基于三角模的 Vague 粗糙集研究 *)

梁家荣

（广西大学计算机与电子信息学院　南宁 530004）

摘　要　通过引入三角模的概念，给出了 Vague T 相似关系和 Vague 划分的定义，建立了 Vague-T 相似关系与 Vague 划分的一一对应关系。提出了 Vague-T 相似关系下的 Vague 粗糙集的概念，进而讨论了 Vague 粗糙集的性质。

关键词　三角模，Vague 集，粗糙集，相似关系

The Research of Vague-Rough Sets Based on Triangle Model

LIANG Jia-Rong

(College of Computer and Electric Information, Guangxi University, Nanning 530004)

Abstract　In this paper, the definition of resembling relationship of Vague-T and the definition of Vague partion are given by introducing the concept of triangle model, the one to one map between vague partition and resembling relationship of vague-T is built. The concept of vague Rough set is given, moreover some results on vague Rough sets are presented.

Keywords　Triangle model, Vague sets, Rough sets, Resembling relationship

1　引言

粗糙集是一种处理模糊和不确定性知识的强有力工具，其主要思想就是在保持分类能力不变的前提下，通过知识约简，导出问题的决策或分类规则。但粗糙集理论对同类的对象之间，对象与类之间关系处理上显得有困难，为此，人们进行了粗糙集模糊性的研究[2~5]。我们知道，模糊理论在处理不确定的问题上，存在着“非此即彼”的情况，也就是说一个对象与一个集合之间，只有支持和反对两种，通过[0,1]之间的一个单一的值 μ 来表示其支持与反对的证据，而不能够给出支持与反对的范围，为此，Gau 等人引入了所谓的 Vague 集理论。很自然，把 vague 论与粗糙集理论结合起来，是弥补了粗糙集不足的一个直观的做法，在这方面国内[7,8]已做了研究。但遗憾的是，这两篇文章都存在着概念不清，不合理的地方。如文[7]，设 R 是 V 上的关系，但使用时把一般关系 R 都当成了模糊关系属性值来利用，不但与其标题不一致，而且在其含义上把“关系”与隶属度相混肴。而文[8]通过一个 $X\subseteq U$ 的下近似集$\underline{R}X$ 的基数与有限论域的基数比作为 Vague 集的真隶属度，上近似集$\overline{R}X$ 的基数与$|U|$的比来定义 Vague 集的假隶属度，从而给出了由粗糙集确定 Vague 集的一种方法，但这一方法并不具有可逆性，也就是说给定了一个 Vague 集 $A=\sum(t_A,1-f_A)$，并不能通过该方法来唯一确定粗糙集，因而其定理 1 的描述至少是欠严格的，因此，合理的粗糙 Vague 集的相关定义是粗糙集理论与 Vague 理论互补的前提，对发展这一个交叉学科意义极为重要，本文通过借助于三角模良好的性质，给出基于三角模 Vague-T 相似关系，并给出了 Vague 集的划分定义，建立了 Vague 划分与 Vague-T 相似关系的一一对应，提供了基于 Vague-T 相似关系的上近似和下近似算子定义及其性质，丰富和发展了 Vague 集与粗糙集理论，是 Vague 集与粗糙集理论的有益补充。

2　预备知识

设 U 是一个有限集，记 $F(U\times U)$ 为 $U\times U$ 上所有 Vague 子集构成的集合，而 $\varphi(U)$ 表示 U 上所有 Vague 子集构成的集合。

定义 1[9]　设 $R\in F(X\times X)$ 是一个 Vague 关系，若 $I\subseteq R$ 则称 R 是有自反的 Vague 关系，若 $R=R^{-1}$，则称 R 是对称的 Vague 关系，这里 I 表示恒等的 Vague 关系[9]。

定义 2[1]　记 $E=[0,1]$，若二元函数，$T:E\times E\to E$ 满足如下条件

(1) $\forall a\in E$ 有 $T(a,1)=a$

(2) $\forall a,b\in E, T(a,b)=T(b,a)$

(3) $T(T(a,b),c)=T(a,(b,c)), a,b,c\in E$

(4) $\forall a,b,c,d\in E$，若 $a\leqslant c, b\leqslant d$，则 $T(a,b)\leqslant T(c,d)$

则称 T 为 E 上的三角模。

令 U 是一个有限论域，$\forall X,Y\in\varphi(U)$，定义 U 上的 Vague 集 $T(X,Y)$ 如下：$\forall x\in U$

$t_{T(X,Y)}(x)=T(t_X(x),t_Y(x))$

$f_{T(X,Y)}(x)=T(f_X(x),f_Y(x))$

定义 3[6]　设 X 是一个对象空间，$x\in X$，对象空间 X 中的一个 Vague 集 V 通过一个真隶属函数 $t_V(x)$ 和一个假隶属函数 $f_V(x)$ 来刻画。$t_V(x)$ 表示支持 x 的证据所导出的 x 的隶属度下界，$f_V(x)$ 表示反对 x 的证据所导出的 x 的否定隶属度下界。$t_V(x)$ 和 $f_V(x)$ 把区间[0,1]的一个实数与 X 中的一个点联系起来，即

$t_V: X\to[0,1], f_V: X\to[0,1]$，其中，$t_V(x)+f_V(x)\leqslant 1$

定义 4[6]　一个 Vague 集包含于另一个 Vague 集 B，即 $A\subseteq B$，如果 $t_A\leqslant t_B, 1-f_A\leqslant 1-f_B$。

定义 5　设 A,B 是两个 Vague 集，称 $C=A\cup B$ 为 A 与 B 的并，如果

*)基金项目：国家自然科学基金项目(60564001)、广西自然科学基金项目(桂科回 0448001)、广西“十百千人才工程”专项基金项目(2003207)。

梁家荣　博士后，教授，主要感兴趣的研究：人工智能，数据挖掘，模糊控制。

$t_C=\max(t_A,t_B)$

$1-f_C=\max(1-f_A,1-f_B)$

称 $D=A\cap B$ 为 A 与 B 的交,如果

$t_D=\min(t_A,t_B)$

$1-f_D=\min(1-f_C,1-f_D)$。

3 主要结果

定义 6 设 T 是一个 E 上的三角模,有限域 X 上的二元 Vague 关系 $R\in F(X\times X)$ 称为 T 传递的,如果 $\forall x,y,z\in X$ 有

$T(t_R(x,y),t_R(y,z))\leqslant t_R(x,z)$

$T(f_R(x,y),f_R(y,z))\geqslant f_R(x,z)$。

定义 7 设 T 是一个 E 上的三角模,有限论域 X 上的二元 Vague 关系 $R\in F(X\times X)$ 称为一个 Vague-T 相似关系,若 R 是自反的,对称的和 T 传递的。

定义 8 U 上的一个 Vague 子集类 $\pi=\{V_1,V_2,\cdots,V_k\}\subset\varphi(U)$ 称为 U 的一个 Vague 划分,若

(1) $\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$ 有

$\|t_{V_i}\|=\max\limits_{u\in U}\{t_{V_i}(u)\}=1,\min\limits_{x\in V}f_{V_i}(x)=0$

(2) $\forall x\in U$ 都有唯一的 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$ 使得 $t_{v_i}(x)=1$, $f_{v_i}(x)=0$

(3) $\forall x,y\in U$,若存在 $V_i,V_j\in\pi$ 使

$t_{V_i}(x)=1,f_{V_i}(x)=0$ 且

$t_{V_j}(y)=1,f_{V_i}(y)=0$

则 $t_{v_i}(y)=t_{v_j}(x)=\|T(t_{V_i},t_{V_j})\|$

$=\max\limits_{x\in U}T(t_{v_i}(u),t_{V_j}(u))$

$f_{V_i}(y)=f_{V_j}(x)=\min\limits_{x\in U}\{T(f_{V_i}(u),f_{V_j}(u))\}$

说明,对于 $\forall x\in U$ 若 $V_i\in\pi$ 使

$t_{V_i}(x)=1,f_{V_i}(x)=0$ 则记 称 $V_i=[x]_\pi$ 为 x 的 Vague-T 相似类。

我们知道在经典集合论中,给定了一个集合 A 上的等价关系 R,就可由 A 与 R 的商集构成 A 的一个划分。相反,给定 A 的一个划分,可以确定一个等价关系 R,使得其集合 A 关于该等价关系的商集就是该划分,从而建立起等价关系与划分的一一对应关系。在引入 Vague 划分和 Vague-T 相似关系后,我们也有类似的结论。

定理 1 设 π 是 U 上一个 Vague 划分。定义 U 上的一个二元 Vague 关系

$R\in F(U\times U)$ 如下

$\forall x,y\in U$

$t_R(x,y)=t_{[x]_\pi}(y)=\max\limits_{x\in U}\{T(t_{[x]_\pi},t_{[y]_\pi})(u)\}$

$f_R(x,y)=f_{[x]_\pi}(y)=\min\limits_{x\in U}\{T(f_{[x]_\pi},f_{[y]_\pi})(u)\}$

则 R 是 U 上的 Vague-T 相似关系;

(2)若 R 是 U 上的 Vague-T 相似关系 定义

$\pi=\{R\langle x\rangle U\}$ (*)

其中 $R\langle x\rangle$ 是由 R 产生的定义在 U 上的一个 Vague 集,其真假隶属度为

$t_{R\langle x\rangle}(y)=t_R(x,y)$

$$f_{R\langle x\rangle}(y)=f_R(x,y) \tag{2}$$

则 π_R 是 U 上的一个 Vague 划分。

证明:(1) 由 Vague-T 相似关系定义我们要证明 R 具有自反,对称和 T 传递。

1)自反性

$\because\forall x\in U$

$t_R(x,x)=\max\limits_{u\in U}\{T(t_{[x]_R},t_{[x]_R})(u)\}=1$

$f_R(x,x)=\min\limits_{u\in U}\{T(f_{[x]_R},f_{[x]_R})(u)\}=0$

$\therefore R$ 是一自反的 Vague 关系。

2) 对称性

$\forall x,y=V$

$\because t_R(x,y)=\max\limits_{u\in U}\{T(t_{[x]_R},t_{[y]_R})(u)\}$

$=\max\limits_{u\in U}\{T(t_{[y]_R},t_{[x]_R})(u)\}=t_R(y,x)$

$=t_R{}^{-1}(x,y)$

$f_R(x,y)=\max\limits_{u\in U}\{T(f_{[x]_R},f_{[y]_R})(u)\}$

$=\min\limits_{u\in U}\{T(f_{[y]_R},f_{[x]_R})(u)\}$

$=f_R(y,x)=f_R{}^{-1}(x,y)$

$\therefore R$ 是一个对称的 Vague 关系[9]

$\because t_R(x,y)=t_{[x]_R}(y)$

$t_R(y,z)=t_{[z]_R}(y)$

$\therefore T(t_R(x,y),t_R(y,z))=T(t_{[x]_R},t_{[z]_R})(y)$

$\leqslant\max\limits_{u\in U}\{T(t_{[x]_\pi},t_{[z]_\pi})(u)\}=t_R(x,z)$

$f_R(x,y)=f_{[x]_R}(y)$

$f_R(y,z)=f_{[z]_R}(y)$

$T(f_R(x,y),f_R(y,z))=T(f_{[x]_R},f_{[z]_R})(y)$

$\geqslant\min\limits_{u\in U}\{T(f_{[x]_R},f_{[z]_R})(u)\}$

$=f_R(x,z)$

因此,R 具有 T 传递性,综上所述,R 是 U 上的 Vague-T 相似关系。

(2)下面证明 由(*)所定义的集合是 U 的一个 Vague 划分

$\forall x\in U$,有 $R\langle x\rangle\in\pi$ 且

$t_{R\langle x\rangle}(x)=t_R(x,x)=1$

$f_{R\langle x\rangle}(x)=f_R(x,x)=0$。

下面证这样的 $R\langle x\rangle$ 是唯一的,若 $\exists y\in U$ 使得 $R\langle y\rangle\in\pi$ 且满足

$t_{R\langle y\rangle}(x)=t_R(y,x)=1$,

$f_{R\langle y\rangle}(x)=f_R(y,x)=0$

则 $\forall u\in U$,

$t_{R\langle x\rangle}(u)=t_R(x,u)=T(t_R(y,x),t_R(x,u))$

$\leqslant t_R(y,u)$

$t_{R\langle y\rangle}(u)=t_R(y,u)=T(t_R(y,x),t_R(y,u))$

$=T(t_R(x,y),t_R(y,u))$

$\leqslant t_R(x,u)=t_{R\langle x\rangle}(y)$

$\therefore t_{R\langle x\rangle}(u)=t_{R\langle y\rangle}(u)$

$f_{R\langle x\rangle}(u)=f_R(x,u)\leqslant T(f_R(x,y),f_R(y,u))$

$\leqslant T(1,f_R(y,u))$

$=f_R(y,u)=f_{R\langle y\rangle}(u)$

同理可证:$f_{R\langle y\rangle}(u)\leqslant f_{R\langle x\rangle}(u)$

从而有 $f_{R\langle y\rangle}(u)=f_{R\langle x\rangle}(u)$。

$\therefore R\langle x\rangle=R\langle y\rangle$。

$\forall R\langle x\rangle,R\langle y\rangle\in\pi$,显然有

$R\langle x\rangle(x)=R\langle y\rangle(y)=1$。

且 $t_{R\langle x\rangle}(y)=t_R(x,y)=t_R{}^{-1}(y,x)$

$=t_R(y,x)=t_{R\langle y\rangle}(x)$

$f_{R\langle x\rangle}(y)=f_{R\langle y\rangle}(x)$

$t_R(x,y)=T(t_{R\langle x\rangle},t_{R\langle y\rangle})(x)$

$\leqslant\max\limits_{u\in U}\{T(t_{R\langle x\rangle},t_{R\langle y\rangle})(u)\}$

$=T(t_{R\langle x\rangle}(u^*),t_{R\langle y\rangle}u^{(*)})$

$=T(t_R(x,u^*),t_R(y,u^*))$

$T(t_R(x,u^*),t_R(u^*,y))\leqslant t_R(x,y)$

从而我们有

$t_{R\langle x\rangle}(y)=t_{R\langle y\rangle}(x)$

$=\max\limits_{u\in U}\{T(t_{R\langle x\rangle},t_{R\langle y\rangle})(u)\}$

综上所述 π 是 u 上的一个 Vague 划分。

定义 9 设 R 是有限论域 V 上的二元 Vague-T 相似关系，对于任意

$X\in\varphi(U)$

考虑如下两个 Vague 集合：

$\underline{R}X=\sum(t_{\underline{R}X}(u),1-f_{\underline{R}X}(u)$，其中

$t_{\underline{R}X}(x)=\min\limits_{u\in U}\{t_X(u)\mid t_x(u)\leqslant t_R(x,u)\}$

$1-f_{\underline{R}X}(x)=\min\limits_{u\in U}\{1-f_X(u)\mid 1-f_X(u)\}$

$\leqslant 1-f_R(x,u)\}$

及$\overline{R}X=\sum(t_{\overline{R}X}(u),1-f_{\overline{R}X}(u))$

其中

$t_{\overline{R}X}(x)=\max\limits_{u\in U}\{T(t_R(u,x),t_X(u))\}$

$1-f_{\overline{R}X}=\max\limits_{u\in U}\{T(1-f_R(u,x),1-f_X(u))\}$

我们称(U,R)是 Vague-T 近似空间，并称$(\underline{R}X,\overline{R}X)$为 X 关于U 的 Vague-T 相似关系 R 的粗糙集。而$\overline{R}$和$\underline{R}$分别称为 Vague-T 上近似算子和 Vague-T 下近似算子。

定理 2 对于 Vague-T 下近似算子和上近似算子 $X,Y\in\varphi(U)$，则

(1)$\underline{R}X\subseteq X\subseteq\overline{R}X$

(2)$\overline{R}(X\cup Y)=\overline{R}X\cup\overline{R}Y$

(3)$\underline{R}(X\cap Y)=\underline{R}X\cap\underline{R}Y$

(4)$X\subseteq Y\Rightarrow\underline{R}\subseteq\underline{R}Y,\overline{R}X\subseteq\overline{R}Y$

证明：(1)由定义有

$t_{\underline{R}X}(x)=\min\limits_{u\in U}\{t_X(u)\mid t_X(u)\leqslant t_R(x,u)\}$

$\leqslant t_X(x)(\because t_X(x)\leqslant t_R(x,x)=1)$

$1-f_{\underline{R}X}(x)=\min\limits_{u\in U}\{1-f_X(u)\mid 1-f_X(u)$

$\leqslant 1-f_R(x,u)\}$

$\leqslant 1-f_X(x)$

$(\because 1-f_X(x)\leqslant 1-f_R(x,x))$

$\therefore\underline{R}X\subseteq X$

另一方面

$t_{\overline{R}X}(x)=\max\limits_{u\in U}\{T(t_R(u,x),t_X(u))\}$

$\geqslant T(t_R(x,x),t_X(x))$

$=t_X(x)(\because t_R(x,x)=1)$

$1-f_{\overline{R}x}(x)=\max\limits_{u\in U}\{T(1-f_R(u,x),1-f_X(u))\}$

$\geqslant T(1-f_R(x,x),1-f_X(x))$

$=1-f_X(x)$

$\therefore X\subseteq\overline{R}X$

(2)

$\because t_{\overline{R}(X\cup Y)}(x)=\max\limits_{u\in U}\{T(t_R(u,x),t_{X\cup Y}(u))\}$

$=\max\limits_{u\in U}\{T(t_R(u,x),\max(t_X(u),t_Y(u)))\}$

$=\max\limits_{u\in U}\{\max\{T(t_R(u,x),(t_X(u)),T(t_R(u,x),(t_Y(u))\}\}$

$=\max\{\max\limits_{u\in U}\{T(t_R(u,x),(t_X(u))\},\max\limits_{u\in U}\{T(t_R(u,x),(t_Y(u))\}\}$

$=\max\{t_{\overline{R}X}(x),t_{\overline{R}Y}(x)\}$

$=t_{\overline{R}X\cup\overline{R}Y}(x)$

另一方面

$1-f_{\overline{R}(X\cup Y)}(x)=\max\limits_{u\in U}\{T(1-f_R(u,x),1-f_{X\cup Y}(u))\}$

$=\max\limits_{u\in U}\{T(1-f_R(u,x),\max\{1-f_X(u),1-f_Y(u)\})\}$

$=\max\limits_{u\in U}\{\max\{T(1-f_R(u,x),1-f_X(u)),$

$T(1-f_R(u,x),1-f_Y(u))\}\}$

$=\max\{\max\limits_{u\in U}T(1-f_R(u,x),1-f_X(u)),\max\limits_{u\in U}T\{(1-f_R(u,x),1-f_Y(u))\}\}$

$=\max\{1-f_{\overline{R}X}(x),1-f_{\overline{R}Y}(x)\}$

$=1-f_{\overline{R}X\cup\overline{R}Y}(x)$

从而有

$\overline{R}(X\cup Y)=\overline{R}X\cup\overline{R}Y$。

(3)$\because t_{\underline{R}(X\cap Y)}(x)$

$=\min\limits_{u\in U}\{t_{X\cap Y}(u)\mid t_{X\cap Y}(u)\leqslant t_R(x,u)\}$

$=\min\limits_{u\in U}\{\min(t_X(u),t_Y(u))\mid\min\{t_X(u),t_Y(u)\}\leqslant t_R(x,u)\}$

$=\min\{\min\limits_{u\in U}\{t_X(u)\mid t_X(u)\leqslant t_R(x,u)\},\min\limits_{u\in U}\{t_Y(u)\mid t_Y(u)\leqslant t_R(x,u)\}\}$

$=\min\{t_{\underline{R}X}(x),t_{\underline{R}Y}(x)\}$

$=t_{\underline{R}X\cap\underline{R}Y}(x)$

同理可证

$1-f_{\underline{R}(X\cap Y)}(x)=1-f_{\underline{R}X\cap\underline{R}Y}(x)$

从而有$\underline{R}(X\cap Y)=\underline{R}X\cap\underline{R}Y$。

(4)如果 $X\subseteq Y$，则有 $\forall x\in U$，

$t_X(x)\leqslant t_Y(x)$，

$1-f_X(x)\leqslant 1-f_Y(x)$。

$\therefore t_X(x)=\min\{t_X(x),t_Y(x)\}$

$1-f_X(x)=\min\{1-f_X(x),1-f_Y(x)\}$

从而有 $X=X\cap Y$，

由(3)有$\underline{R}X=\underline{R}X\cap\underline{R}Y$

显然$\underline{R}X\cap\underline{R}Y\subseteq\underline{R}Y$，

事实上 $\forall x\in U$

$t_{\underline{R}X\cap\underline{R}Y}(x)=\min\{t_{\underline{R}X}(x),t_{\underline{R}Y}(x)\}\leqslant t_{\underline{R}Y}(x)$

$1-f_{\underline{R}X\cap\underline{R}Y}(x)=\min\{1-f_{\underline{R}X}(x),1-f_{\underline{R}Y}(x)\}$

$\leqslant 1-f_{\underline{R}Y}(x)$

同理可证$\overline{R}X\subseteq\overline{R}Y$。

结束语 本文指出了现有的关于粗糙 Vague 集理论相关文献的不合理之处。合理性地给出了 Vague-T 相似关系、Vague 划分等定义，并建立了 Vague-T 相似关系和 Vague 划分之间的一一对应关系，研究了基于 Vague-T 相似关系的 Vague 粗糙集，合理地推广了经典集合、经典粗糙集、模糊粗糙集的相关结果。

参 考 文 献

1 张文修，吴伟志，等. 粗糙集理论与方法. 北京科学出版社，2001

2 Chakrabarty K, Biswas R, Nanda S. Fuzziness in rough sets. Fuzzy sets and systems, 2000, 11: 169～176

3 Mi J S, Zhang W X. An axiomatic Charact-erization of a fuzzy generalization of rough sets. Information Science, 2004, 160: 235～254

4 Wu W Z, Zhang W X. Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators. Information Science, 2004, 159: 233～254

5 Yao Y Y. A comperative study of fuzzy stes and rough sets. Information Science, 1998, 109: 227～242

6 Gan W L, Buehrer D J. Vague sets. IEEE. Trans. On Systems, man. CyBornetics, 1993, 23(21): 610～614

7 邱卫根. 基于一般二元关系下的粗糙 Vague 集. 计算机科学，2006, 33(2): 191～204

8 闫得勤，迟忠先. 粗糙集与 Vague 集. 计算机科学，2004, 31(8): 133～135

9 梁家荣. Vague 关系. 计算机工程与应用，2005, 41(30): 10～12