^n}{\Delta t} - (u^{n+1} \frac{\partial b}{\partial x} + v^{n+1} \frac{\partial b}{\partial y}) + d^n \left( \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} \right) = 0 \quad (20)$$

与一维情况相似, 对式(18)和(19)取空间偏导并代入式(20), 整理后得

$$h^{n+1} + \Delta t^2 g \left( \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} \right) - \Delta t^2 g d^n \left( \frac{\partial^2 h^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^{n+1}}{\partial y^2} \right) = \tilde{h}^n + \Delta t \left( \tilde{u}^n \frac{\partial b}{\partial x} + \tilde{v}^n \frac{\partial b}{\partial y} \right) - \Delta t d^n \left( \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}^n}{\partial y} \right) \quad (21)$$

再用中心差分空间离散成:

$$h_{i,j}^{n+1} + \Delta t^2 g \left( \frac{b_{i+1,j} - b_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{h_{i+1,j}^{n+1} - h_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{b_{i,j+1} - b_{i,j-1}}{2\Delta y} \right)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i,j+1}^{n+1} - h_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} - \Delta t^2 g d_{i,j}^n \left( \frac{h_{i+1,j}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \right. \\ & \left. \frac{h_{i,j+1}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) = \bar{h}_{i,j}^n + \Delta t \left( \tilde{u}_{i,j}^n \right. \\ & \left. \frac{b_{i+1,j} - b_{i-1,j}}{2\Delta x} + \tilde{v}_{i,j}^n \frac{b_{i,j+1} - b_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) - \Delta t d_{i,j}^n \\ & \left( \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^n - \tilde{u}_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{\tilde{v}_{i,j+1}^n - \tilde{v}_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \quad (22) \end{aligned}$$

利用上式可用共轭梯度法求得  $h^{n+1}$ , 然后将  $h^{n+1}$  回代到式(18)和(19), 可求得速度  $u^{n+1}$  和  $v^{n+1}$ 。

本文提出的水波模拟算法可以概括成:

1. 初始化  $h^0, u^0, v^0$  和  $b$ ;
2. 对每一个时间步长  $t_{n+1}$ , 循环做下列工作:



图2 实际模拟结果

显式积分方法由于其简单性, 被用于很多流体模拟模型(Kass<sup>[6]</sup>, Chen<sup>[7]</sup>和 Foster<sup>[8]</sup>等)中, 但其最大的缺点就是只有在时间步长很小的情况下即满足 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy)条件才保持稳定。为克服显式积分方法的缺陷, 本文提出了一种隐式积分方法, 即隐式半拉格朗日方法, 保证了时间步长不再受 CFL 条件的限制。同时, 本文的物理模型采用的是完整的浅水波方程(不包含科氏力), 与 Kass<sup>[6]</sup>选用的不完整的浅水波方程相比, 模拟结果更自然和真实。

本文的算法大部分计算消耗在求解方程式(22)上。设  $N$  为一个维度上网格划分数,  $k$  为求解方程式(22)的共轭梯度法迭代次数, 通过稀疏矩阵方法, 共轭梯度法的复杂性是  $O(N^2 k)$ (Saad<sup>[11]</sup>)。本文实际模拟过程中, 只要 1 到 2 次迭代就能满足所需精度要求, 因而本文的算法具有  $O(N^2)$  的复杂性, 比起 Foster<sup>[8]</sup>的  $O(N^3)$  的复杂性, 效率有了很大提升。

**结束语** 本文基于物理模型提出了一种水波的数值模拟算法。与传统的动画技术相比, 基于物理的动画更能表现运动的真实性。在用二维浅水波方程表示水波物理模型的基础上, 利用隐式半拉格朗日积分方法进行求解, 因而求解过程稳定。求解过程不受 CFL 条件限制, 其稳定性保证了模拟可以用大时间步长, 也就保证了模拟的实时性。与传统的方法相比, 能同时满足计算机图形学的真实感和实时性要求。

### 参考文献

- 1 童若锋, 汪国昭. 用于动画的水波造型. 计算机学报, 1996, 19

- 1) 根据式(9)计算出出发点位置;
- 2) 在出发点用式(10)计算  $h, u$  和  $v$ ;
- 3) 根据式(22)求得  $h^{n+1}$ ;
- 4) 根据式(18)和(19)更新  $u^{n+1}$  和  $v^{n+1}$ 。

### 4 实验结果和分析

利用 VC++ 和 OpenGL, 这里给出了水波的实时模拟结果。模拟环境是 Intel Pentium2.8GHz, 主内存为 512M, 网格分辨率是  $128 \times 128$  个网格, 显示速度为 30fps 左右。实验结果表明, 该方法能达到计算机图形学的真实感和实时性要求。图 2 是实际模拟结果。

- (8): 595~599
- 2 Peachey D R. Modelling waves and Surf. Computer Graphics, 1986, 20(4): 65~74
- 3 Fournier A, Reeves W T. A simple model of ocean waves. Computer Graphics, 1986, 20(4): 75~84
- 4 于金辉, 徐晓刚, 彭群生. 用随机正弦波拟合卡通流水. 计算机研究与发展, 2001, 38(5): 519~523
- 5 鄢来斌, 李思昆, 张秀山. 虚拟海战场景中的海浪实时建模与绘制技术研究. 计算机研究与发展, 2001, 38(5): 568~573
- 6 Kass M, Miller G. Rapid, stable fluid dynamics for computer graphics. Computer Graphics, 1990, 24(4): 49~57
- 7 Chen J X, Lobo N D V. Toward interactive-rate simulation of fluids with moving obstacles using Navier-Stokes equations. Graphical Models and Image Processing, 1995, 57(2): 107~116
- 8 Foster N, Metaxas D. Realistic animation of liquids. Graphical Models and Image Processing, 1996, 58(5): 471~483
- 9 徐迎庆, 苏成, 李华, 等. 基于物理模型的流水及波浪模拟. 计算机学报, 1996, 19(增刊): 153~160
- 10 陈前华, 邓建松, 陈发来. 滴水涟漪的计算机动画模拟. 计算机研究与发展, 2001, 38(5): 524~528
- 11 Saad Y, Schultz M H. A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. SIAM J Sci Stat Comp, 7: 856~869